



---

# 多旋翼飞行器设计与控制 系列实验

## 多旋翼飞行器动态模型建立实验

全权 副教授

qq\_buaa@buaa.edu.cn

自动化科学与电气工程学院

北京航空航天大学



北航可靠飞行控制研究组

BUAA Reliable Flight Control Group



# 大纲

1. 基本原理
2. 基础实验
3. 分析实验
4. 设计实验
5. 小结

## 多旋翼飞行器设计与控制 \*

本书是一本全面、系统的多旋翼飞行器设计的教科书，不仅介绍飞行器的一般设计技术，而且重点讲述了多旋翼飞行器系统。本书共分4章，分为4部分，涵盖了多旋翼飞行器的设计、建模、状态估计、控制决策等方面。

本书的主要特色如下：

- 理论性和实用性。涵盖了自组织的理论和控制方法。
- 理论性和系统性。知行合一，紧跟时代需求。

本书内容也与生产实际使用的自动驾驶仪密切相关，并为现代飞行中提供了理论依据，因此可作为高等院校飞行器专业的学生、教师、研究人员和工程师等阅读的重要书籍。

This introductory text is a welcome addition to the literature on multicopter design and control, as which the author is an acknowledged authority. The book is directed to advanced undergraduate and beginning graduate students in introductory and control (or electrical engineering), as well as to multicopter designers and hobbyists. (本书作者是多旋翼飞行器设计与控制领域的公认专家，他编的这本入门教材非常适合对多旋翼飞行器设计与控制感兴趣的读者。本书可作为飞行器控制（或电子）工程领域的硕博生和相关专业研究生，以及多旋翼飞行器设计领域的业余爱好者。)

— W. Murray Busham, 多伦多大学教授

This is the single best introduction to multicopter control. Clear, comprehensive and progressing from basic principles to advanced techniques, it's a must read for anyone hoping to learn how to design flying robots. (这是一本多旋翼飞行器控制的最佳入门教材。本书内容翔实，涵盖了从基本原理到高级技术的发展过程，这对任何希望学习如何设计飞行机器人的读者来说是一个必读教材。)

— Chris Anderson, 3DR Robotics CEO



定价：00.00元

多旋翼飞行器设计与控制

\*

全权著

杜光勋等译

电子工业出版社

## 多旋翼飞行器设计与控制

全权著

杜光勋 赵峰亮 戴训华 任锦瑞 邓恒译

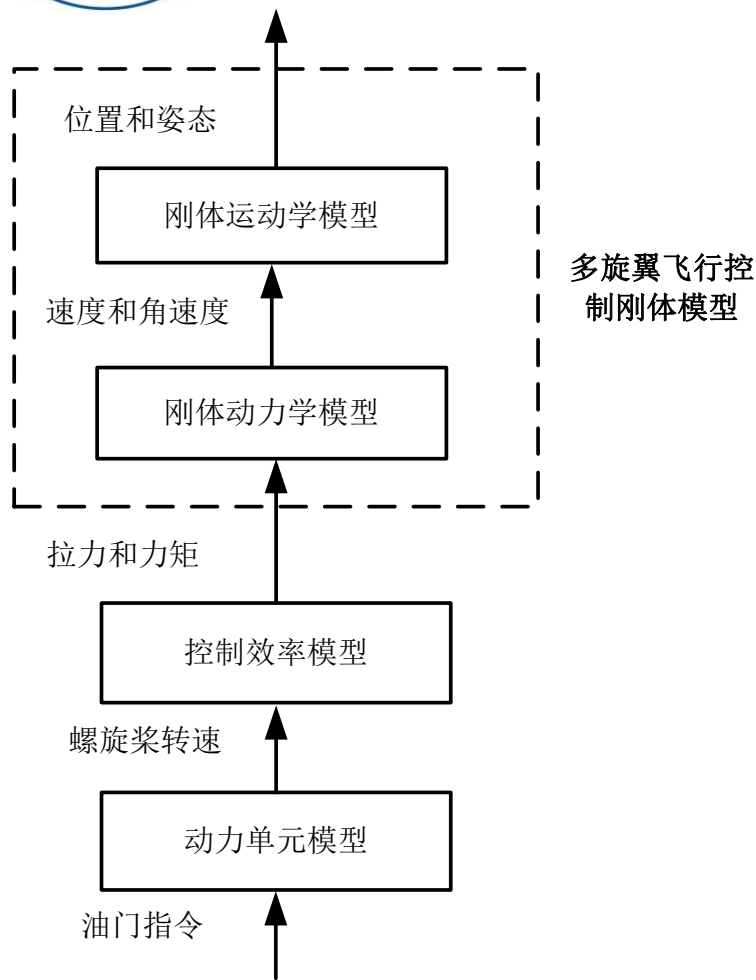
郭祥 插图设计

中国工业出版社 电子工业出版社





# 1. 基本原理



(1) 刚体运动学模型。跟质量与受力无关，只研究位置、速度、姿态、角速度等参量，常以质点为模型。

(2) 刚体动力学模型。它与一般刚体动力学模型最大的不同是，**拉力方向始终与机体轴 $z_b$ 轴的负方向一致。**

(3) 控制效率模型。六旋翼和四旋翼的区别，就在这个控制效率模型上。

(4) 动力单元模型。以无刷直流电机、电调和螺旋桨为一组的整个动力机构。输入是0~1的电机油门指令，输出是螺旋桨转速。

图. 多旋翼的建模流程图



# 1. 基本原理

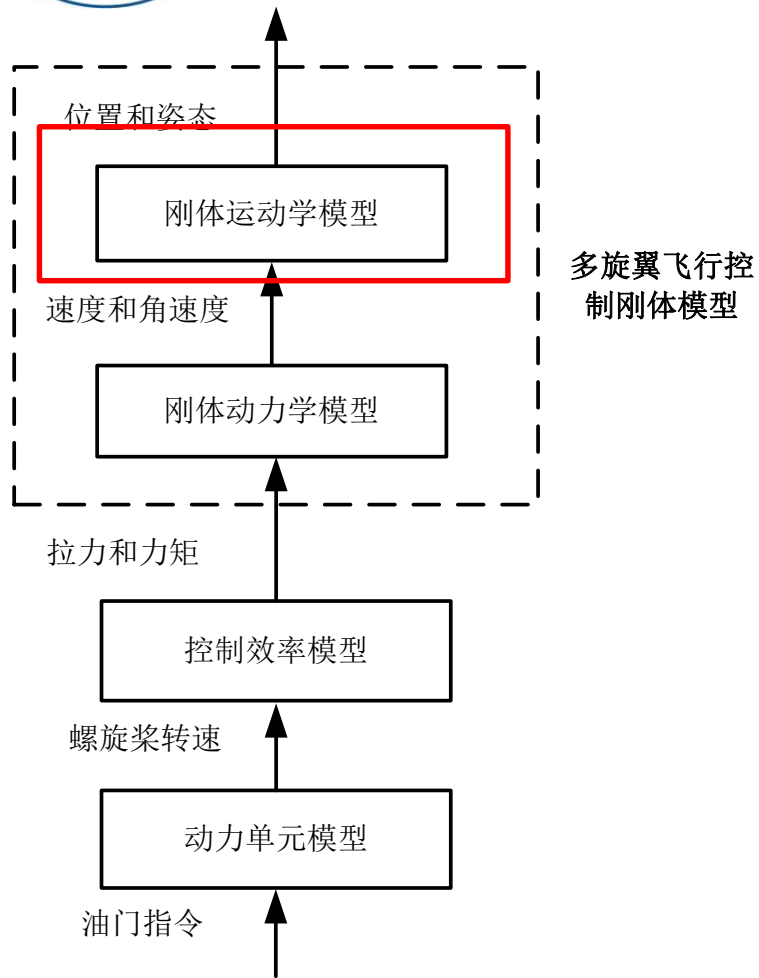


图. 多旋翼的建模流程图

## ■ 基于欧拉角模型

$$\begin{aligned} {}^e \dot{\mathbf{p}} &= {}^e \mathbf{v} \\ \dot{\Theta} &= \mathbf{W}^b \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

## ■ 基于旋转矩阵模型

$$\begin{aligned} {}^e \dot{\mathbf{p}} &= {}^e \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{R}} &= \mathbf{R} \begin{bmatrix} {}^b \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}_x \end{aligned}$$

## ■ 基于四元数模型

$$\begin{aligned} {}^e \dot{\mathbf{p}} &= {}^e \mathbf{v} \\ \dot{q}_0 &= -\frac{1}{2} \mathbf{q}_v^T \cdot {}^b \boldsymbol{\omega} \\ \dot{\mathbf{q}}_v &= \frac{1}{2} \left( q_0 \mathbf{I}_3 + [\mathbf{q}_v]_x \right) {}^b \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$



# 1. 基本原理

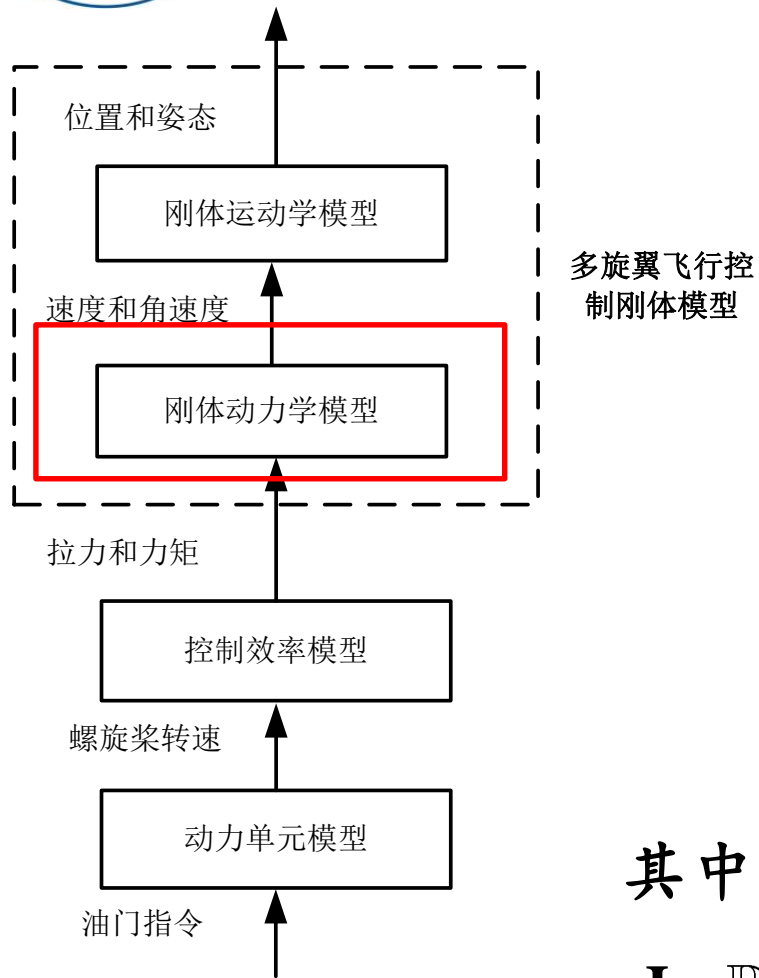


图. 多旋翼的建模流程图

## ■ 惯性系下的位置动力学模型

$${}^e \dot{\mathbf{v}} = g\mathbf{e}_3 - \frac{f}{m} {}^e \mathbf{b}_3$$

飞行器只受重力和螺旋桨升力，其中螺旋桨拉力沿 $z_b$ 向下方向，而重力沿 $z_e$ 方向

## ■ 姿态动力学模型

在机体坐标系建立多旋翼姿态动力学方程如下

$$\mathbf{J} \cdot {}^b \dot{\boldsymbol{\omega}} = -{}^b \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot {}^b \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{G}_a + \boldsymbol{\tau}$$

力矩

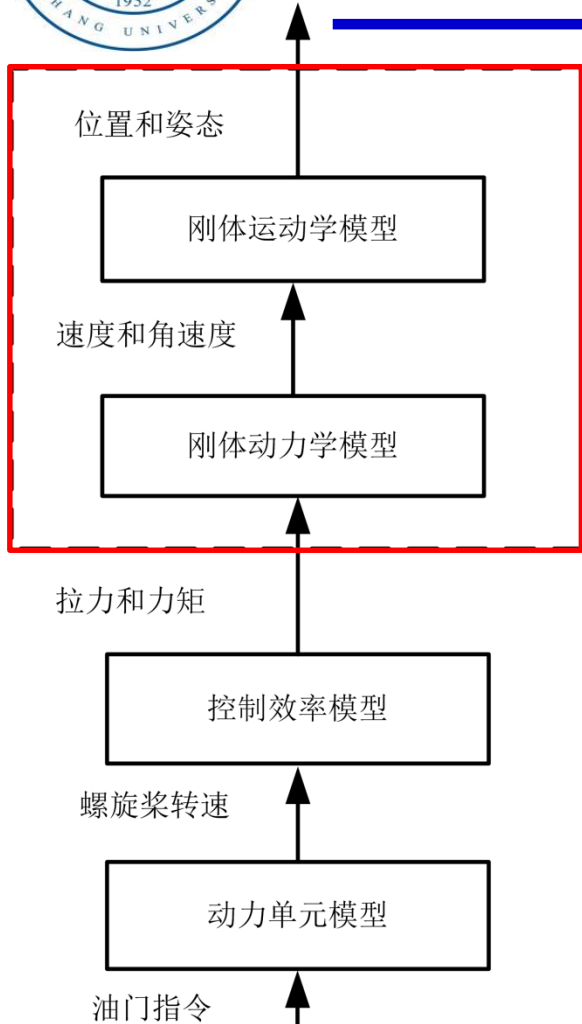
陀螺力矩

其中  $\boldsymbol{\tau} \triangleq [\tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z]^T \in \mathbb{R}^3$  表示螺旋桨在机体轴上产生的力矩，

$\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  表示多旋翼的转动惯量。



# 1. 基本原理



多旋翼飞行控制  
刚体模型

## ■ 基于欧拉角模型

$$\begin{cases} {}^e \dot{\mathbf{p}} = {}^e \mathbf{v} \\ {}^e \dot{\mathbf{v}} = g\mathbf{e}_3 - \frac{f}{m} \mathbf{R}\mathbf{e}_3 \\ \dot{\Theta} = \mathbf{W} \cdot {}^b \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{J} \cdot {}^b \dot{\boldsymbol{\omega}} = -{}^b \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot {}^b \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{G}_a + \boldsymbol{\tau} \end{cases}$$

## ■ 基于四元数模型

$$\begin{cases} {}^e \dot{\mathbf{p}} = {}^e \mathbf{v} \\ {}^e \dot{\mathbf{v}} = g\mathbf{e}_3 - \frac{f}{m} \mathbf{R}\mathbf{e}_3 \\ \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \left[ {}^b \boldsymbol{\omega} \right]_{\times} \\ \mathbf{J} \cdot {}^b \dot{\boldsymbol{\omega}} = -{}^b \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot {}^b \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{G}_a + \boldsymbol{\tau} \end{cases}$$

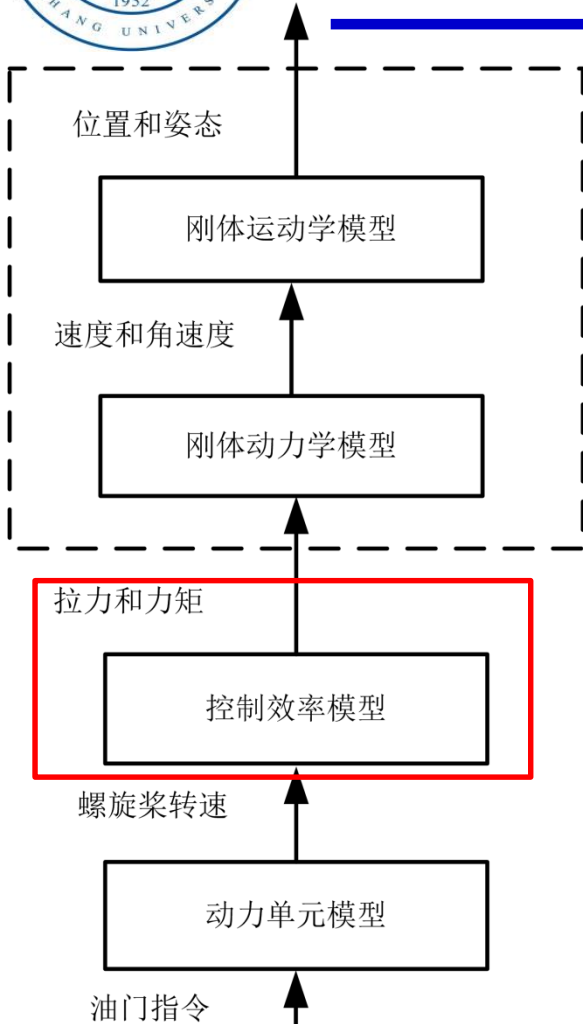
## ■ 基于旋转矩阵模型

$$\begin{cases} {}^e \dot{\mathbf{p}} = {}^e \mathbf{v} \\ {}^e \dot{\mathbf{v}} = g\mathbf{e}_3 - \frac{f}{m} \mathbf{R}\mathbf{e}_3 \\ \dot{q}_0 = -\frac{1}{2} \mathbf{q}_v^T \cdot {}^b \boldsymbol{\omega} \\ \dot{\mathbf{q}}_v = \frac{1}{2} (q_0 \mathbf{I}_3 + [\mathbf{q}_v]_{\times}) {}^b \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{J} \cdot {}^b \dot{\boldsymbol{\omega}} = -{}^b \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot {}^b \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{G}_a + \boldsymbol{\tau} \end{cases}$$

图. 多旋翼的建模流程图



# 1. 基本原理



## ■ 标准四旋翼

作用在机体上的总拉力为

$$f = \sum_{i=1}^4 T_i = c_T (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2)$$

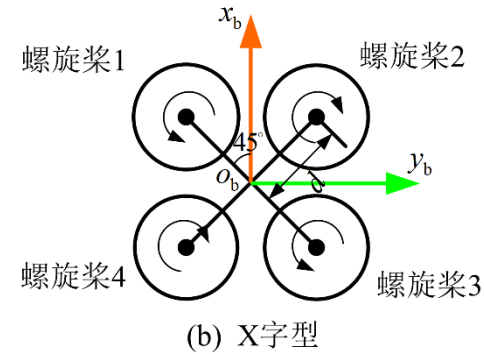
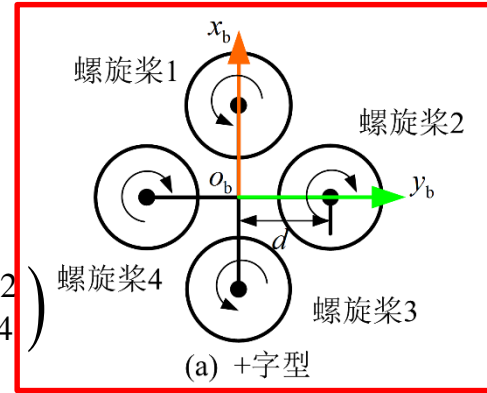
对于+字形四旋翼，螺旋桨产生力矩为

$$\tau_x = dc_T (-\omega_2^2 + \omega_4^2)$$

$$\tau_y = dc_T (\omega_1^2 - \omega_3^2)$$

$$\tau_z = c_M (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2)$$

其中  $c_T = \frac{1}{4\pi^2} \rho D_p^4 C_T, c_M = \frac{1}{4\pi^2} \rho D_p^5 C_M$



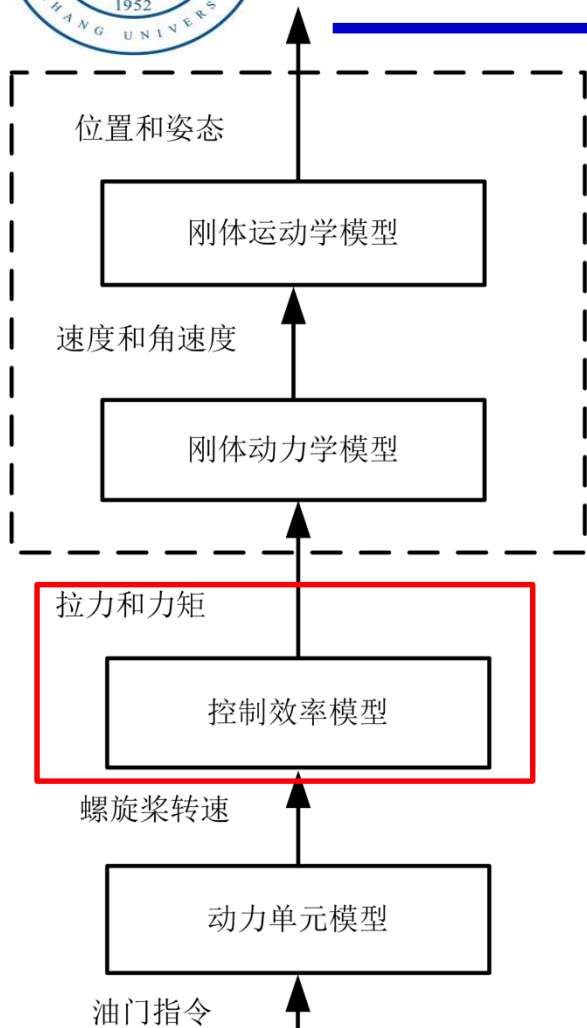
$$\begin{bmatrix} f \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_T & c_T & c_T & c_T \\ 0 & -dc_T & 0 & dc_T \\ dc_T & 0 & -dc_T & 0 \\ c_M & -c_M & c_M & -c_M \end{bmatrix}}_{M_4} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix}$$

图. 多旋翼的建模流程图





# 1. 基本原理



## ■ 标准四旋翼

作用在机体上的总拉力为

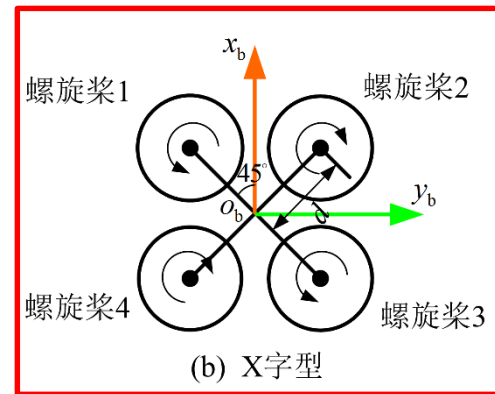
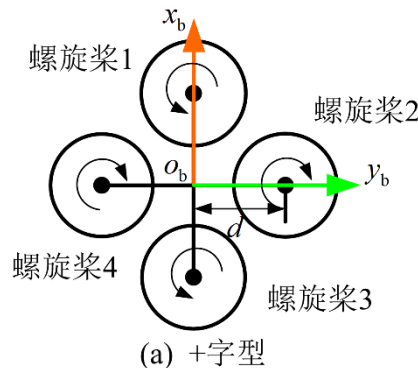
$$f = \sum_{i=1}^4 T_i = c_T (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2)$$

对于X字形四旋翼，螺旋桨产生力矩为

$$\tau_x = dc_T \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_1^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_2^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_3^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_4^2 \right)$$

$$\tau_y = dc_T \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_1^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_2^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_3^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_4^2 \right)$$

$$\tau_z = c_M (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2)$$



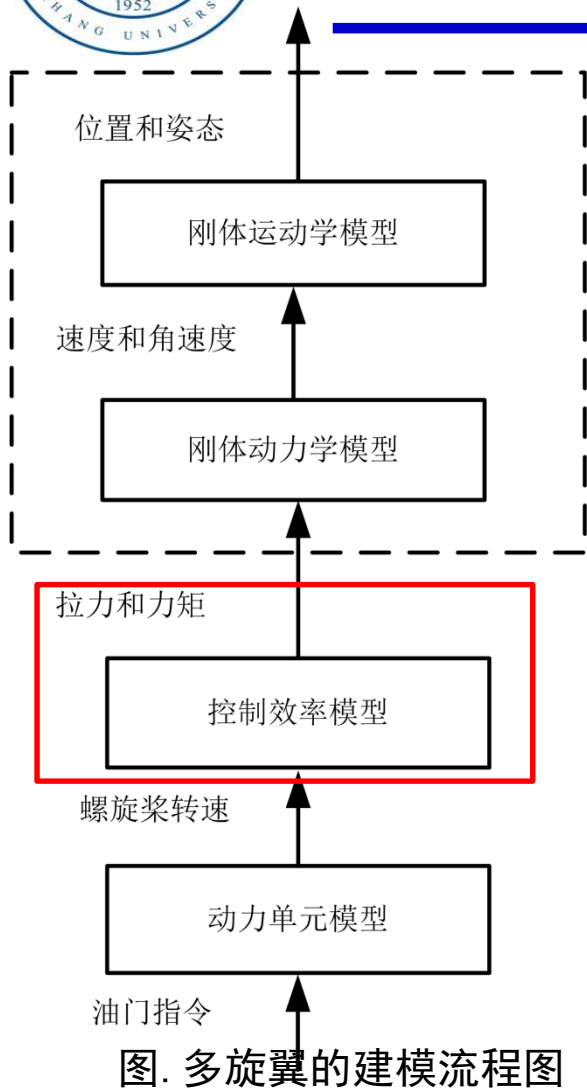
$$\begin{bmatrix} f \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_T & c_T & c_T & c_T \\ \frac{\sqrt{2}}{2} dc_T & -\frac{\sqrt{2}}{2} dc_T & -\frac{\sqrt{2}}{2} dc_T & \frac{\sqrt{2}}{2} dc_T \\ \frac{\sqrt{2}}{2} dc_T & \frac{\sqrt{2}}{2} dc_T & -\frac{\sqrt{2}}{2} dc_T & -\frac{\sqrt{2}}{2} dc_T \\ c_M & -c_M & c_M & -c_M \end{bmatrix}}_{M_4} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix}$$

图. 多旋翼的建模流程图

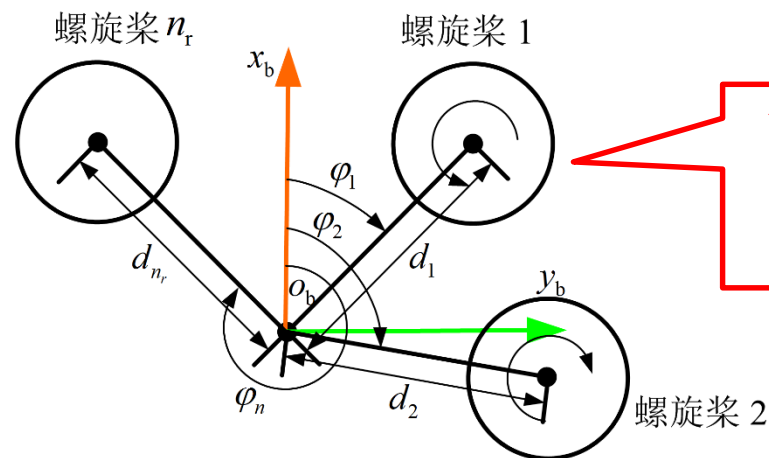




# 1. 基本原理



## 任意多旋翼



奇数标号的螺旋桨逆时针转动，偶数标号的螺旋桨顺时针转动。

$$\begin{bmatrix} f \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_T & c_T & \cdots & c_T \\ -d_1 c_T \sin \varphi_1 & -d_2 c_T \sin \varphi_2 & \cdots & -d_{n_r} c_T \sin \varphi_{n_r} \\ d_1 c_T \cos \varphi_1 & d_2 c_T \cos \varphi_2 & \cdots & d_{n_r} c_T \cos \varphi_{n_r} \\ c_M \delta_1 & c_M \delta_2 & \cdots & c_M \delta_{n_r} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_{n_r}} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \vdots \\ \omega_{n_r}^2 \end{bmatrix}$$

其中  $\mathbf{M}_{n_r} \in \mathbb{R}^{4 \times n_r}$ ,  $\delta_i = (-1)^{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n_r$



# 1. 基本原理

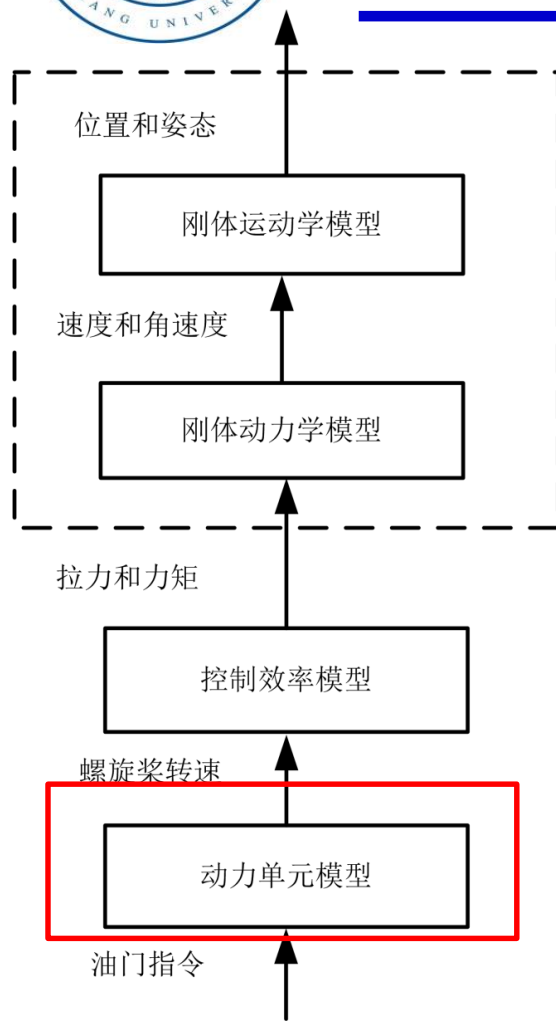


图. 多旋翼的建模流程图

## 动力单元模型

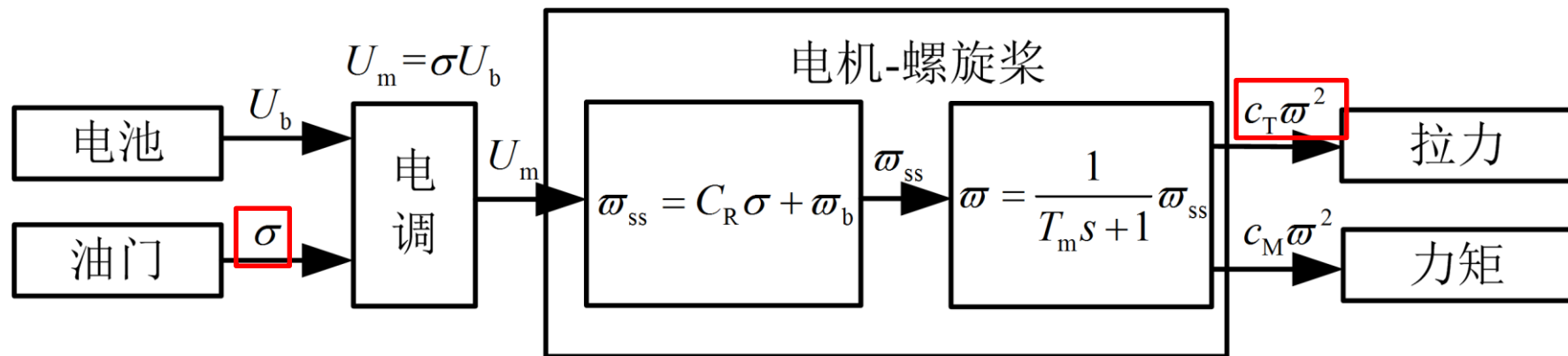


图. 动力系统信号传递图

### 模型

$$\omega = \frac{1}{T_m s + 1} (C_R \sigma + \omega_b)$$

其中电机油门  $\sigma$  为输入，电机转速  $\omega$  为输出， $T_m$  为电机的动态响应常数。



# 1. 基本原理

---

以上原理可以详细参考“Quan Quan. Introduction to Multicopter Design and Control. Springer, Singapore, 2017”或者“全权著. 杜光勋, 赵峙尧, 戴训华, 任锦瑞, 邓恒译. 《多旋翼飞行器设计与控制》, 电子工业出版社, 2018.”的第5-6章。



## 2. 基础实验

---

### □ 实验目标

#### ■ 已知

(1) Matlab2016b, 四旋翼模型文件: e2/e2.1文件夹

(<http://rfly.buaa.edu.cn/course.html>)

#### ■ 目标

分析多旋翼总质量、转动惯量矩阵、多旋翼机身半径(1/2轴距)、螺旋桨推力系数、螺旋桨力矩系数、油门到电机稳态转速参数、电机螺旋桨转动惯量、电机响应时间常数变化, 对整个飞行产生的影响。



## 2. 基础实验

### □ 实验步骤

#### (1) 总质量对飞行影响

1) 打开文件“e2/e2.1/e2\_1.slx”，如图所示。打开“e2/e2.1/Init\_control.m”文件并运行对参数进行初始化。

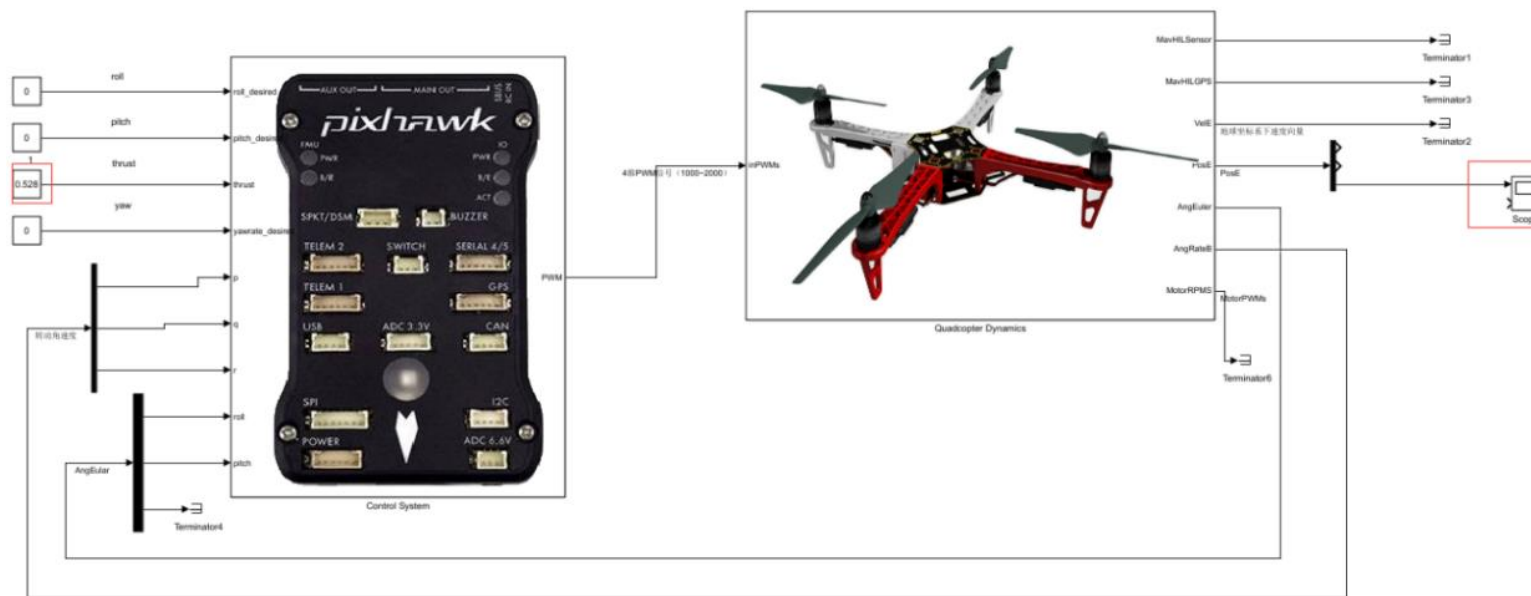


图. 多旋翼模型



## 2. 基础实验

### □ 实验步骤

#### (1) 总质量对飞行影响

#### 2) 找到悬停时的油门值

修改thrust的输入值，如上页图中红色框所示位置。用示波器观察位置 $z$ 的输出（双击示波器即可打开），得到 $z$ 近似保持不变的油门值。当 $m=1.4$ ，thrust输入为0.6085时飞行器可以近似保持悬停状态，如右图所示。

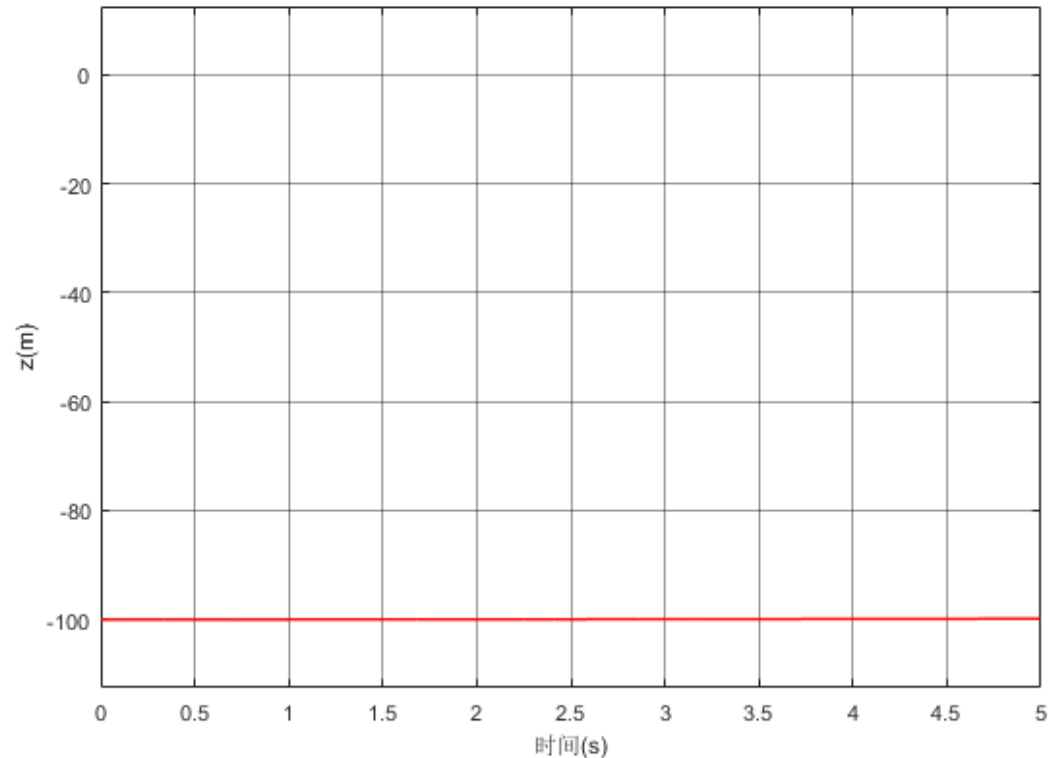


图.  $m=1.4\text{kg}$ 高度响应



## 2. 基础实验

### □ 实验步骤

#### (1) 总质量对飞行影响

##### 3) 修改多旋翼质量，观察影响

将Init.m文件中的ModelParam.uavMass参数改为2.0。如右图所示，在相同油门输入时，飞行器高度在下降。由于重力增加，相同的油门输入已经无法提供的足够的升力使多旋翼保持悬停状态。

当质量为2kg时，多旋翼的悬停状态下，thrust的输入为0.7032。

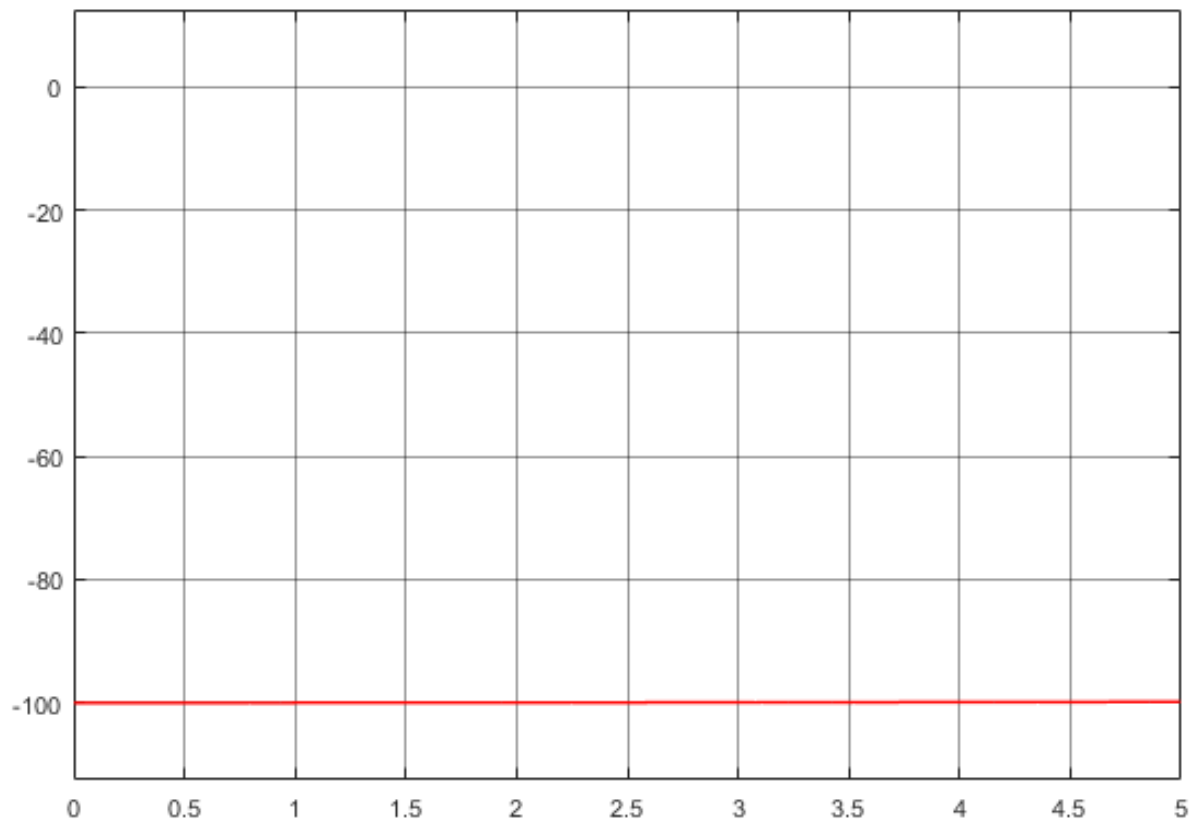


图.  $m=2.0\text{kg}$  高度响应





## 2. 基础实验

### (1) 总质量对飞行影响

#### 4) 质量对俯仰角的影响

质量为1.4kg时，将thrust输入设置为0.6085，将pitch\_desired设置为0.2（左下图），用示波器观察输出俯仰角，如右下图所示。

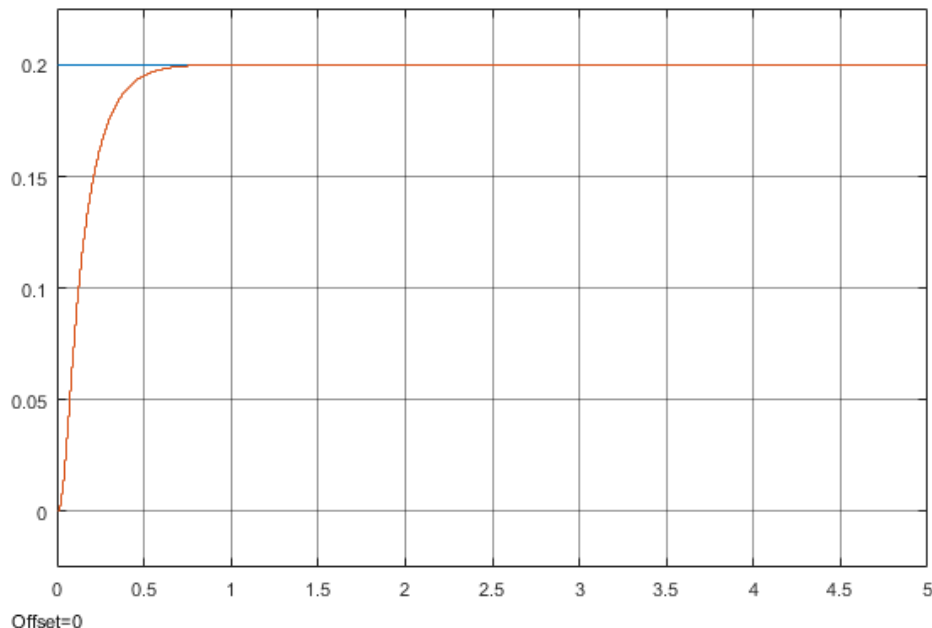
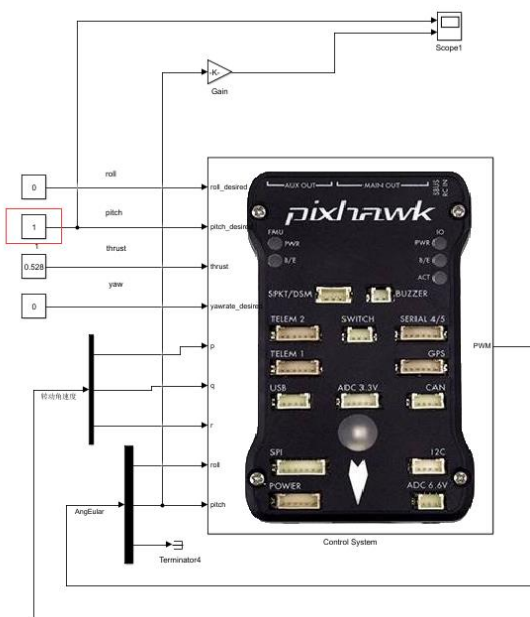


图. 将thrust输入设置为0.6085

图. m=1.4kg 俯仰响应

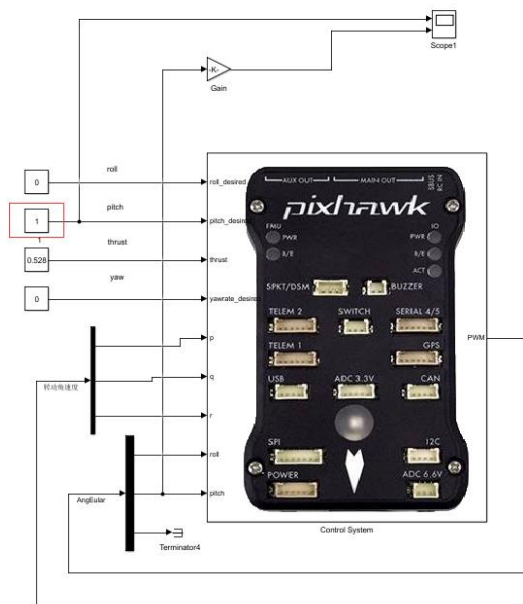


## 2. 基础实验

### (1) 总质量对飞行影响

#### 4) 质量对俯仰角的影响

将质量改为2kg时，将thrust输入设置为0.7032，用示波器观察输出俯仰角，得到右下图结果。



可以看到姿态响应几乎不受影响。

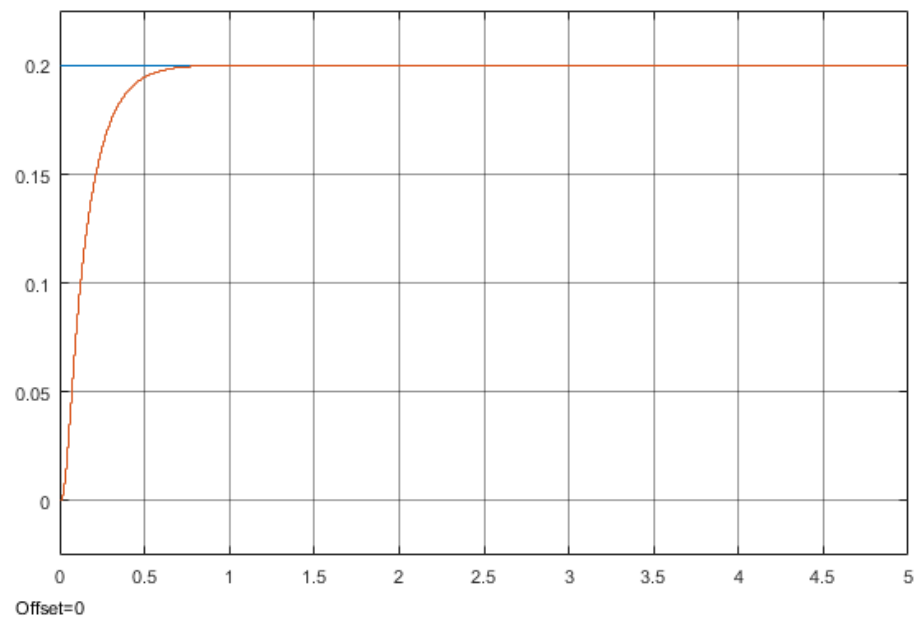
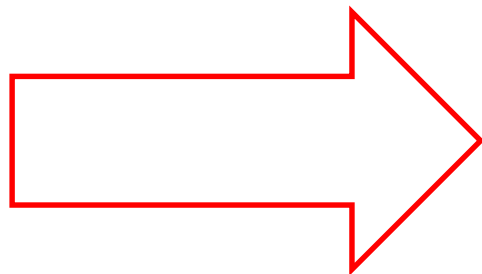


图. 将thrust输入设置为0.7032

图.  $m=2.0\text{kg}$ 俯仰响应



## 2. 基础实验

### (1) 总质量对飞行影响

#### 4) 质量对俯仰角的影响

若质量增大，导致重心发生变化会对控制品质产生影响。

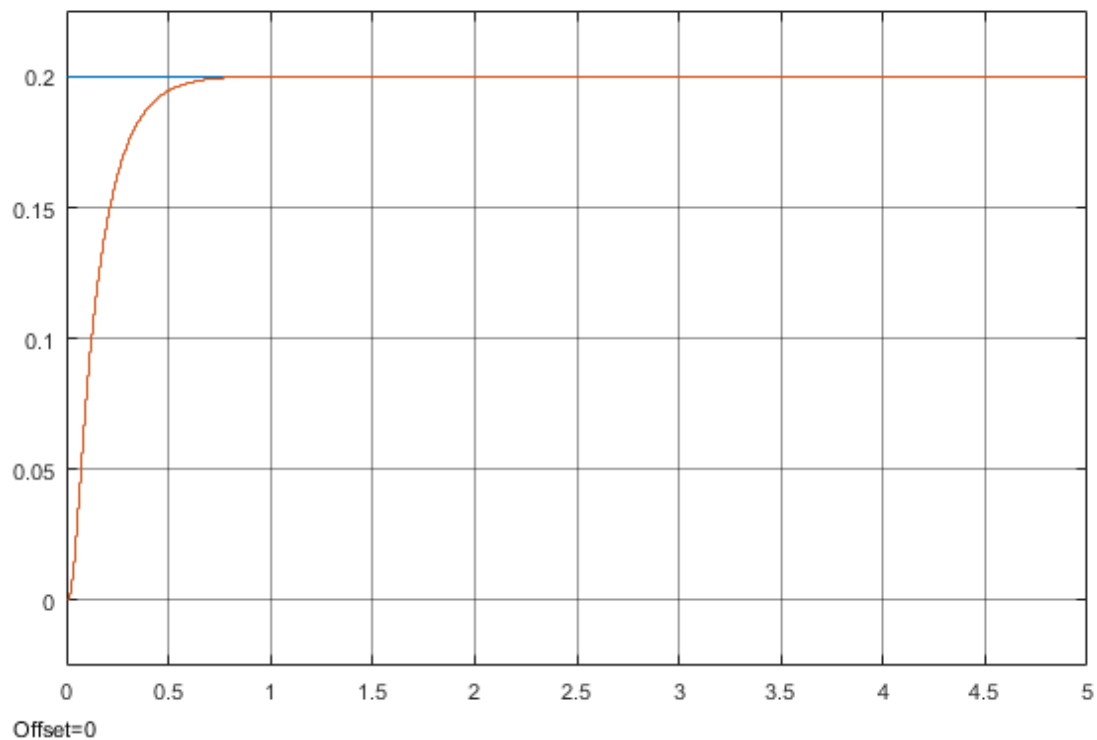


图. 重心无变化 俯仰响应

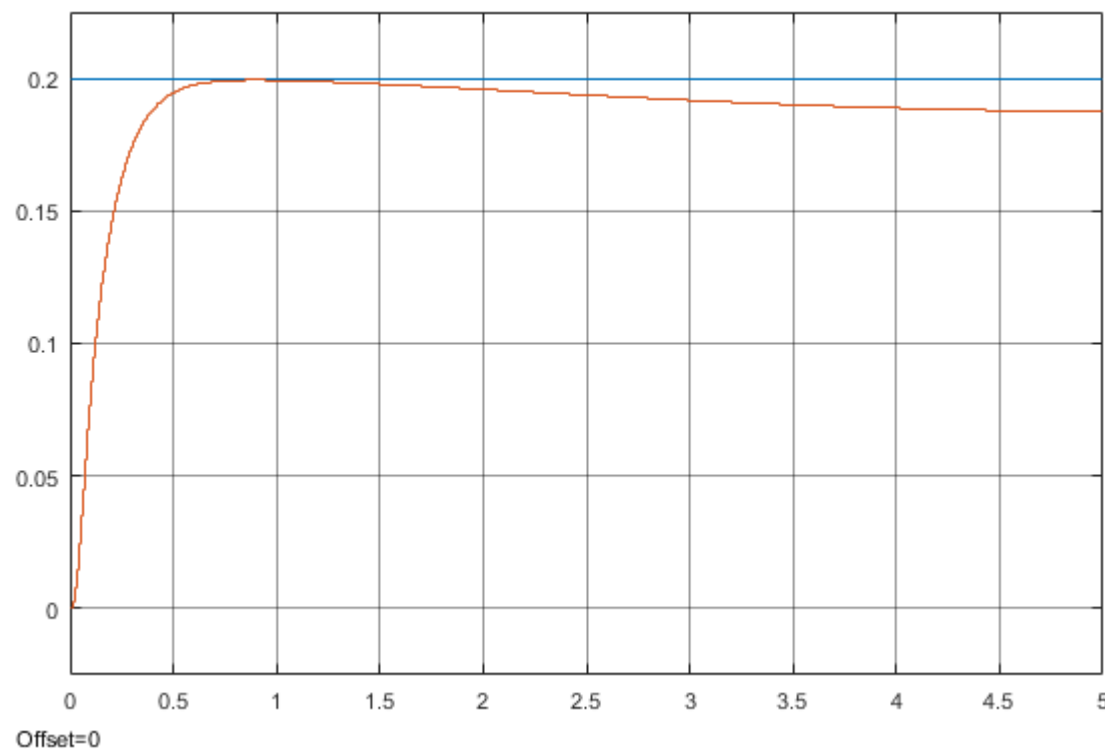


图. 重心变化俯仰响应



## 2. 基础实验

### (2) 转动惯量对飞行的影响

通过修改ModelParam\_uavJzz, 将z轴的转动惯量增大到原来的2倍, 若质量不变。

■ 系统偏航角速度响应变慢

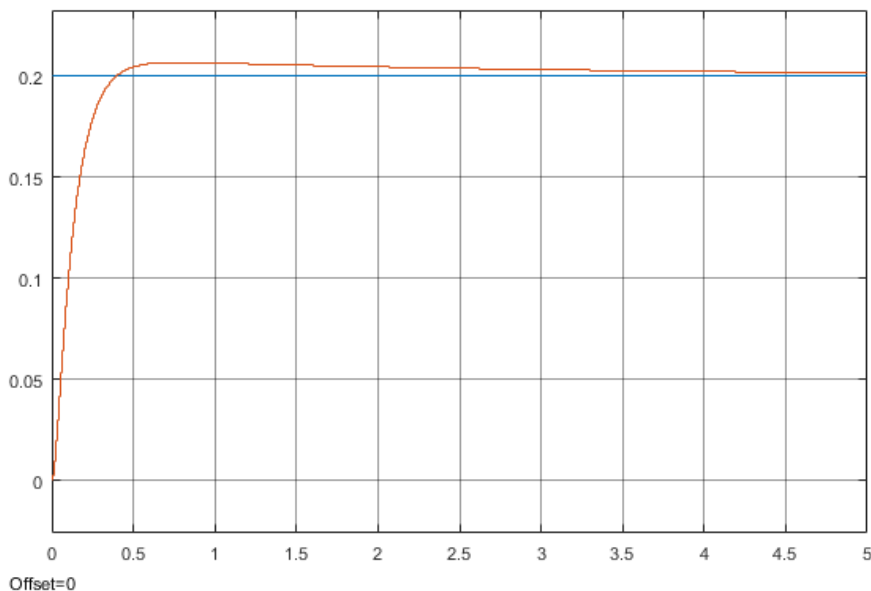


图. Z轴转动惯量不变偏航角速率响应

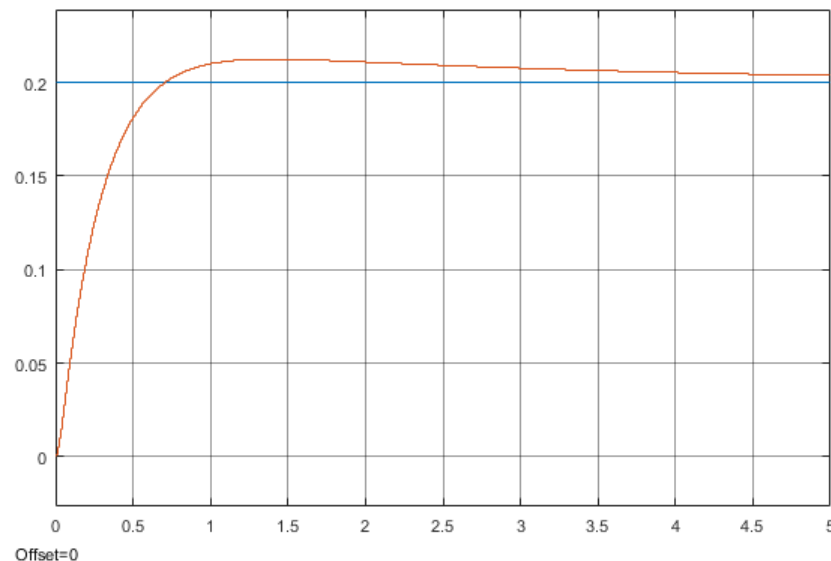


图. Z轴转动惯量增大到原来的两倍偏航角速率响应



## 2. 基础实验

### (4) 螺旋桨推力系数对飞行的影响

推力系数参数ModelParam. rotorCt扩大为原来的2倍。

- 在相同油门指令下，螺旋桨提供的升力增加，高度响应如下图所示。此时，thrust输入为0.4663时，多旋翼可悬停。

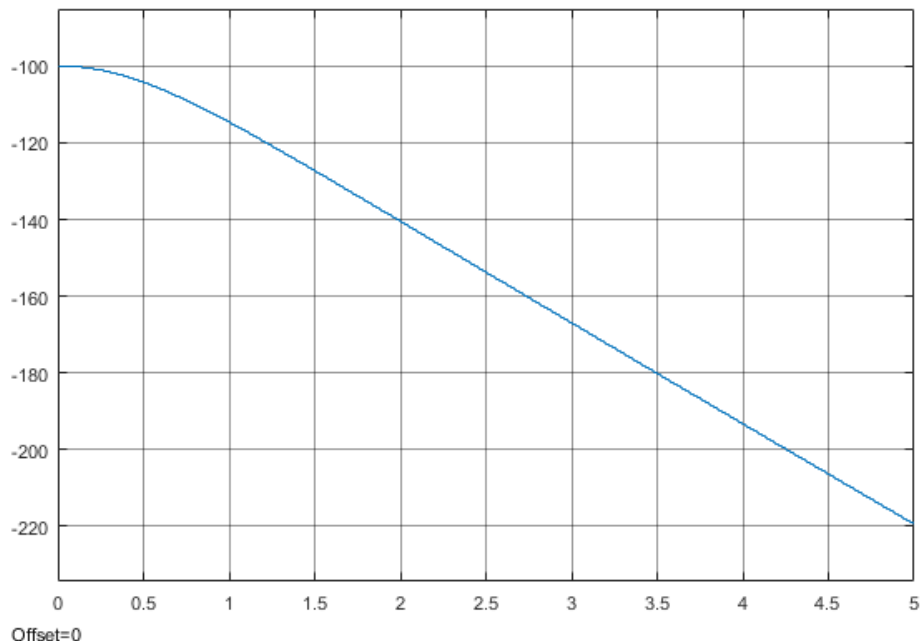


图. 推力系数对高度响应的影响



## 2. 基础实验

### (5) 螺旋桨力矩系数对飞行的影响

将力矩系数参数ModelParam. rotorCm扩大为原来的2倍。偏航角速率响应变快。

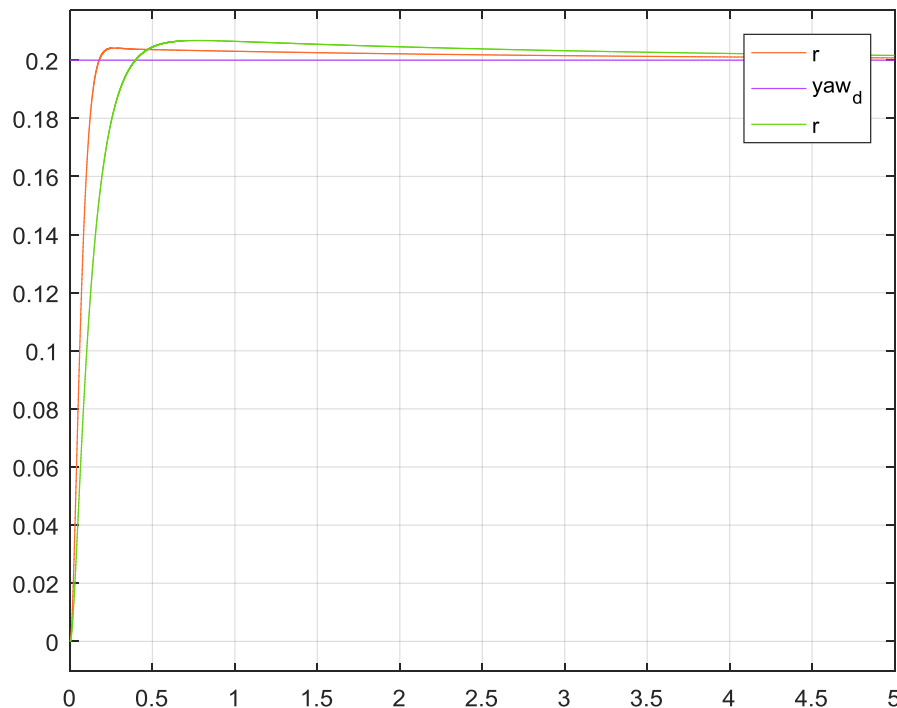


图. 力矩系数对偏航角速率的影响



## 2. 基础实验

### (6) 螺旋桨-电机稳态转速参数对飞行的影响

#### 2) 斜率项

将螺旋桨-电机稳态转速参数的斜率项ModelParam. motorCr变为原来的2倍。螺旋桨提供的升力增加，高度响应如左图所示。thrust输入为0.3042时，多旋翼可悬停。

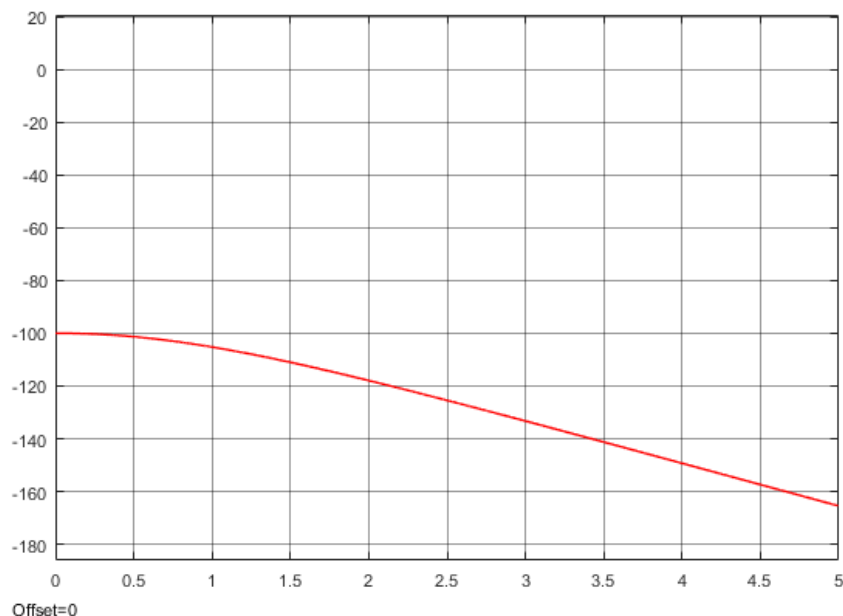


图. 斜率项对高度响应的影响





## 2. 基础实验

---

### □ 注意事项

在高度变化时，要重新调整油门使其悬停再观察其俯仰响应。



## 3. 分析实验

### □ 实验目标

计算悬停时如下动态系统的平衡点

$$\begin{cases} {}^e \dot{\mathbf{p}} = {}^e \mathbf{v} \\ {}^e \dot{\mathbf{v}} = g\mathbf{e}_3 - \frac{f}{m} \mathbf{R}\mathbf{e}_3 \\ \dot{\Theta} = \mathbf{W} \cdot {}^b \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{J} \cdot {}^b \dot{\boldsymbol{\omega}} = -{}^b \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot {}^b \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{G}_a + \boldsymbol{\tau} \end{cases}$$

并写出平衡点的线性化模型，具体参数见“e2/e2.1/Init.m”，并对分析基础实验结论的合理性。



## 3. 分析实验

### □ 分析步骤

#### (1) 扰动变量定义

对于本实验四旋翼系统，当给定油门时，所

有螺旋桨 $i$ 的期望转速为 $\varpi_i^* = \varpi^*$ ，期望的油门指令为 $\sigma_i^* = \sigma^*$ ，期望的反扭力矩为 $M_i^* = M^*$ ， $i=1,2,3,4$ 。

这时 $\Theta, \omega$ 期望为零。我们进一步研究一下，在该平衡点下的线性化控制模型。

基于平衡态，我们进一步可以得到平衡状态的扰动

$$\Theta = \mathbf{0} + \Delta\Theta$$

$$\omega = \mathbf{0} + \Delta\omega$$

$$\varpi_i = \varpi^* + \Delta\varpi_i$$

$$\sigma_i = \sigma^* + \Delta\sigma_i$$

$$M_i = M^* + \Delta M_i$$

$$T_i = T^* + \Delta T_i$$

其中 $\Delta\Theta, \Delta\omega$ 分别表示欧拉角和机体转速的变化；

$\Delta\varpi_i, \Delta\sigma_i, \Delta M_i, \Delta T_i$  分别表示转速，油门指令，反扭力矩和拉力的变化。



## 3. 分析实验

### □ 分析步骤

#### (2) 计算悬停的平衡点

在悬停的平衡点处，总拉力等于重力，各电机转速相等，那么由式 (6.16) 可知

$$\omega^* = \sqrt{\frac{mg}{4c_T}} = \sqrt{\frac{3 \times 9.8}{4 \times 2.423 \times 10^{-5}}} \approx 550.77 \text{RPM}$$

进一步由由式 (6.26) 得

$$\sigma^* = \frac{\omega - \omega_b}{C_R} = \frac{550.77 - 127.34}{640.21} \approx 0.661$$

故悬停时，各电机油门指令应为0.661。



## 3. 分析实验

### □ 分析步骤

#### (3) 拉力和力矩摄动模型

根据“动力单元模型”，我们有

$$\Delta \varpi_i = \frac{1}{T_m s + 1} C_R \Delta \sigma_i$$

根据牛顿第三定律，反扭力矩的大小与电机作用在螺旋桨*i*上的力矩大小相同，为

$$M_i = c_M \varpi_i^2 + J_{RP} \dot{\varpi}_i$$

其中  $M_i$  表示螺旋桨*i*在机身上产生的反扭力矩大小。反扭矩的摄动可以写为

$$\Delta M_i = 2c_M \varpi^* + J_{RP} \Delta \dot{\varpi}_i$$

进一步

$$\Delta M_i = \frac{2c_M \varpi^* + J_{RP} s}{T_m s + 1} C_R \Delta \sigma_i$$

拉力和力矩摄动模型进一步可以写为

$$\Delta f = 2c_T \varpi^* (\Delta \varpi_1 + \Delta \varpi_2 + \Delta \varpi_3 + \Delta \varpi_4)$$

$$\Delta \tau_x = 2dc_T \varpi^* (-\Delta \varpi_2 + \Delta \varpi_4)$$

$$\Delta \tau_y = 2dc_T \varpi^* (\Delta \varpi_1 - \Delta \varpi_3)$$

$$\Delta \tau_z = \Delta M_1 - \Delta M_2 + \Delta M_3 - \Delta M_4$$



## 3. 分析实验

### □ 分析步骤

#### (4) 位置动力学摄动模型

考虑平衡点附近俯仰角和滚转角都非常小

$$\sin \varphi \approx \varphi, \cos \varphi \approx 1, \sin \theta \approx \theta, \cos \theta \approx 1$$

总拉力约等于重力

$$f \approx mg$$

则

$$\mathbf{R}_b^e \cdot \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} \theta \cos \psi + \varphi \sin \psi \\ \theta \sin \psi - \varphi \cos \psi \\ 1 \end{bmatrix}$$

位置动力学摄动模型变为

$$\Delta \dot{\mathbf{p}} = \Delta \mathbf{v}$$

$$\Delta \dot{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} -g \Delta \theta \cos \psi - g \Delta \phi \sin \psi \\ -g \Delta \theta \sin \psi + g \Delta \phi \cos \psi \\ -\frac{\Delta f}{m} \end{bmatrix}$$

其中  $\Delta \mathbf{p}, \Delta \mathbf{v}$  表示相对某平衡位置速度的变化。



## 3. 分析实验

### □ 分析步骤

#### (5) 位姿动力学扰动模型

在欧拉角模型中，令

$$\mathbf{W} \approx \mathbf{I}$$

并忽略

$$-{}^b\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}^b \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{G}_a$$

则欧拉角模型变为

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\boldsymbol{\Theta}} &= \Delta \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{J} \Delta \dot{\boldsymbol{\omega}} &= \Delta \boldsymbol{\tau} \end{aligned} \quad \text{其中: } \Delta \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \Delta \tau_x \\ \Delta \tau_y \\ \Delta \tau_z \end{bmatrix}$$

故欧拉角的变化量的传递函数为：

$$\Delta \varphi(s) = \frac{2dc_T}{J_x} \frac{1}{s^2} \frac{1}{T_m s + 1} C_R \varpi^* (-\Delta \sigma_2 + \Delta \sigma_4)$$

$$\Delta \theta(s) = \frac{2dc_T}{J_y} \frac{1}{s^2} \frac{1}{T_m s + 1} C_R \varpi^* (\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3)$$

$$\Delta \psi(s) = \frac{2dc_M}{J_z} \frac{1}{s^2} \frac{J_{RP} s}{T_m s + 1} C_R \varpi^* (\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_2 + \Delta \sigma_3 - \Delta \sigma_4)$$





## 3. 分析实验

### □ 分析步骤

#### (5) 位姿动力学扰动模型

若平衡点处的偏航角

$$\psi = \psi^*$$

则位置动力学扰动模型的传递函数为：

$$\Delta p_x(s) = -2gdc_T \frac{1}{s^4} \frac{1}{T_m s + 1} C_R \varpi^* \left( \frac{\cos \psi^*}{J_y} (\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3) + \frac{\sin \psi^*}{J_x} (-\Delta \sigma_2 + \Delta \sigma_4) \right)$$

$$\Delta p_y(s) = 2gdc_T \frac{1}{s^4} \frac{1}{T_m s + 1} C_R \varpi^* \left( -\frac{\sin \psi^*}{J_y} (\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3) + \frac{\cos \psi^*}{J_x} (-\Delta \sigma_2 + \Delta \sigma_4) \right)$$

$$\Delta p_z(s) = \frac{2c_T C_R \varpi^*}{m} \frac{1}{s^2} \frac{1}{T_m s + 1} (\Delta \sigma_1 + \Delta \sigma_2 + \Delta \sigma_3 + \Delta \sigma_4)$$



## 3. 分析实验

### □ 分析步骤

#### (6) 分析：俯仰角

俯仰角的传递函数如下

$$\Delta\theta(s) = \frac{2dc_T}{J_y} \frac{1}{s^2} \frac{1}{T_m s + 1} C_R \varpi^* (\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)$$

可知当增大机身半径  $d$ 、螺旋桨推力系数  $c_T$ 、油门到电机稳态转速参数  $C_R$  时，控制到俯仰角姿态增益增大，响应变快。增大质量时， $\varpi^*$  增大，俯仰角姿态响应变快。增大电机响应时间常数  $T_m$ ，转动惯量矩阵  $J_y$  时，俯仰角姿态响应变慢，增大螺旋桨力矩系数  $c_M$  时，俯仰角姿态响应不变。这与基础实验结论相同。



## 3. 分析实验

### □ 分析步骤

#### (6) 分析：高度

高度的传递函数如下

$$\Delta p_z(s) = \frac{2c_T C_R \varpi^*}{m} \frac{1}{s^2} \frac{1}{T_m s + 1} (\Delta \sigma_1 + \Delta \sigma_2 + \Delta \sigma_3 + \Delta \sigma_4)$$

可知当增大螺旋桨推力系数  $c_T$ 、油门到电机稳态转速参数  $C_R$ ，高度变高。增大质量  $m$ ，高度变低。增大机身半径  $d$ 、转动惯量矩阵  $J_y$ 、响应时间常数  $T_m$ 、螺旋桨力矩系数  $C_M$  时，高度不变。这与基础实验结论相同。



## 4. 设计实验

---

### □ 实验目标

#### ■ 已知

“多旋翼飞行器动力系统设计实验” - “设计实验” 中设计出的多旋翼飞行器，以及<http://flyeval.com/paper> 提供的模型参数

#### ■ 目标

(1) 在Matlab上建立完整的多旋翼无人机模型。在姿态模型方面，可以采用四元数模型、旋转矩阵模型，或者欧拉角模型。

(2) 在FlightGear中添加四旋翼模型



# 4. 设计实验

## 目标1实验步骤

### (1) 动力单元模型设计

令状态变量  $x = T_M \omega$ ，输入

$u = \omega_{SS}$  输出  $y = \omega$ ，则有

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{T_m} x + u \\ y = \frac{1}{T_m} x \end{cases}$$

由式 (6.28) 可以建立如下框图 (e2/e2.2/dynamic.slx/  
动力单元模型)

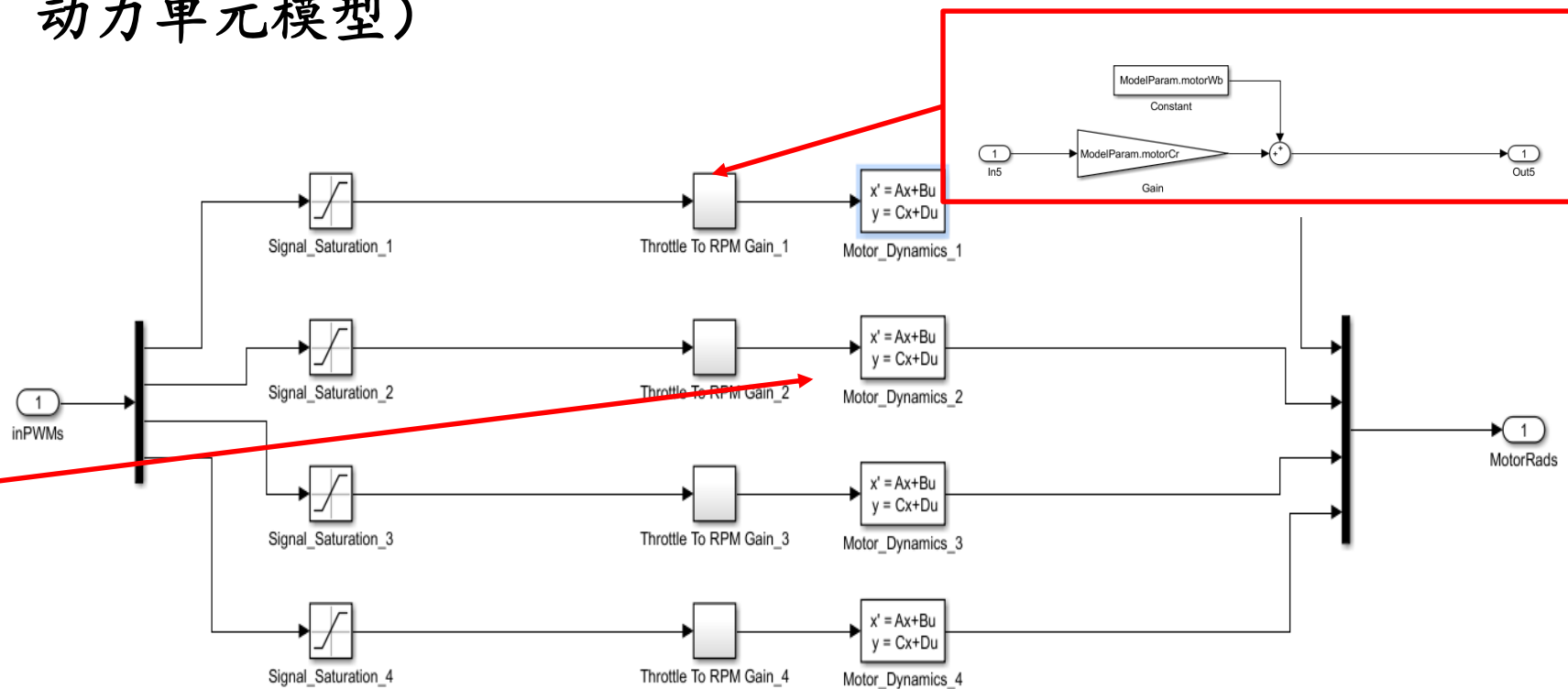


图. 动力单元模型



## 4. 设计实验

### □ 目标1实验步骤

#### (2) 控制效率模型

由式 (6.23) - (6.24) 所示的“控制效率模型”搭建如右所示框图 ( e2/e2.2/dynamic.slx /控制效率模型)。

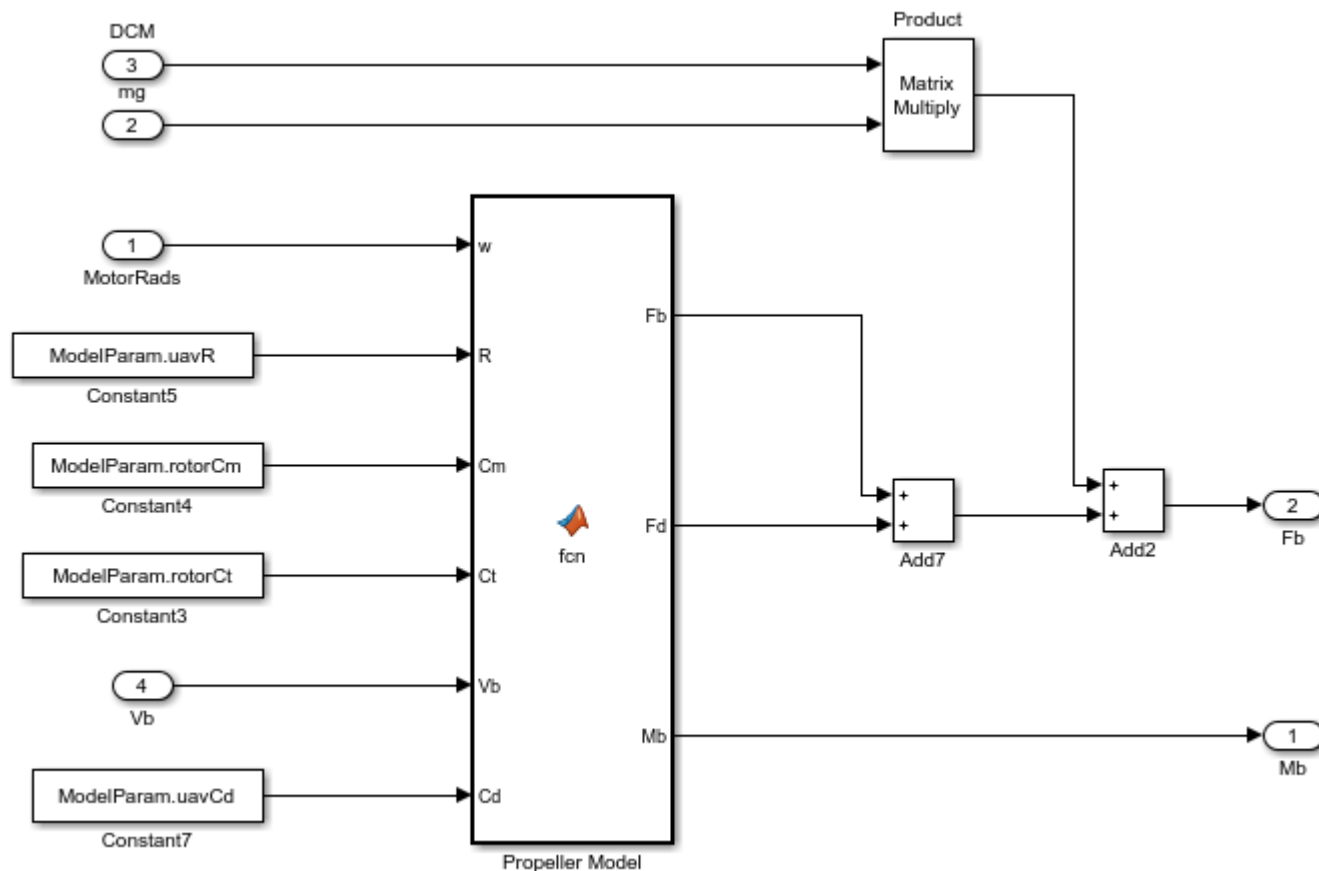


图. 控制效率模型



## 4. 设计实验

### □ 目标1实验步骤

#### (3) 姿态动力学模型

根据式 (6.15) 搭建姿态动力学模型 ( e2/e2.2/dynamic.slx / 刚体动力学模型), 如右图所示。

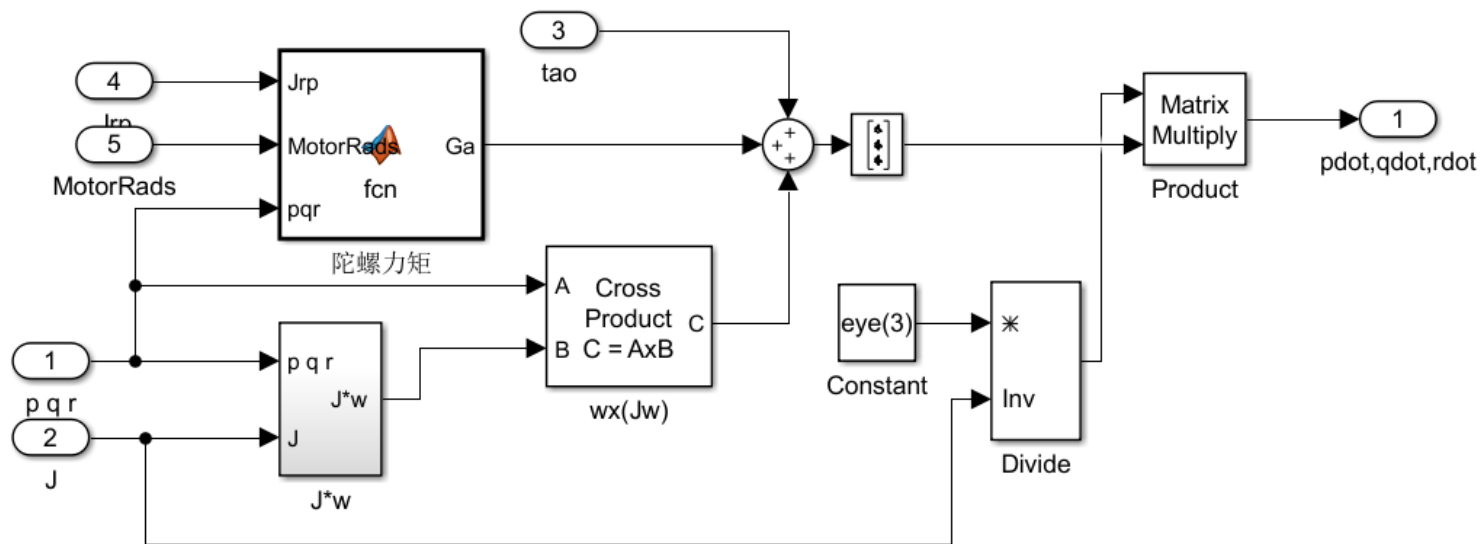


图. 刚体动力学模型



# 4. 设计实验

## 目标1实验步骤

### (4) 刚体动力学模型

根据式 (6.15) 搭建刚体动力学模型 ( e2/e2.2/dynamic.slx / 刚体运动学模型), 如右图所示。

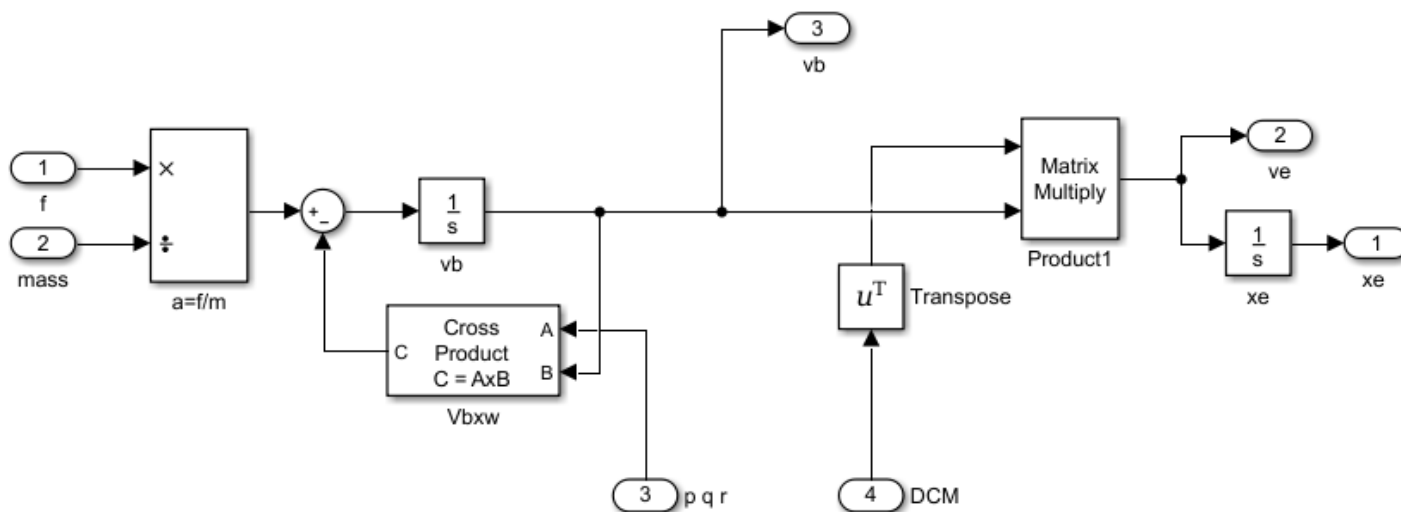


图. 刚体运动学模型

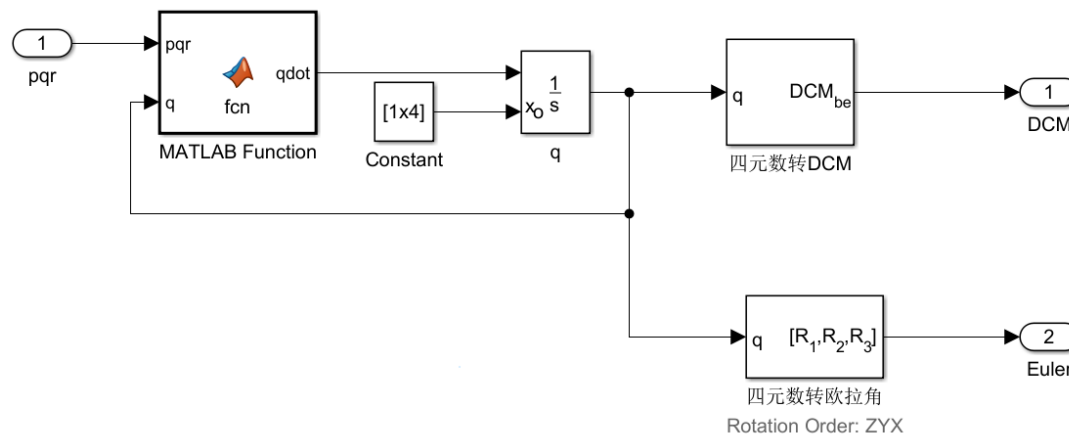


图. 机体角速度得四元数以及四元数转欧拉角和旋转矩阵







## 4. 设计实验

### □ 目标2实验步骤

■ 使用AC3D软件绘制四旋翼模型。绘制简单的示意模型，如下图所示。

■ 螺旋桨位置参数如下表所示。

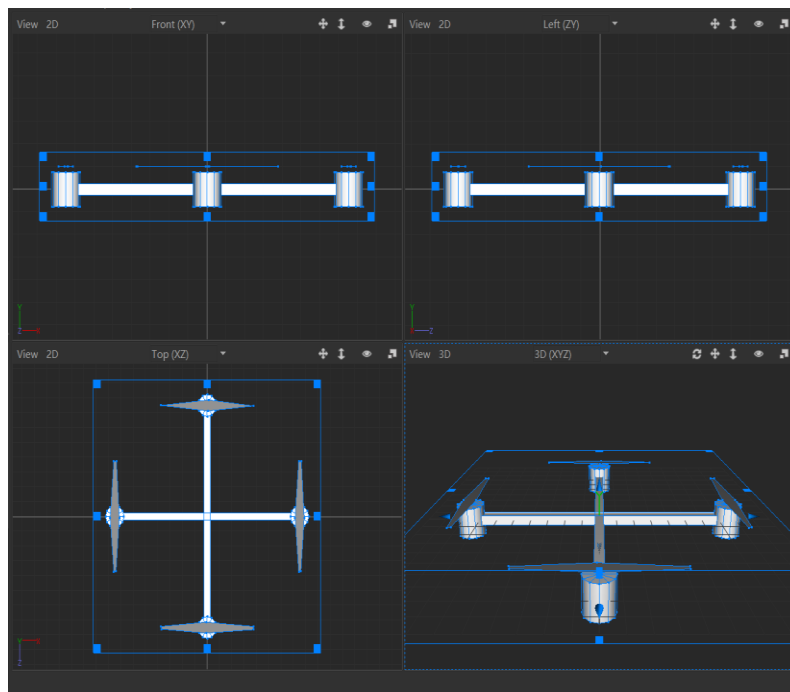


图. 四旋翼示意模型

表. 螺旋桨位置参数

螺旋桨名称	坐标		
	X	Y	Z
propeller1	0	7.5	1
propeller2	7.5	0	1
propeller3	0	-7.5	1
propeller4	-7.5	0	1



## 4. 设计实验

### □ 目标2实验步骤

#### (2) 编写配置文件。

编写myownUAV-set.xml配置文件和myownUAV.xml文件

myownUAV.xml

```
1 <PropertyList>
2   <path>myownUAV.ac</path>
3 <animation>
4   <type>spin</type>
5   <object-name>propeller1</object-name>
6   <property>/engines/engine[0]/rpm</property>
7   <factor>-1</factor>
8 <center>
9   <x-m>0</x-m>
10  <y-m>7.5</y-m>
11  <z-m>1</z-m>
12 </center>
13 <axis>
14   <x>0.0</x>
15   <y>0.0</y>
16   <z>1.0</z>
17 </axis>
18 </animation>
19
20 ...
21
22 </PropertyList>
23
```

myownUAV-set.xml

```
1 <PropertyList>
2   <sim>
3     <description>myownUAV</description>
4     <flight-model>network</flight-model>
5
6     <model>
7       <path>Aircraft/myownUAV/Models/myownUAV.xml</path>
8     </model>
9
10    <chase-distance-m type="double"> -40</chase-distance-m>
11    <current-view>
12      <view-number type="int">2</view-number>
13    </current-view>
14  </sim>
15 </PropertyList>
16
```





## 4. 设计实验

### □ 目标2实验步骤

(4) 使用flightgear进行可视化仿真。运行前一步生成的.bat文件，然后对Matlab进行仿真即可实现Matlab动力学模型驱动FlightGear 3D模型飞行，如右图所示。

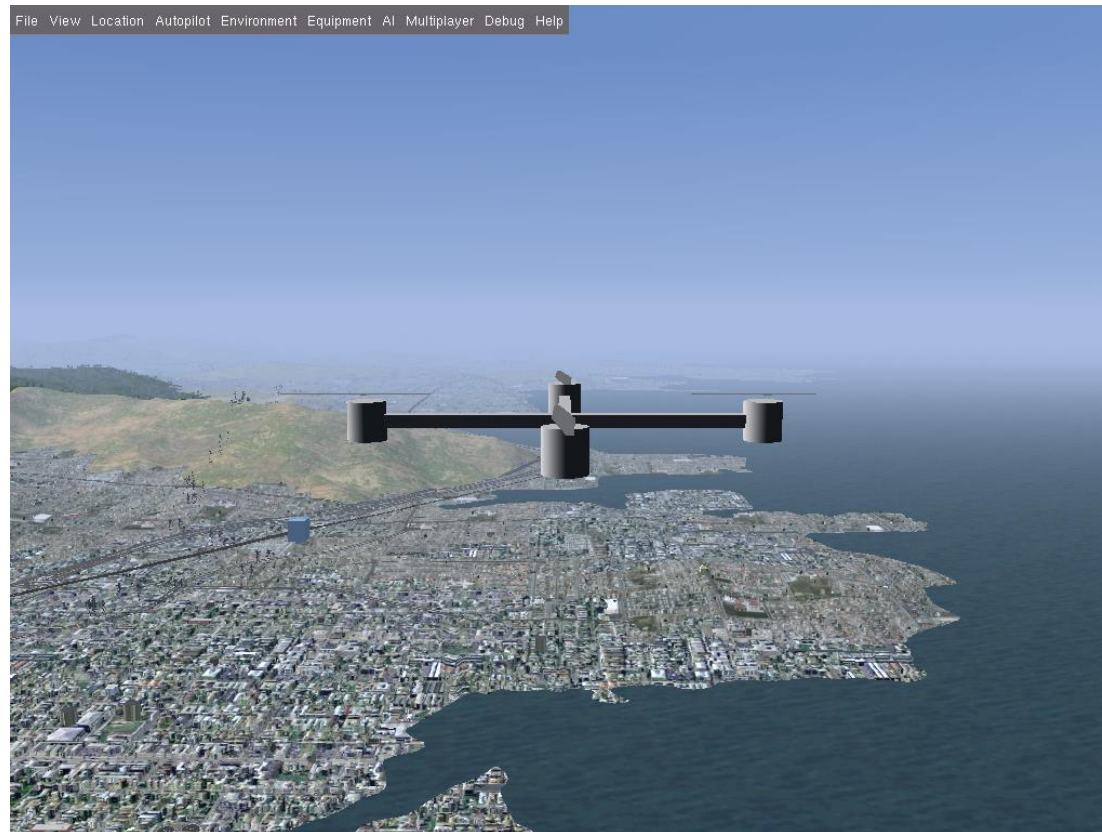


图. FlightGear



## 5. 小结

---

(1) 多旋翼的刚体模型可分为刚体运动学模型、刚体动力学模型、控制效率模型和动力单元模型。

(2) 运动学与质量和受力无关，输入为速度、角速度，输出为位置和姿态。动力学建模既涉及力又涉及运动，使用牛顿第二定律及欧拉方程，并考虑到机体坐标系和地球坐标系间的旋转矩阵。

(3) 在多旋翼悬停的平衡点附近时，俯仰角和滚转角都很小，进行线性化处理，可大大简化模型中的方程。本实验分析了不同参数对俯仰角和高度的影响，结论与基础实验一致。





# 资源

---

(1) 关于**线上线下课程**相关信息:

<http://rfly.buaa.edu.cn/course.html>

(2) 课程讨论区

<https://flyeval.com/forum>

(3) 关注可靠飞行控制研究组公众号 **buaarfly**





---

# 谢谢!