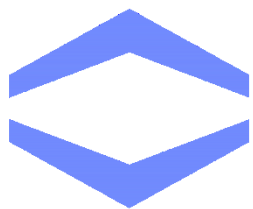


# 《多旋翼飞行器设计与控制》

## PPT合集



北航可靠飞行控制研究组

BUAA Reliable Flight Control Group

<http://rfly.buaa.edu.cn>



---

# 多旋翼飞行器设计与控制

## 第一讲 绪论

全权 副教授

qq\_buaa@buaa.edu.cn

自动化科学与电气工程学院

北京航空航天大学



北航可靠飞行控制研究组  
BUAA Reliable Flight Control Group



# 东方智慧



## 竹蜻蜓



# 核心问题

---

人们为什么最终选择了多旋翼飞行器？





# 大纲

---

1. 基本概念
2. 多旋翼操控和评价
3. 多旋翼技术发展历史
4. 本门课的安排



# 1.基本概念

## □常见飞行器分类



(a)固定翼



(b)直升机



(c)多旋翼

图1.1: 常见飞行器

### (1) 固定翼

优点：续航时间最长、飞行效率最高、载荷最大

缺点：必须要助跑，降落的时候必须要滑行



# 1.基本概念

## □常见飞行器分类



(a)固定翼



(b)直升机



(c)多旋翼

图1.1: 常见飞行器

## (2) 直升机

优点：垂直起降

缺点：续航时间没有优势，机械结构复杂、维护成本高



# 1.基本概念

## □常见飞行器分类



(a)固定翼



(b)直升机



(c)多旋翼

图1.1: 常见飞行器

### (3) 多旋翼

优点：垂直起降、机械结构简单、易维护

缺点：载重和续航时间都更差



# 1.基本概念

## □ 常见飞行器分类

### (3) 多旋翼

一般受力特点:

1. 合成拉力垂直桨盘平面
2. 拉力、重力

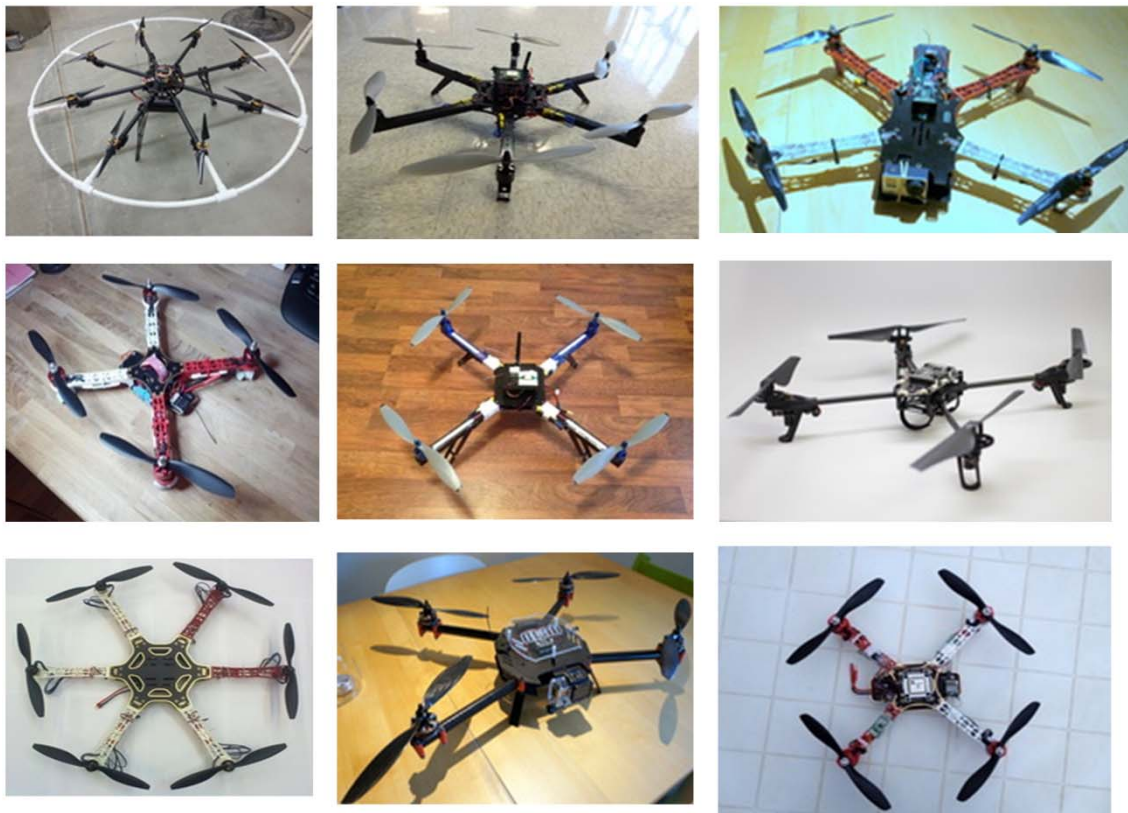


图1.2: 各种多旋翼



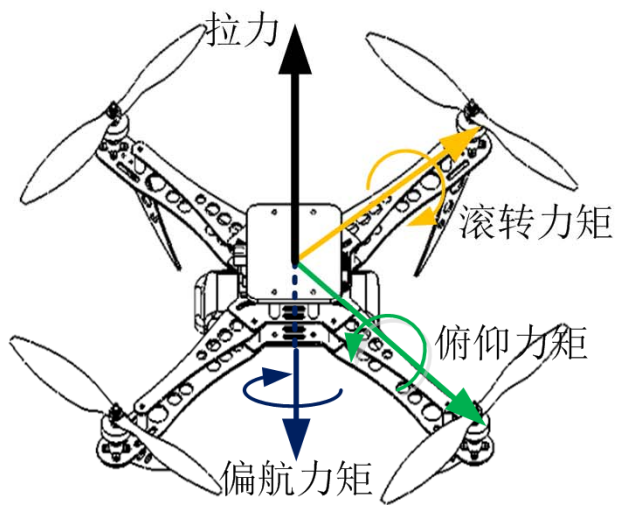
# 1.基本概念

## □ 常见飞行器分类

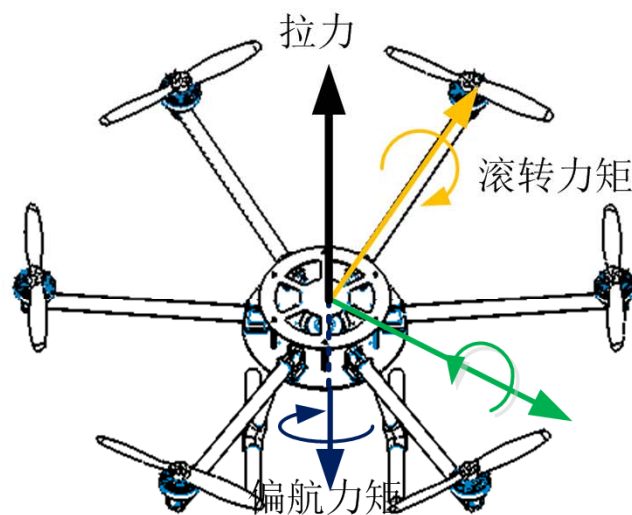
### (3) 多旋翼

### 四旋翼和六旋翼有何分别？

- 无本质区别，3个力矩+拉力
- 六旋翼控制分配更灵活



(a) 四旋翼



(b) 六旋翼

图1.3: 四旋翼和六旋翼的拉力与力矩





# 1.基本概念

## □ 常见飞行器分类

### (4) 复合飞行器



(a) 倾转三旋翼



(b) 复合式直升机

图1.4: 复合式直升机从悬停模态转换到前飞模态示意图



# 1.基本概念

## □常见飞行器分类

### (4) 复合飞行器[3]

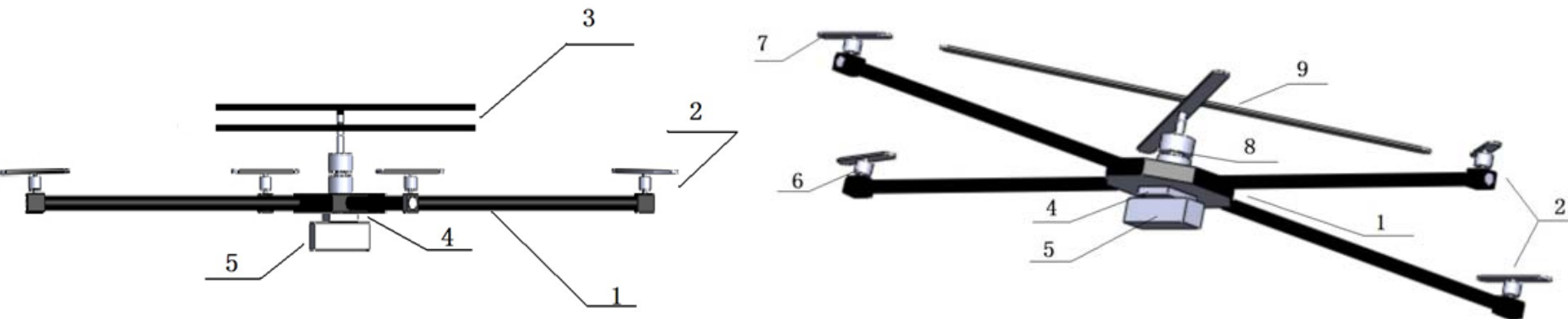


图1.5: 复合多旋翼

这里，中间的共轴双桨转速动态较慢，提供主要升力，而外围的四旋翼通过快速改变螺旋桨的速度改变升力，从而改变姿态。





# 1.基本概念

## □ 无人驾驶飞机和航模[4-6]

(1) 无人驾驶飞机 (Unmanned Aerial Vehicle) : 简称“无人机”, 英文缩写为“UAV”, 是利用**无线电遥控设备**和**自备的程序控制**装置操纵的不载人飞机。微小型无人机英文 “Drone”

(2) 航模 (Model Aircraft) : 在国际航联制定的竞赛规则里明确规定“航空模型是一种重于空气的, 有尺寸限制的, 带有或不带有发动机的, **可遥控**的不能载人的航空器。”



# 1.基本概念

## □ 无人驾驶飞机和航模

	无人机	航模
操控方式	可自主驾驶	需遥控操纵
用途	军事用途/民用特种用途	接近于玩具
组成	复杂，需地面站	简单，无需地面站

**半自主控制方式:** 多旋翼属于航模范畴

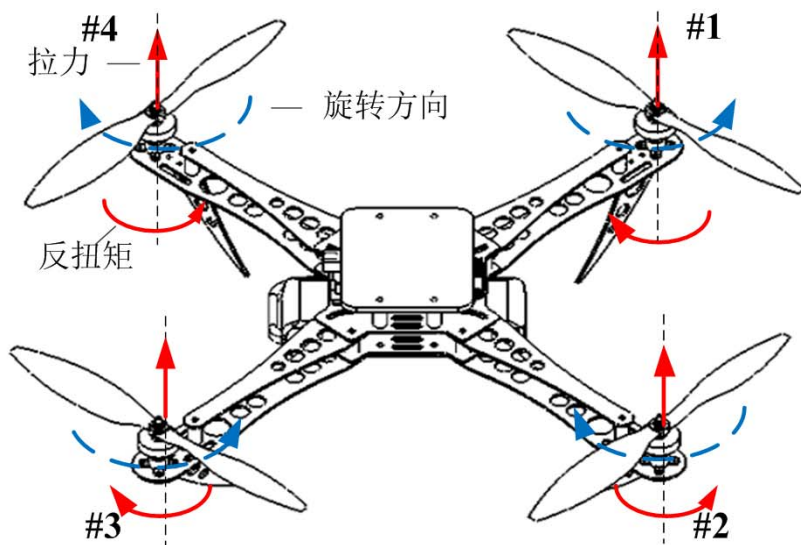
**全自主控制方式:** 多旋翼属于无人机范畴



## 2.多旋翼操控和评价

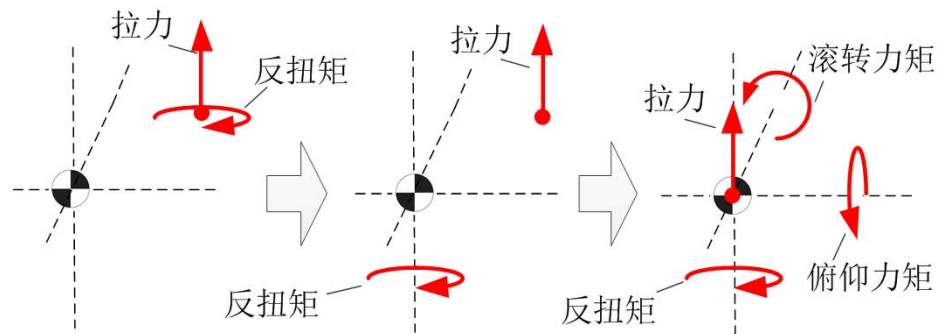
### □ 四旋翼的操控

#### (1) 悬停



(a) 悬停飞行的四旋翼受力

- 当飞行器悬停时，
- 拉力抵消重力
- 四个螺旋桨拉力产生的滚转、俯仰力矩为零
- 偏航力矩为零，四个螺旋桨反扭矩效应均被抵消



(b) 1号螺旋桨的力和力矩作用到四旋翼中心的过程示意图

图1.6: 四旋翼悬停



## 2.多旋翼操控和评价

多数直升机即单旋翼直升机都有一个垂直尾桨来抵消反作用力矩，或者采用共轴双桨，上下两个螺旋桨转动方向相反，从而抵消之间的反扭矩的作用。

### □ 四旋翼的操控

#### (1) 悬停

直升机如何抵消反扭矩？



(a) 直10

尾桨



(b) 北航“海鸥”

共轴双桨



## 2.多旋翼操控和评价

同时同量地增加四个螺旋桨的转速，则螺旋桨产生的总拉力增大，力矩和依然为零。拉力大于重力时，四旋翼就会上升

### □ 四旋翼的操控

#### (2) 升降运动

上升运动螺旋桨变化(+表示增加转速)

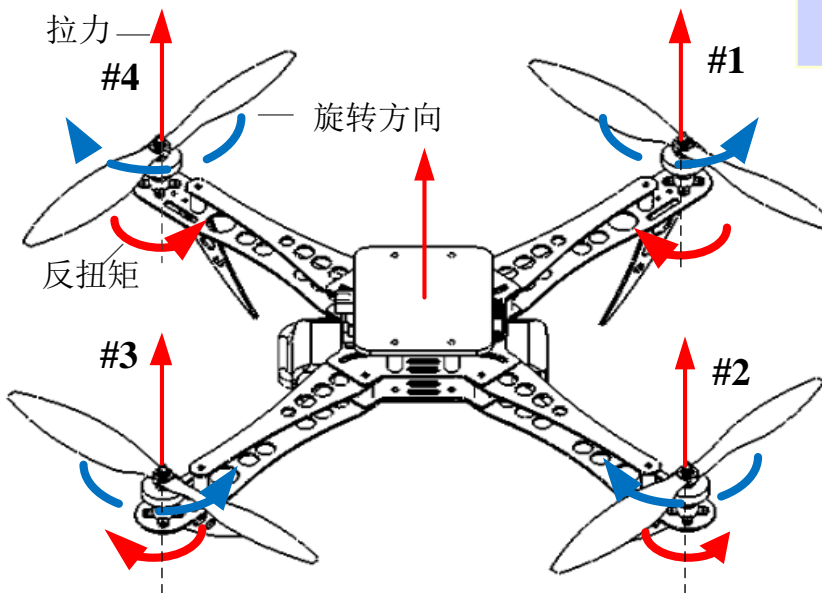


图1.7: 四旋翼上飞

	#1	#2	#3	#4
改变拉力	+1	+1	+1	+1

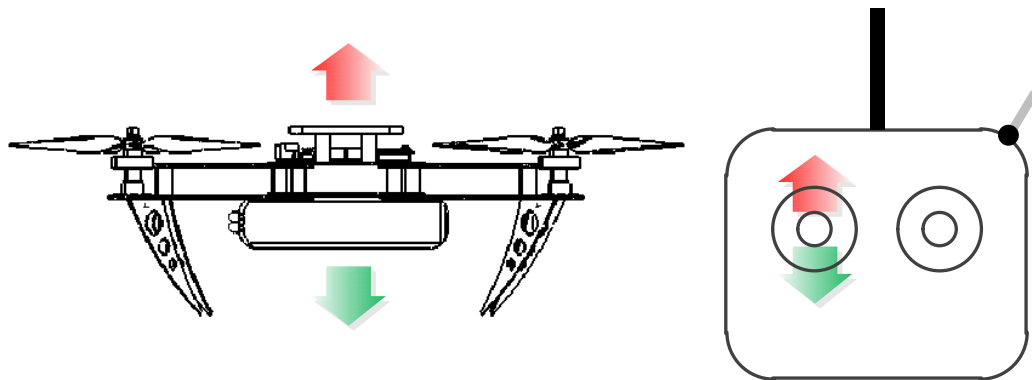


图1.8: 上下运动时遥控器的操作方式





## 2.多旋翼操控和评价

同时同量减少螺旋桨#1、#4的转速，同时同量增加螺旋桨#2、#3的转速，会引起四旋翼向前俯仰。然后，拉力会产生向前的分量。

### 四旋翼的操控

#### (3) 前后运动

向前运动螺旋桨变化(-表示降低转速)

	#1	#2	#3	#4
改变俯仰	-1	+1	+1	-1
增加拉力	+0.2	+0.2	+0.2	+0.2
合成	-0.8	+1.2	+1.2	-0.8

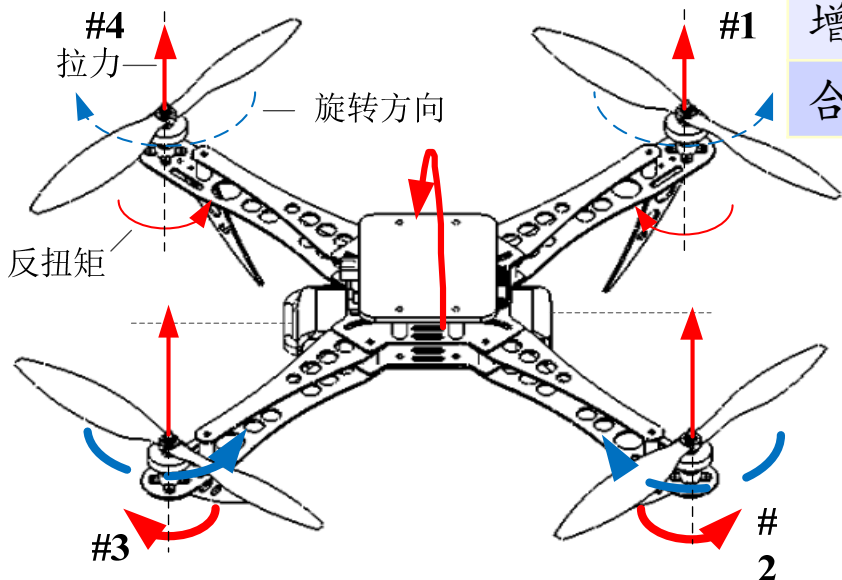


图1.9: 四旋翼前飞

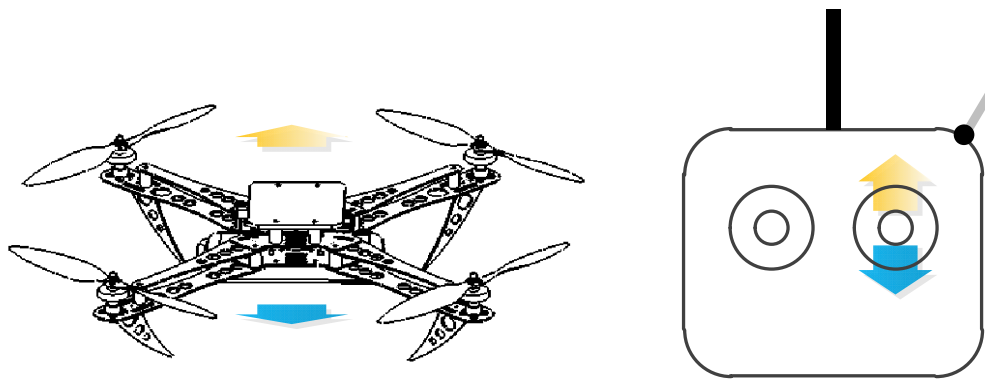


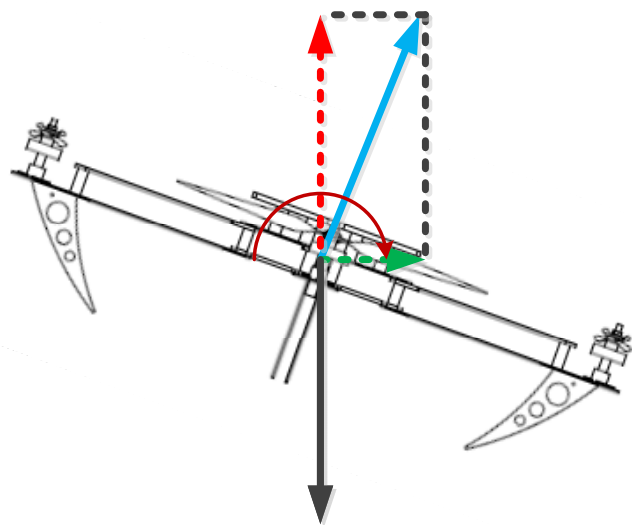
图1.10: 前后运动时遥控器的操作方式



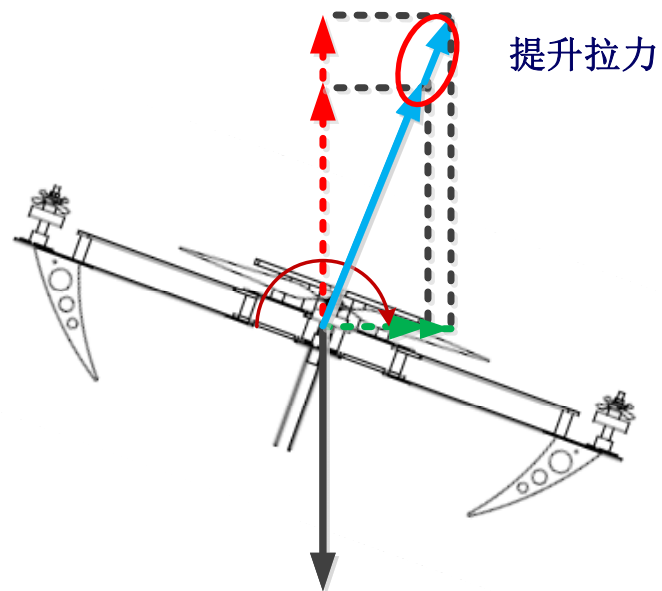
## 2.多旋翼操控和评价

### □ 四旋翼的操控

#### (3) 前后运动



(a) 改变俯仰



(b) 增加拉力

可以看到，改变俯仰后，拉力的垂直分量会减小，将不再等于多旋翼的重力，因此需要增加拉力。

倾斜后拉力在重力方向的分量抵消不了重力，因此需要再提升拉力



## 2.多旋翼操控和识

，同量减小螺旋桨#1、#2的转速，同时同量增加螺旋桨#3、#4的转速，这将产生不平衡力矩使机身向右滚转倾斜。然后，拉力会产生向右的分量。

### □ 四旋翼的操控

#### (4) 左右运动

向右运动螺旋桨变化

	#1	#2	#3	#4
改变滚转	-1	-1	+1	+1
增加拉力	+0.2	+0.2	+0.2	+0.2
合成	-0.8	-0.8	+1.2	+1.2

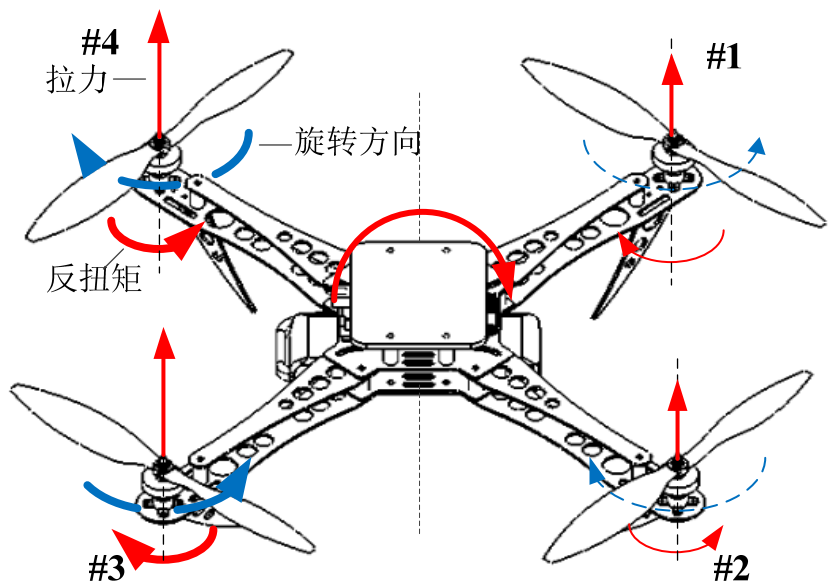


图1.11: 四旋翼右飞

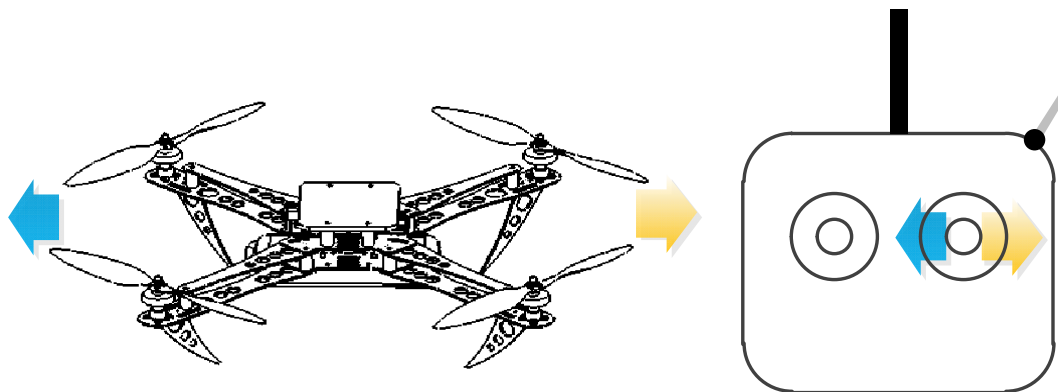


图1.12: 左右运动时遥控器的操作方式





## 2.多旋翼操控和评估

同量减小螺旋桨#2、#4的转速，同时同量增加螺旋桨#1、#3的转速，这将使前后飞行和左右飞行的力矩为零。但顺时针的偏航力矩增加了，飞机顺时针偏航。

### 四旋翼的操控

#### (5) 偏航运动

#### 顺时针偏航运动螺旋桨变化

	#1	#2	#3	#4
改变偏航	+1	-1	+1	-1

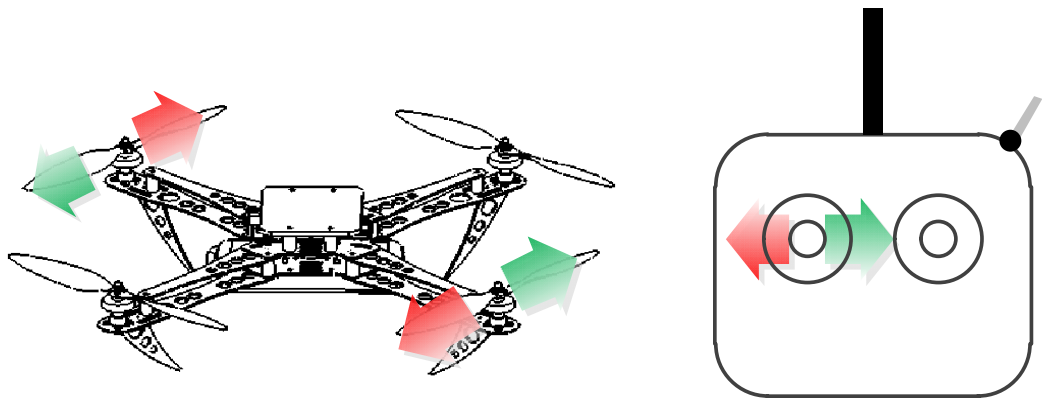
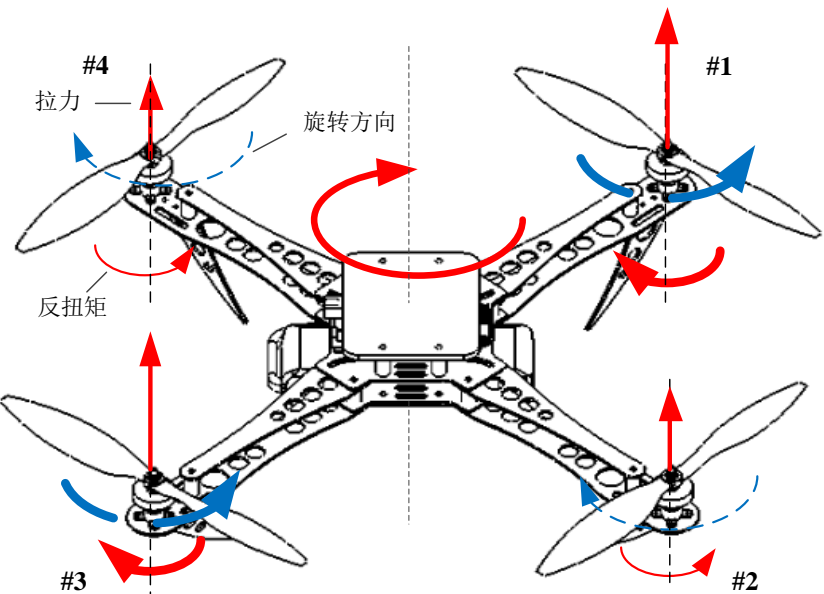


图1.13: 四旋翼顺时针偏航

图1.14: 偏航运动时遥控器的操作方式



## 2.多旋翼操控和评价

也有缺点：多旋翼能量转换效率最低，所以与固定翼飞行器和直升机相比，多旋翼在飞行时间和承载性上没有优势。

### □ 多旋翼的评价

#### (1) 对比

刚性  
体验

	固定翼	直升机	多旋翼
易用性	++	+	+++
可靠性	++	+	+++
维护性	++	+	+++
续航性	+++	++	+
承载性	++	+++	+

运动相互解耦

无机械磨损

结构简单、模块化

刚性体验让人们选择了多旋翼



## 2.多旋翼操控和评价

### □ 多旋翼的评价

(2) 局限性 (该方式不宜推广到大尺寸的多旋翼)

1) 桨叶尺寸越大, 越难迅速改变其角速度

$$M = \frac{1}{2\pi} C_M \rho \omega^2 (2r_p) \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} M \sim \omega^2 R^5 \\ J \sim R^5 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{M}{J} \sim \frac{\omega^2 R^5}{R^5} = \omega^2$$

桨尖速度常数假设  $\omega \sim 1/r_p \Rightarrow \omega \sim 1/R$

$$\alpha \sim \frac{1}{R^2}$$

在这个假设下, 我们最终得到, 桨叶的角加速度与多旋翼的特征长度平方的倒数成正比, 也就是多旋翼尺寸越大, 角加速度越小, 即机动性低。



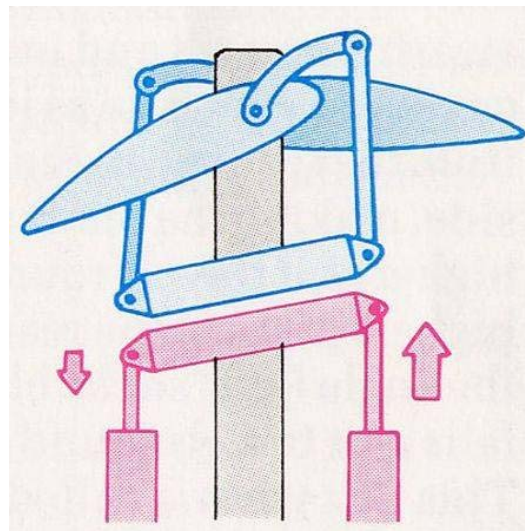
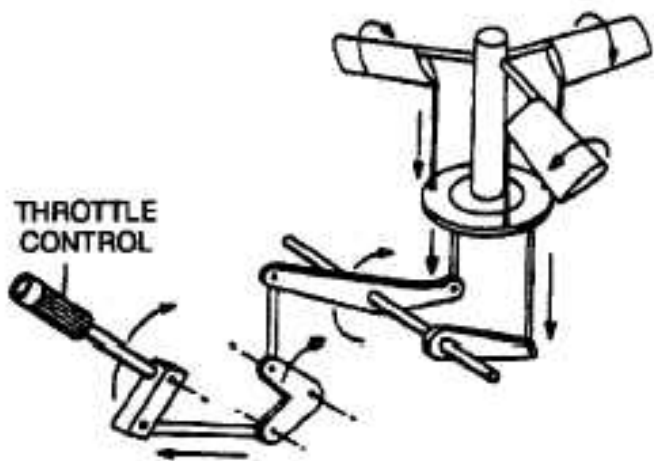
## 2.多旋翼操控和评价

### □ 多旋翼的评价

#### (2) 局限性

相比之下，直升机靠同时同量改变旋翼的攻角来增加或减少总拉力，从而实现爬升或下降。

#### 1) 桨叶尺寸越大，越难迅速改变其速度



来源<http://aviationmaintenance.tpub.com/>

来源<http://www.aerospaceweb.org/>

直升机通过变桨距控制

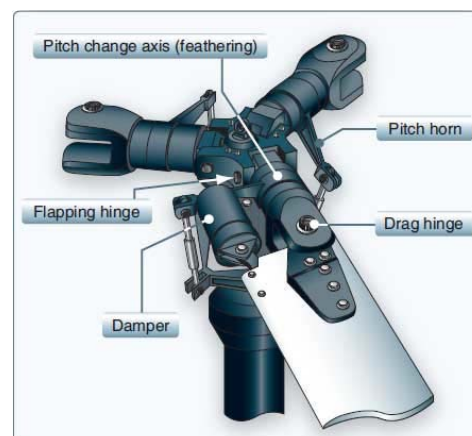
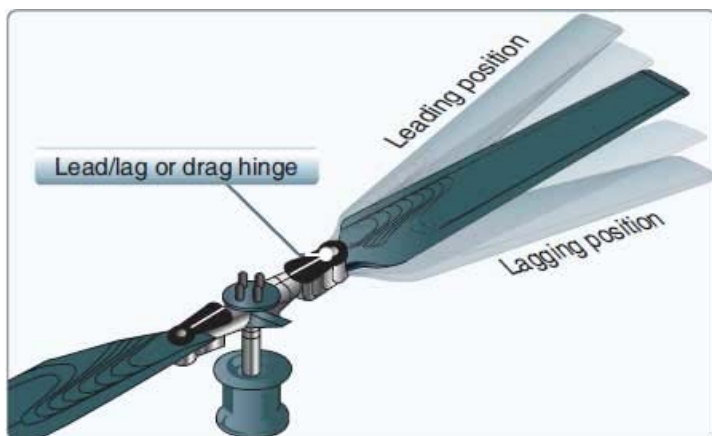


## 2.多旋翼操控和评价

### □ 多旋翼的评价

#### (2) 局限性

2) 在大载重下，桨叶上下挥舞会导致刚性大的桨很容易折断



来源<http://www.danubewings.com/fully-articulated-rotor-system/>

直升机通过增加铰链结构





## 2.多旋翼操控和评价

### □ 多旋翼的评价

#### (2) 局限性

总的来说，和相同尺寸的四旋翼相比，VC200在可靠性、维护性、续航性和承载性方面没有优势，它只是原尺寸飞机的一个折衷。

因此，多旋翼该方式不宜推广到大尺寸，改进方式如  
**Volocopter VC200**



(a) 正视图

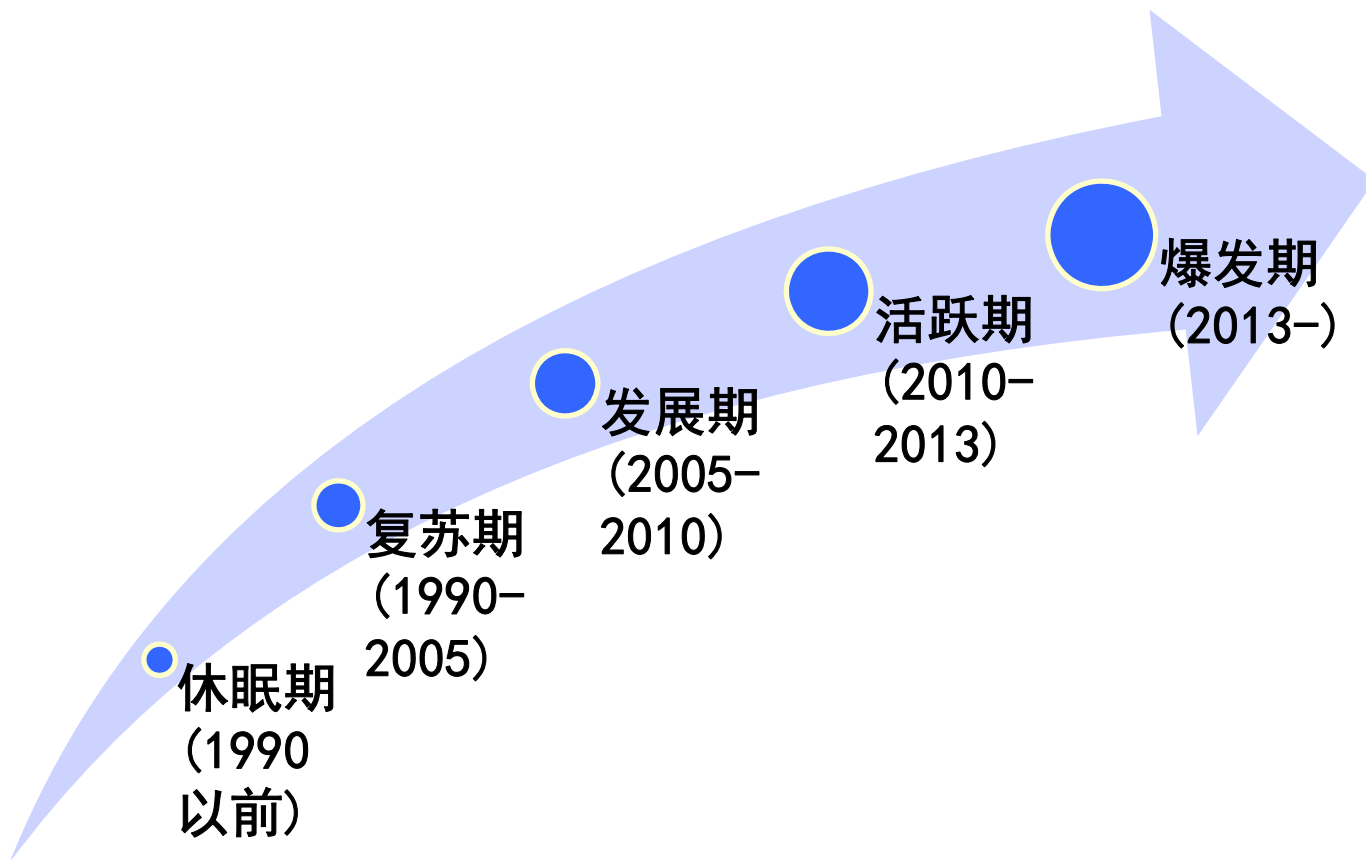


(b) 拆解图

图1.15: Volocopter VC200



# 3.多旋翼技术发展历史





### 3.多旋翼技术发展

#### □ 休眠期(1990以前)

早在1907年的法国，在查尔斯·里歇（Charles Richet）教授的指导下，布雷盖（Breguet）兄弟进行了他们的旋翼式直升机的飞行试验，这是记录的最早构型。因为设计不切实际，只飞了1.5m，随后落下。

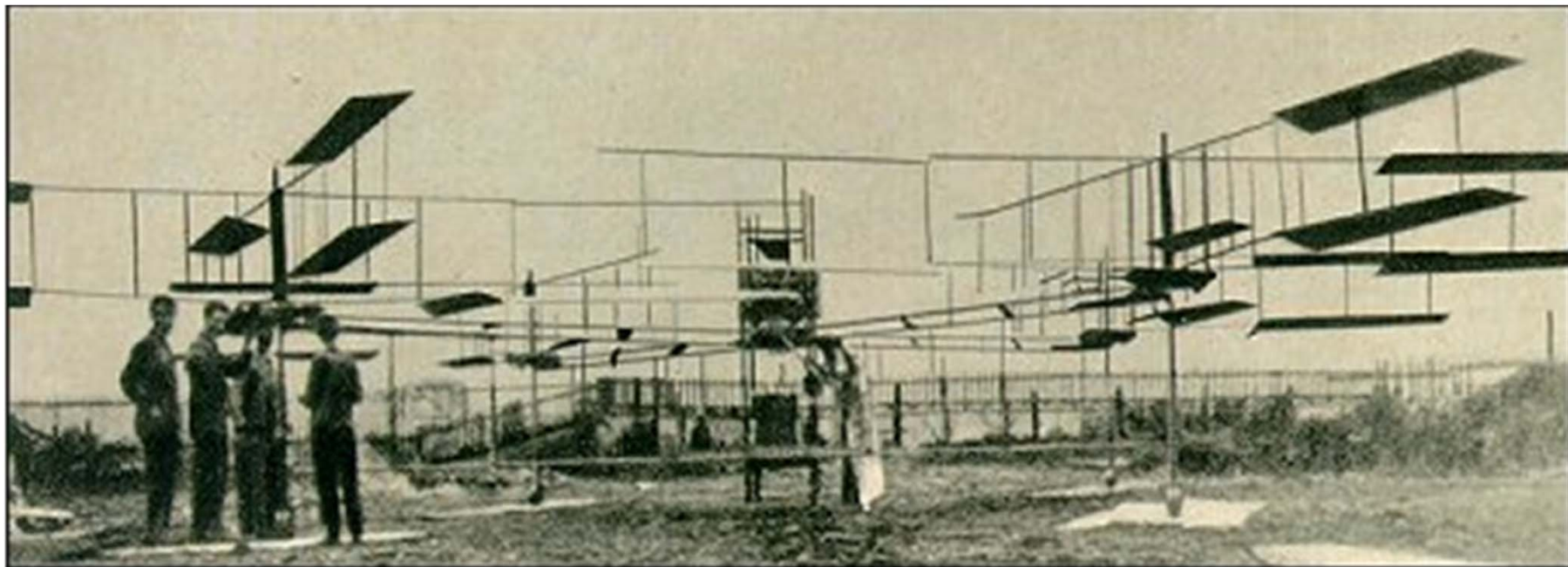


图1.16: Breguet-Richet Gyroplane No.1





### 3.多旋翼技术

艾蒂安·奥米西恩 (Etienne Oemichen) 于1920年开始设计多旋翼设计，第一次试飞失败；经过重新设计之后，于1923年实现了起飞并创造了当时直升机领域的世界纪录：该直升机首次实现了14分钟的飞行时间。

#### □ 休眠期(1990以前)

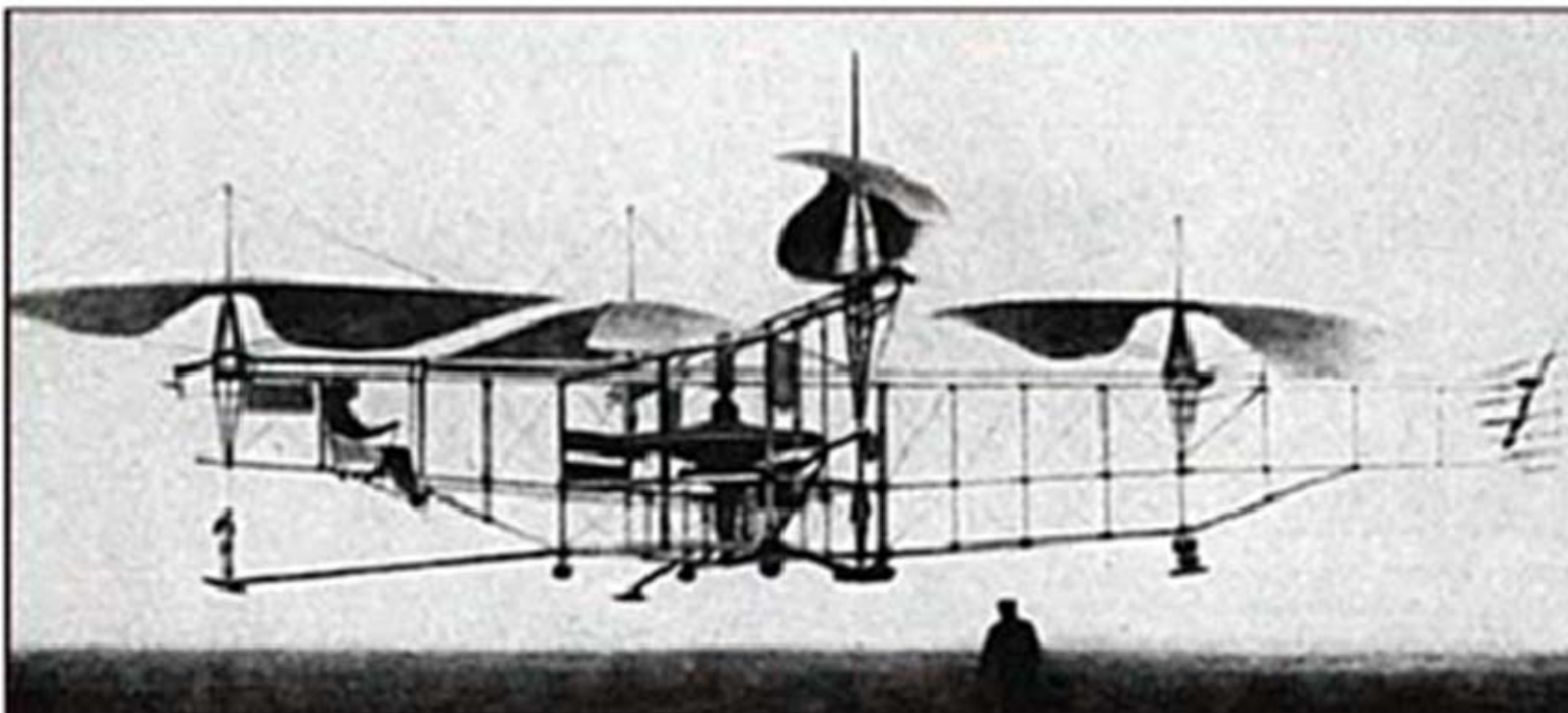


图1.17: Oemichen No.2



### 3.多旋翼技术

#### □ 休眠期(1990以前)

1921年 乔治·波札特 (George De Bothezat) 在美国俄亥俄州西南部城市代顿的美国空军部建造了另一架的大型四旋翼直升机，这架四旋翼飞机除了飞行员外还能承载3个人，原本期望的飞行高度是100米但是最终只飞到5米的高度。主要原因是发动机性能不行。

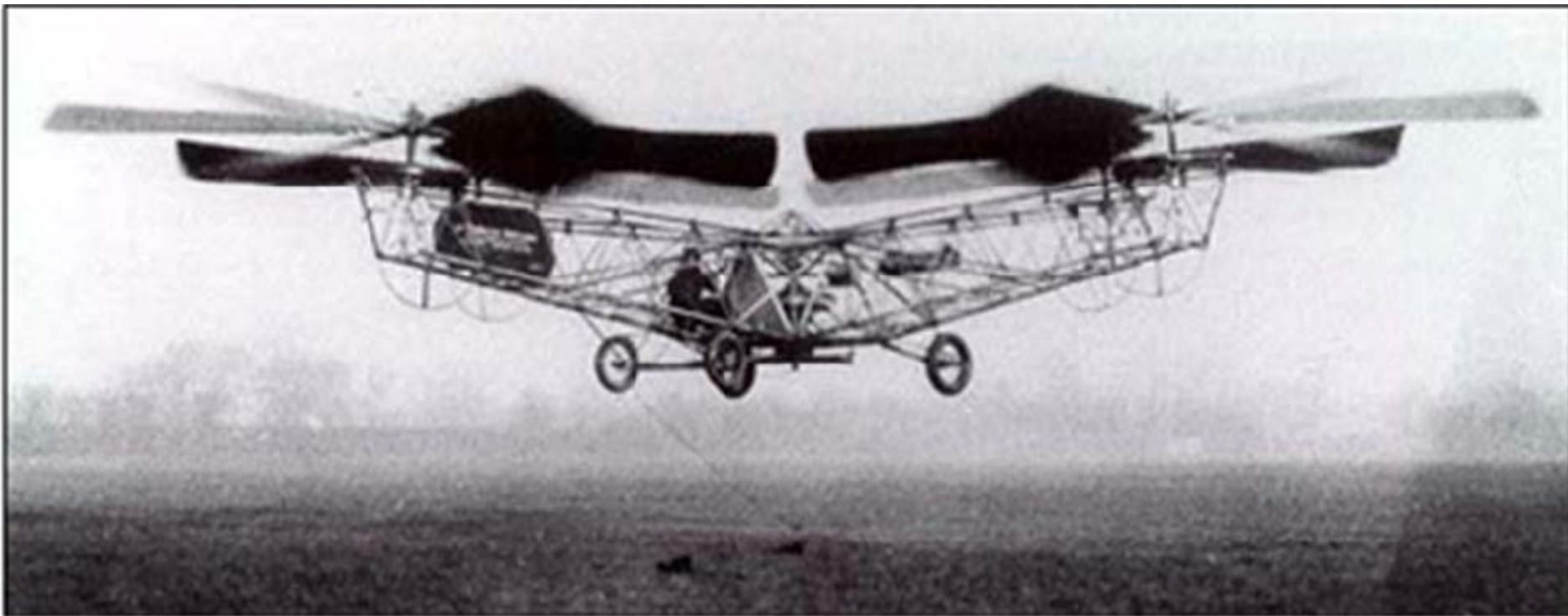


图1.17: De Bothezat 直升机



### 3.多旋翼技术发展

#### □ 休眠期(1990以前)

1956年，马克·阿德曼·卡普兰（Marc Adman Kaplan）设计的第一架真正的四旋翼飞行器Convertawings Model “A”。试飞取得巨大成功，这架飞机重达1吨，依靠两个90马力的发动机实现悬停和机动。

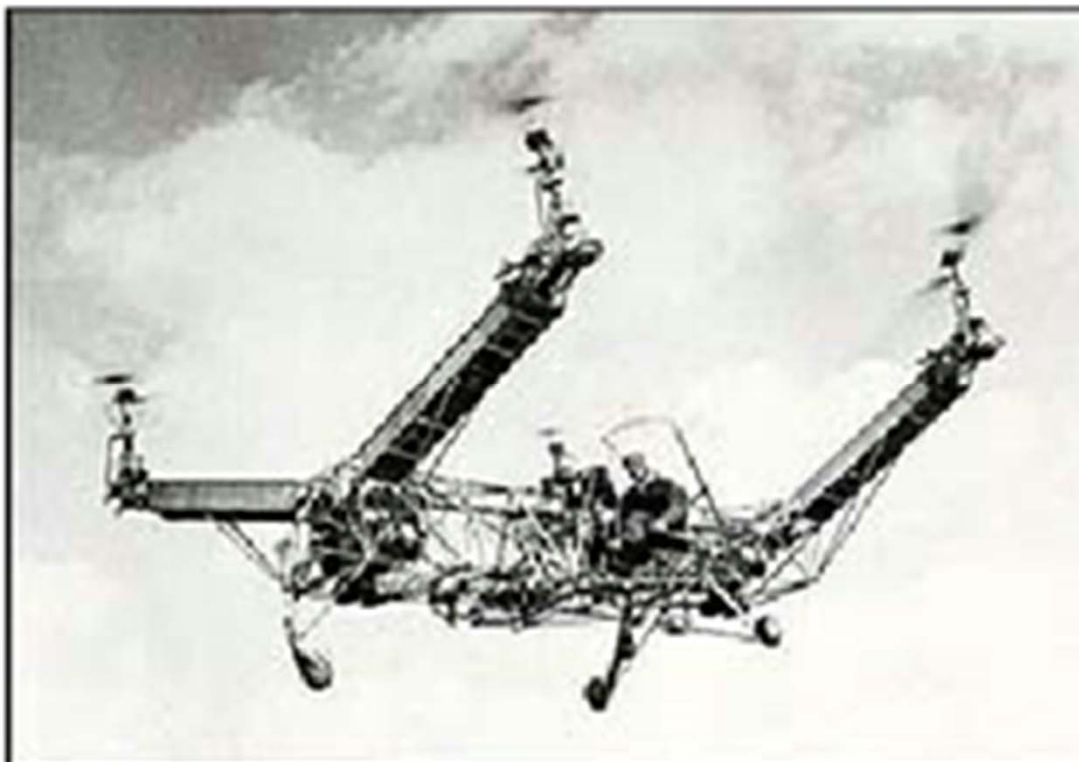


图1.18: Convertawings Model “A”



### 3.多旋翼技术发展

在20世纪50年代，美国陆军继续测试各种垂直起降方案。VZ-7虽然相对稳定，但是它未能达到军方对高度和速度的要求，该计划并没有得到更进一步的推行。在此之后的30年内，多旋翼飞行器没有取得太大的进展，获得的关注也非常少。

#### □ 休眠期(1990以前)

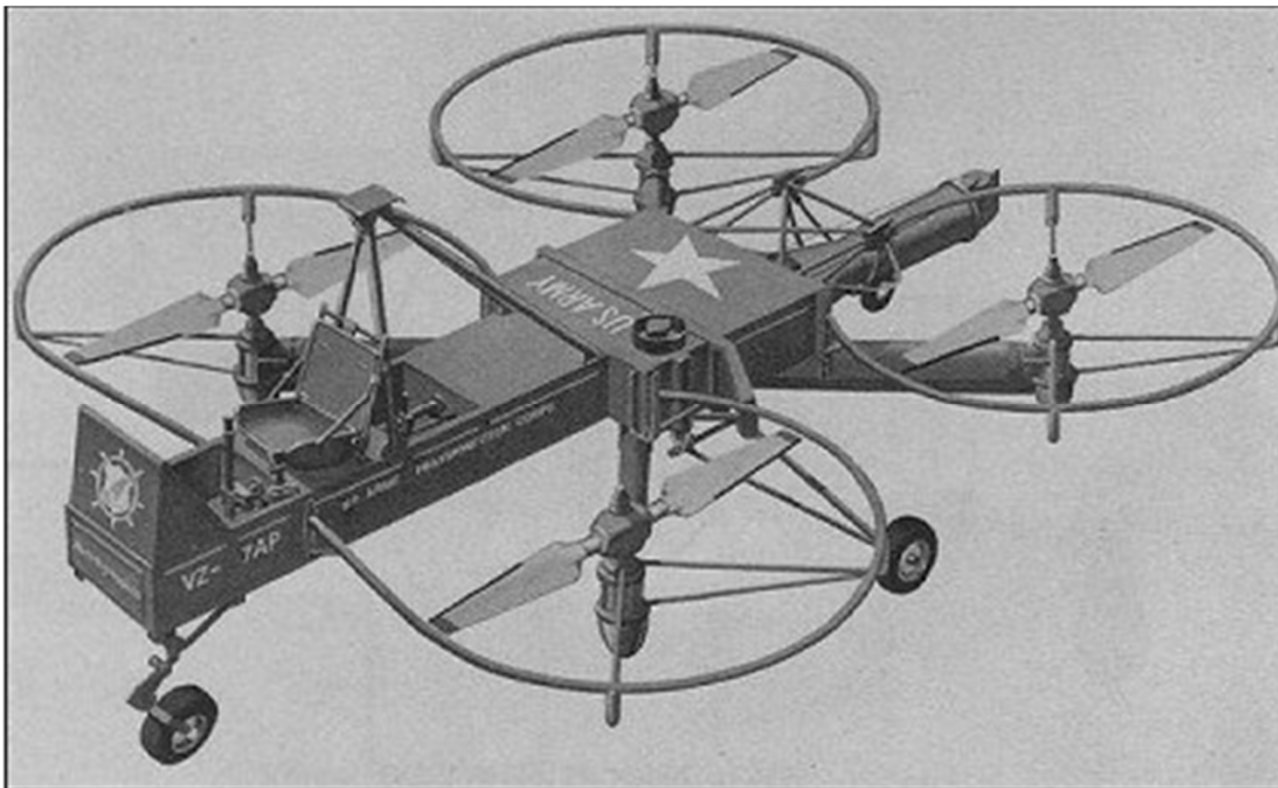


图1.19: Curtiss-Wright VZ-7





# 3.多旋翼技术发展历史

## □ 复苏期(1990-2005)

### (1) 产品方面

随着四旋翼飞行器的概念逐渐偏离军事用途，它开始通过遥控玩具市场走近消费者。



(a) Gyro Saucer 1



(b) Roswell Flyer



(c) Silverlit X-UFO

图1.20: 复苏期的多旋翼

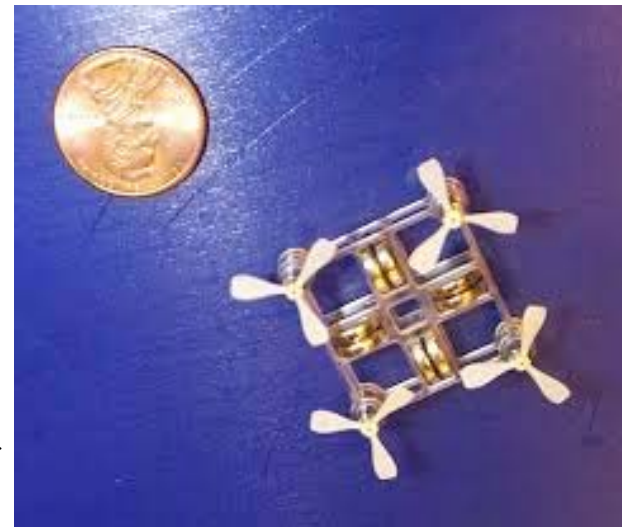


## 3.多旋翼技术发展历史

### □ 复苏期(1990-2005)

#### (2) 学术方面

- 几克重的MEMS惯导系统已经被研制出来
- 学术界开始研究建模和控制
- 2005年左右，真正稳定的多旋翼无人机自动控制器才被制作出来



Mesicopter



# 3.多旋翼技术发展历史

## □ 发展期(2005-2010)

### (1) 产品方面

德国Microdrones GmbH公司于2005年成立，并于2006年4月推出第一代产品Md4-200，10年推出的Md4-1000四旋翼。美国Draganflyer 公司在2004年推出Draganflyer系列。这些产品在商业市场取得了巨大成功。

可以说，德国在这个阶段起到了主导作用。



(a) Md4-200



(b) Draganflyer X6

图1.21: 发展期的多旋翼



# 3.多旋翼技术发展历史

## □ 发展期(2005-2010)

### (2) 学术方面

- 越来越多的学术研究人员开始研究多旋翼，自己搭建四旋翼，验证算法，特别是姿态控制算法
- 个别研究者基于商业四旋翼+动作捕捉系统开发验证环境

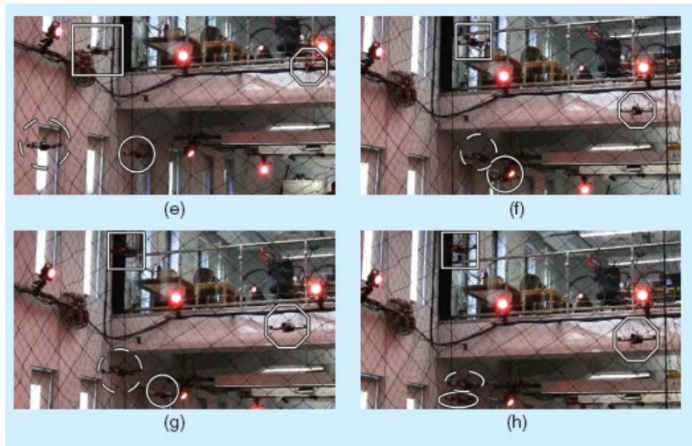


(a)



(b)

Real-Time Indoor Autonomous Vehicle Test Environment, MIT



GRASP Multiple Micro-UAV Test Bed, UPENN





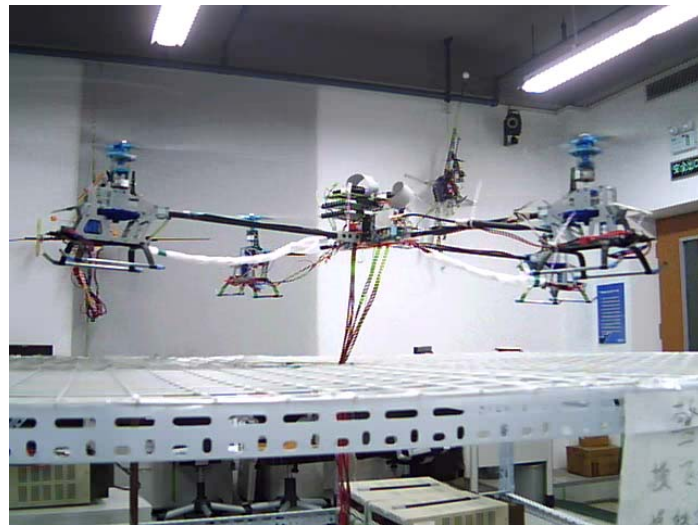
# 3.多旋翼技术发展历史

## □ 发展期(2005-2010)

### (2) 学术方面



我们实验室于2008年左右的多旋翼工作





## 3.多旋翼技术发展历史

### □ 活跃期(2010-2013)

#### (1) 产品方面

- 2010年，法国的派诺特公司与学校共同合作，经过6年努力（2004-2010），推出消费级的AR. Drone四旋翼玩具，非常成功，它的技术和理念也十分领先。
- 2013年左右，大疆推出小精灵Phantom一体机



(a) AR. Drone 1.0



(b) Phantom

图1.18: 活跃期的多旋翼



## 3.多旋翼技术发展历史

---

### □ 活跃期(2010-2013)

#### (2) 学术方面

- 2012年2月，宾夕法尼亚大学的韦杰·库玛教授在TED上做出了四旋翼飞行器发展历史上里程碑式的演讲，展示了四旋翼的灵活性以及编队协作。
- 2012年，Robotics & Automation Magazine, IEEE, Aerial Robotics and the Quadrotor的专刊，比如文章
- 多旋翼开源自驾仪增多



# 3.多旋翼技术发展历史

## □ 活跃期(2010-2013)

开源项目 (Open-Source Projects)	网址 (Web site URL)	开源项目	网址 (Web site URL)
ArduPilot	<a href="http://ardupilot.com">http://ardupilot.com</a>	Taulabs	<a href="http://forum.taulabs.org/">http://forum.taulabs.org/</a>
Openpilot	<a href="http://www.openpilot.org/">http://www.openpilot.org/</a>	Flexbot	<a href="http://www.flexbot.cc/">http://www.flexbot.cc/</a>
Paparazzi	<a href="http://paparazziuav.org">http://paparazziuav.org</a>	Dronecode(开源无人机航空操作系统)	<a href="https://www.dronecode.org/">https://www.dronecode.org/</a>
Pixhawk	<a href="https://pixhawk.ethz.ch/">https://pixhawk.ethz.ch/</a>	Percepto(无人机开源视觉平台)	<a href="http://www.percepto.co/">http://www.percepto.co/</a>
Mikrokopter	<a href="http://www.mikrokopter.de">http://www.mikrokopter.de</a>	Parrot API(开放SDK)	<a href="https://projects.ardrone.org/embedded/ardrone-api/index.html">https://projects.ardrone.org/embedded/ardrone-api/index.html</a>
KKmulticopter	<a href="http://www.kkmulticopter.kr/">http://www.kkmulticopter.kr/</a>	3DR DRONEKIT(SDK)	<a href="http://www.dronekit.io/">http://www.dronekit.io/</a>
Multiwii	<a href="http://www.multiwii.com/">http://www.multiwii.com/</a>	DJI DEVELOPER(SDK)	<a href="http://dev.dji.com/cn">http://dev.dji.com/cn</a>
Aeroquad	<a href="http://www.aeroquadstore.com/">http://www.aeroquadstore.com/</a>	DJI MATRICE 100+ DJI Guidance	<a href="https://developer.dji.com/cn/matrice-100/">https://developer.dji.com/cn/matrice-100/</a>
Crazyflie	<a href="https://www.bitcraze.io/category/crazyflie/">https://www.bitcraze.io/category/crazyflie/</a>	SDK for XMission(SDK)	<a href="http://www.xaircraft.cn/en/xmission/developer">http://www.xaircraft.cn/en/xmission/developer</a>
CrazePony (国内)	<a href="http://www.crazepony.com/">http://www.crazepony.com/</a>	EHANG GHOST SDK(SDK)	<a href="http://dev.ehang.com/">http://dev.ehang.com/</a>
圆点博士 (国内)	<a href="http://www.etootle.com/">http://www.etootle.com/</a>		
匿名飞控 (国内)	<a href="http://www.anotc.com/">http://www.anotc.com/</a>		
Autoquad	<a href="http://autoquad.org/">http://autoquad.org/</a>		
MegaPirate	<a href="http://megapiratex.com/index.php">http://megapiratex.com/index.php</a>		
Erlrobot	<a href="http://erlerobotics.com/">http://erlerobotics.com/</a>		

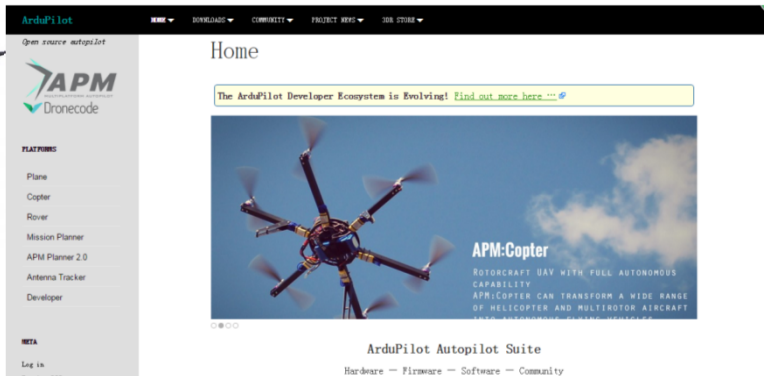




# 3.多旋翼技术发展历史

## □ 爆发期(2013-)

### (1) 产品方面



- 大疆小精灵Phantom一体机得到持续关注
- 连线主编C. Anderson于2012年年底当任3D Robotics公司的CEO，连续推出Iris、X8+、Solo等四旋翼飞行器。同时，该公司维护和支持了APM开源多旋翼的软硬件升级，以及网站建设和维护
- 2013年底，3D Robotics公司牵手苏黎世联邦理工学院的PX4开源飞控开发团队，共同推出Pixhawk硬件
- 同样在2013年底，互联网巨头亚马逊发布的采用四旋翼送快递的视频，拉近了多旋翼飞行器与普通消费者之间的距离



# 3.多旋翼技术发展历史

## □ 爆发期(20



### (1) 产品方面 (2013年8月-2015年9月)

飞机型号	公司	发布时间	国家	特点
Spiri	Patrick Edwards-Daugherty	2013.8	加拿大	基于Ubuntu的可编程无人机
Stingray500	Curtis Young Blood	2013.12	美国	全球首款量产的四轴可变桨距飞行器
AR.Drone 2.0	Parrot	2013.12	法国	智能终端控制、无GPS能保持悬停
AirDog	Helico Aerospace Industries	2014.6	拉脱维亚	可折叠式、不需要智能手机进行控制，会跟着你全天候的待命拍摄
Rolling Spider	Parrot	2014.7	法国	体积小而轻，配备了一个“车轮”，可以实现在地上跑、爬墙等
IRIS+	3D Robotics	2014.9	美国	一键3D扫描建模，自动跟踪、自动轨迹飞行拍摄
Nixie	Fly nexie	2014.11	美国	世界上第一款可穿戴无人机（概念阶段）
GHOST 1.0	EHANG	2014.11	中国	纯手机控制，自动跟随
Mind4	AirMind	2014.11	中国	世界上首款基于安卓系统的无人机
inspire 1	DJI	2014.11	中国	变形收起起落架
Bebop	Parrot	2014.12	法国	Bebop是基于AR.Drone的全面升级
Vertex VTOL	ComQuest Ventures	2015.1	波多黎各	将多旋翼与固定翼飞行器的各种优势进行有机组合
Skydio	Skydio	2015.1	美国	只用普通摄像头，就能实现自主导航和冲突避免能力（尚在原型阶段）
Steadidrone Flare	Steadidrone	2015.1	捷克	高强度的碳纤维机身、防水功能，本身还支持折叠
Airborg H61500	Top Flight Technologies	2015.3	美国	混合动力





# 3.多旋翼技术发展历史

## □ 爆发期(2013-)



### (1) 产品方面 (2013年8月-2015年9月)

飞机型号	公司	发布时间	国家	特点
Splash Drone	Urban Drones	2015.3	美国	防水设计, 可以停留在水面上
SOLO	3D Robotics	2015.4	美国	集最先进的技术于一身, 提高航拍体验
Phantom 3	DJI	2015.4	中国	集成了高清图传、视觉定位、4K摄像机等先进技术
XPlanet	XAIRCRAFT	2015.4	中国	智能规划航线、智能喷洒系统、智能电池管理等
Phenox2	Ryo Konomura、Kensho Miyoshi	2015.4	日本	一款可编程的无人机, 足够小、重量轻, 可在人手上起飞降落
CyPhy LVL1	CyPhy Works	2015.4	美国	水平飞行拍摄时机身不会倾斜
Lily	Lily	2015.5	美国	可手抛起飞、自动跟随、防水
PhoneDrone	xCraft	2015.5	新西兰	PhoneDrone其实就是一个外骨骼框架, 智能手机镶嵌到框架中组装为自动飞行的四翼无人机
Yeair!	airstier	2015.6	德国	油电混合动力
Tayzu	Tayzu Robotics	2015.7	美国	全程自动化处理的无人机系统
Fotokite Phi	Perspective Robotics AG	2015.8	瑞士	可折叠, 无需等待GPS锁定或校准
独角兽X	FPVStyle	2015.8	中国	前飞速快
Micro Drone3.0	Extreme Fliers	2015.8	英国	3D虚拟情景的技术
Feibot	Feibot	2015.9	中国	基于智能手机平台
Snap	Vantage Robotics	2015.9	美国	由于采用模块化的设计, 模块之间采用磁性连接器连接
Flybi	Advance Corporation Robotix	2015.9	美国	配备手表型遥控器, 采用LCD显示屏, 单操作杆和转盘配合控制机体, 可以通过随机的VR眼镜实现第一视角飞行。并且可以自动换电池。



# 3.多旋翼技术发展历史

## □ 爆发期(2013-)

### (2) 学术方面

- 多旋翼的研究更偏向**智能化、群体化**。
- 2013年，苏黎世联邦理工学院的拉斐尔·安德列教授在TEDGlobal的机器人实验室展示了四旋翼的惊人运动机能。
- 《自然》发表综述文章分析和展望了小型自主无人机在民用领域的科学和技术。

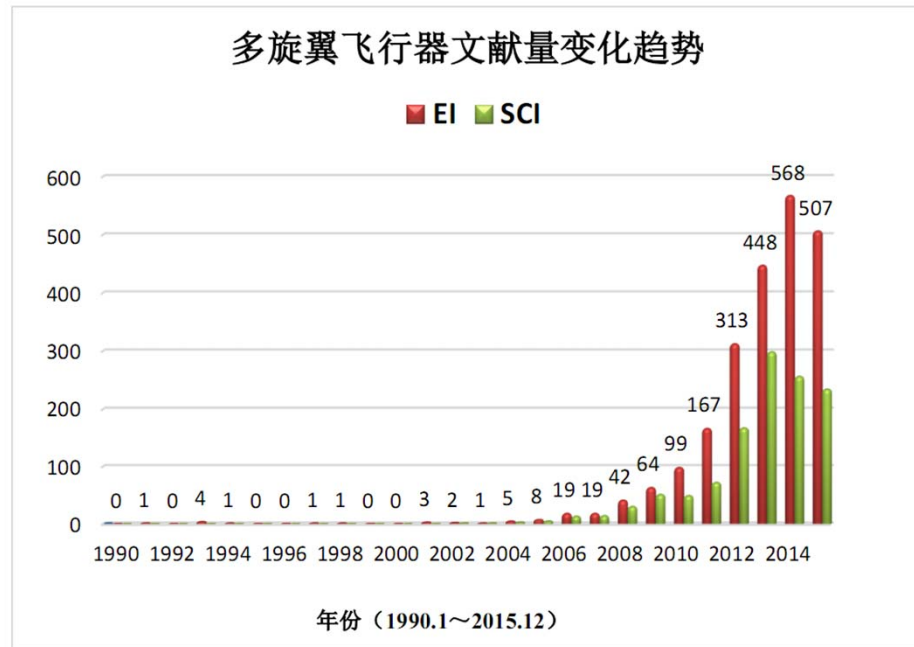


图1.19: 多旋翼文献数量变化趋势



## 3.多旋翼技术发展历史

---

### □ 小结

(1) 时势造英雄，多旋翼是时间的产物。

硬件小型化、计算能力越来越强、电机功率提升、电池能量密度提升、智能手机、Gopro运动相机、活跃的社交网络

(2) 一体机改变了体验，使飞行简单化。

AR.Drone、大疆小精灵Phantom



# 4.本门课的安排

---

## □ 目的

本门课程讲授多旋翼设计、动态模型建立、状态估计、控制和决策等方面的基础知识。具有两大特点：“基础性”和“系统性”。

### (1) 基础性

本课程力求绝大部分多旋翼涉及的内容能够自包含，使得具有自动化专业本科知识的学生就能够听懂这门课。

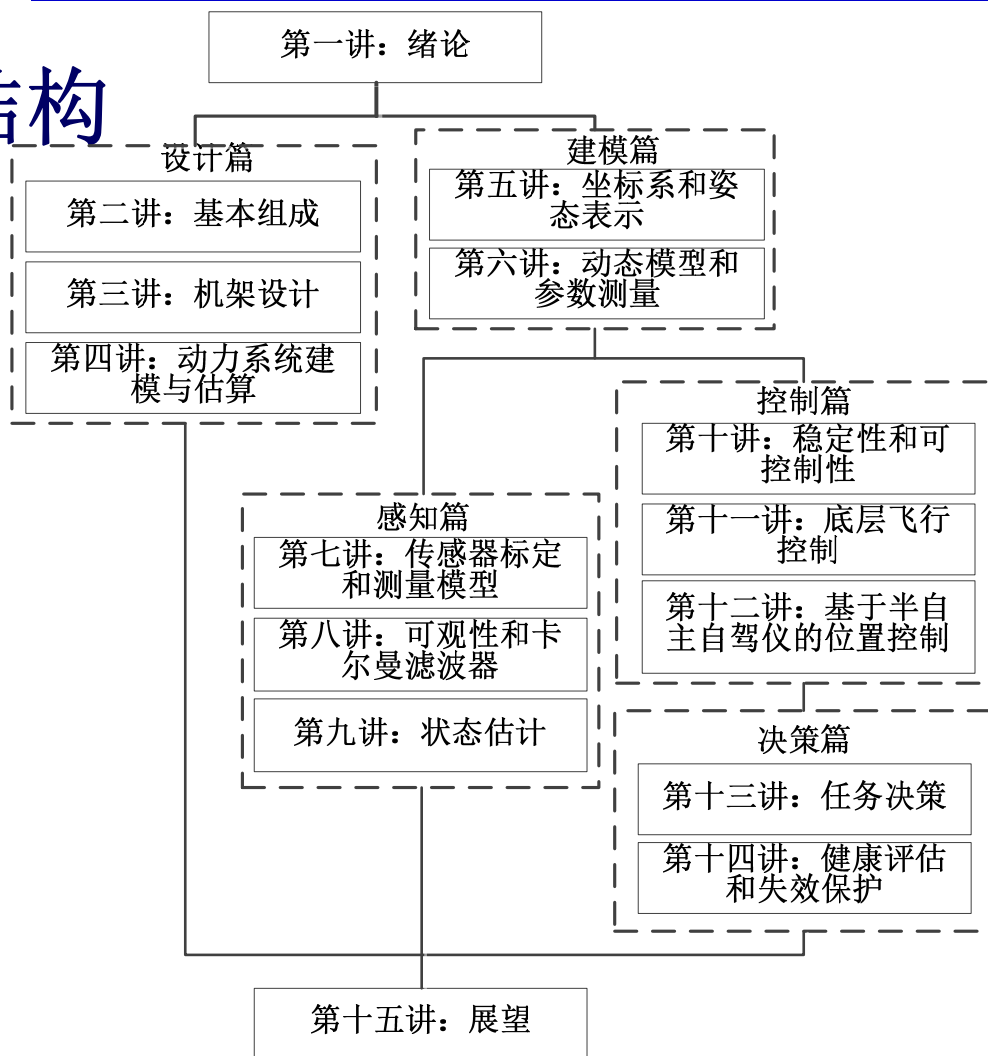
### (2) 系统性

本课程目的是介绍多旋翼飞行器系统性的全貌，而不仅仅是某一个技术点。本课程通过多旋翼例子，将散落的知识实例化。



# 4.本门课的安排

## □ 结构



(1) 仅对多旋翼设计感兴趣的同 学，可参加第一讲、设计单元和第十五讲课程；

(2) 仅对多旋翼感知感兴趣的同 学，可参加第一讲、模型单元、感知单元和第十五讲课程；

(3) 仅对对多旋翼控制算法感兴趣的同 学，可参加第一讲、模型单元、控制单元、决策单元和第十五讲课程。



# 资源

---

(1) 可靠飞行控制研究组主页课程中心(全部课件下载)

<http://rfly.buaa.edu.cn/course>

(2) 关注可靠飞行控制研究组公众号 buaarfly(文章、资讯等)

(3) 多旋翼设计与控制交流QQ群:183613048

(4) 视频课程(MOOC)同步发布, 网易云课堂搜索 “多旋翼”

<http://study.163.com/course/introduction/1003715005.htm>

(5) 同名中文书本教材《多旋翼飞行器设计与控制》即将在电子工业出版社出版, 敬请期待

(6) 有疑问可联系课程总助教戴训华, 邮箱: [dai@buaa.edu.cn](mailto:dai@buaa.edu.cn)





# 致谢

感谢控制组所有同学



为本门课程准备作出的贡献。



---

# 谢谢！



---

# 多旋翼飞行器设计与控制

## 第二讲 基本组成

全权 副教授

qq\_buaa@buaa.edu.cn

自动化科学与电气工程学院

北京航空航天大学



# 东方智慧



## 琴诗



# 核心问题

---

多旋翼由哪些基本部件组成?





# 大纲

---

1. 总体介绍

2. 机架

3. 动力系统

4. 指挥控制系统

5. 本讲小结



# 1.总体介绍

## 机架



## 动力系统



## 指挥控制系统



图2.1:多旋翼系统实物图



# 1.总体介绍



图2.2:多旋翼内部布局, 图片主体来源于网站 [ardupilot.org](http://ardupilot.org)



## 2. 机架

### □ 机身

#### (1) 作用

机身是承载多旋翼所有设备的平台。多旋翼的安全性、可用性以及续航性能都和机身的布局密切相关。因此在设计多旋翼时，其机身的尺寸、布局、材料、强度和重量等因素都是应该考虑的。

机身是承载多旋翼所有设备的平台



大疆风火轮F450



大疆风火轮 F550



零度HIGHONE四旋翼  
(机架可折叠)



大疆“御”  
(机架可折叠)



## 2. 机架

### □ 机身

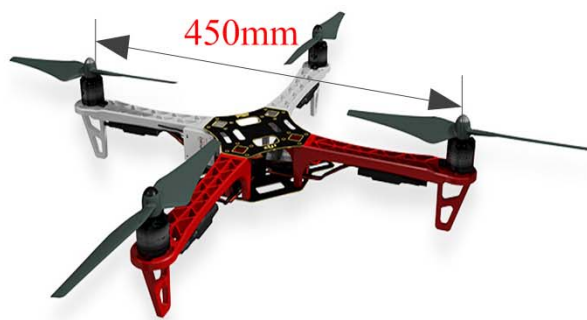
#### (2) 指标参数

##### 1) 重量

##### 2) 轴距 (Diagonal Size)

轴距是用来衡量多旋翼尺寸的重要参数，它通常被定义为外圈电机组成圆周的直径。

机身的重量主要取决于其尺寸和材料。由于在相同拉力下，机身越轻意味着可分配的有效载荷越大，因此在保证机身性能的前提下，重量应尽量小。



(a) 大疆 F450机架



(b) 大疆 F550机架

图2.3: 轴距示意图





# 2. 机架

## □ 机身

### (2) 指标参数

### 3) 布局

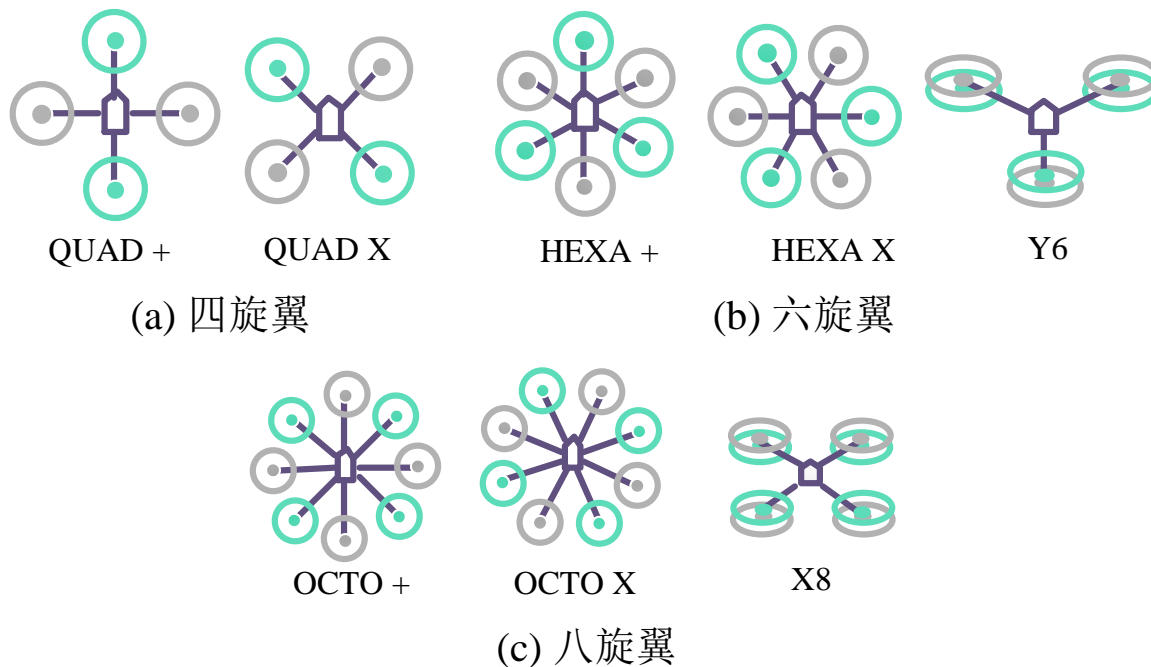


图2.4: 多旋翼基本布局



## 2. 机架

### □ 机身



#### 4) 材料 (参考<http://aeroquad.com/showwiki.php?title=Frame-Materials>)

	碳纤维	玻璃钢	聚碳酸酯	丙烯酸塑料	铝合金	轻木
密度 (lb/cuin)	<b>0.05</b>	<b>0.07</b>	<b>0.05</b>	<b>0.04</b>	<b>0.1</b>	<b>0.0027-0.0081</b>
刚度 (Msi)	<b>9.3</b>	<b>2.7</b>	<b>0.75</b>	<b>0.38</b>	<b>10.3</b>	<b>0.16-0.9</b>
强度 (Ksi)	<b>120</b>	<b>15-50</b>	<b>8-16</b>	<b>8-11</b>	<b>15-75</b>	<b>1-4.6</b>
价钱 (10:最便宜)	<b>1</b>	<b>6</b>	<b>9</b>	<b>9</b>	<b>7</b>	<b>10</b>
加工 (10:最容易)	<b>3</b>	<b>7</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>7</b>	<b>10</b>

注:

(a) 刚度。弹性模量表示是材料在弹性变形阶段，其应力和应变成正比例关系；形变越难改变，刚度越大

(b) 强度。抗拉强度就是试样拉断前承受的最大标称拉应力



## 2. 机架

### □ 起落架

#### (1) 作用

- 1) 支撑多旋翼重力
- 2) 避免螺旋桨离地太近，而发生触碰
- 3) 减弱起飞时的地效
- 4) 消耗和吸收多旋翼在着陆时的撞击能量





## 2. 机架

### □ 涵道

#### (1) 作用

- 1) 保护桨叶和人身安全
- 2) 提高桨叶拉力效率
- 3) 减少噪音

#### (2) 工作原理

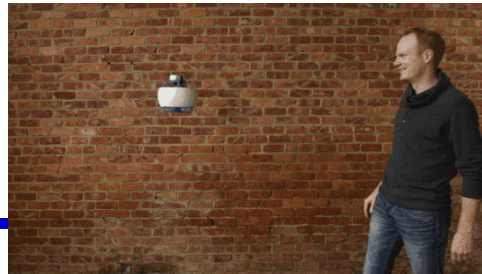
**伯努利原理：**  
在一个流体系统，流速越快，流体产生的压力就越小。

工作原理为：当螺旋桨工作时，进风口内壁空气速度快静压小，而进风口外壁静压大，因此涵道能产生附加拉力。

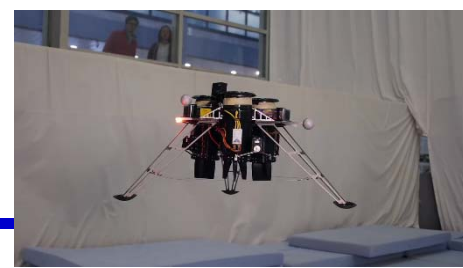
#### (3) 参数

扩散段长度和螺旋桨直径是影响涵道性能的主要参数，关于设计可参考[1]

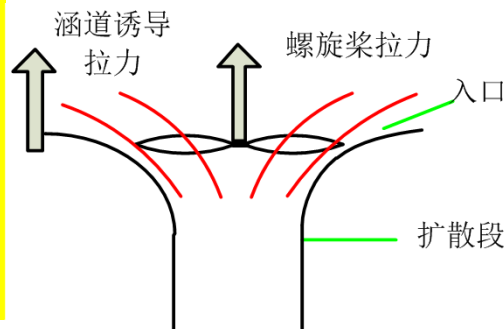
[1] Hrishikeshavan V, Black J, Chopra I. Design and performance of a quad-shrouded rotor micro air vehicle. *Journal of Aircraft*, 2014, 51(3): 779-791.



Fleye



Flying Platform



(a) 工作原理



(b) 带有涵道的四旋翼

图2.5: 涵道原理和实物

**注：尽管涵道可以提升效率增加悬停时间，但增加涵道的同时也会增加多旋翼机的重量从而使悬停时间缩短，因此最终的优化设计需要权衡与折中。**



# 3.动力系统

动力系统



- 动力系统通常包括螺旋桨、电机、电调以及电池。
- 动力系统决定了多旋翼的主要性能，例如悬停时间、载重能力、飞行速度和飞行距离等等。
- 动力系统的部件之间需要相互匹配与兼容，否则很可能无法正常工作，甚至在某些极端情况下突然失效导致事故发生





# 3.动力系统

## □ 螺旋桨

### (1) 作用

考虑到电机效率会随螺旋桨尺寸变化而变化，所以合理匹配的螺旋桨可以使电机工作在更高效的状态，从而保证在产生相同拉力情况下消耗更少的能量，进而提高续航时间。

- 1) 螺旋桨是直接产生多旋翼运动所需的力与力矩的部件
- 2) 合适的螺旋桨对提高多旋翼性能和效率有着直接的影响





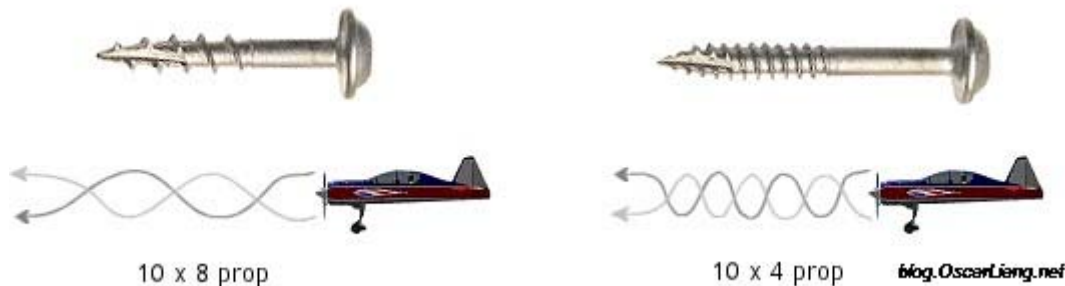
# 3.动力系统

## □ 螺旋桨

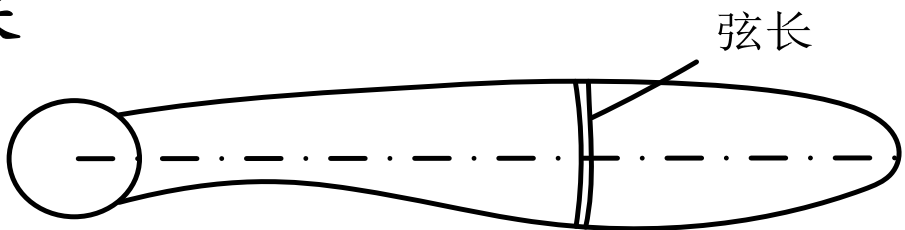
### (2) 指标参数

#### 1) 型号

- 假设螺旋桨在一种不能流动的介质中旋转，那么螺旋桨每转一圈，就会向前进一个距离，就称为螺距或桨距（**Propeller Pitch**）。
- 螺旋桨一般用4个数字表示，其中前面2位是螺旋桨的直径，后面2位是螺旋桨的螺距。比如：**1045**桨的直径为10英寸，而螺距为4.5英寸。



#### 2) 弦长



APC1045MR螺旋桨示意图



# 3.动力系统

## □ 螺旋桨

### (2) 指标参数

### 3) 转动惯量

### 4) 桨叶数

- 有实验表明[2,p.65], 二叶桨的力效会比三叶桨稍高一些
- 最大拉力相同的前提下, 二叶桨直径要比三叶桨直径大

### 5) 安全转速

[2]Aaron M Harrington. Optimal propulsion system design for a micro quad rotor [Master dissertation]. University of Maryland, USA, 2011.



(a) 二叶桨



(b) 三叶桨



(c) 四叶桨

图2.6: 不同桨叶数螺旋桨实物图

较小的转动惯量可以提升电机的响应速度, 从而提升多旋翼的性能。



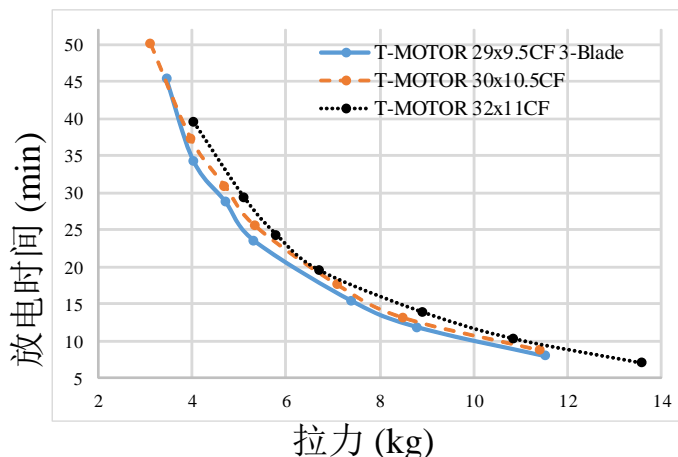
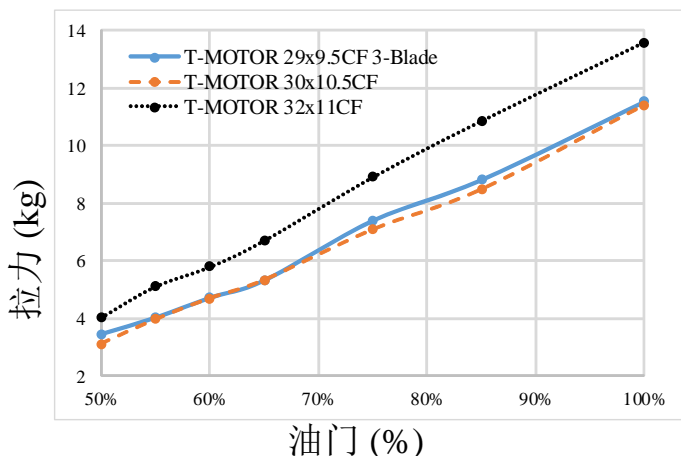
# 3.动力系统

## □ 螺旋桨

### 6) 螺旋桨力效

机械功率 (单位: W) = 输出力矩 (单位: N·m) × 螺旋桨转速 (单位: rad/s)

$$\text{力效 (单位: g/W)} = \frac{\text{拉力 (单位: g)}}{\text{机械功率 (单位: W)}}$$



(a) T-MOTOR U12 KV90拉力-油门曲线图 (b) T-MOTOR U12 KV90放电时间-拉力曲线图

图2.7: 二叶桨与三叶桨的性能对比曲线图



# 3.动力系统

## □ 螺旋桨

### (3) 静平衡和动平衡

- 进行静平衡和动平衡的目的是减少振动
- 螺旋桨静平衡是指螺旋桨重心与轴心线重合时的平衡状态；而螺旋桨动平衡是指螺旋桨重心与其惯性中心重合时的平衡状态
- 出现不平衡的情况时，可以通过贴透明胶带到轻的桨叶，或用砂纸打磨偏重的螺旋桨平面（非边缘）来实现平衡。



振动使航拍图像质量变差



图2.8: Du-Bro螺旋桨平衡器（用于静平衡）





# 3.动力系统

## 电机

### (1) 作用

多旋翼的电机主要以无刷直流电机为主，将电能转换成机械能。

- 无刷直流电机具有多种优势，比如效率高、便于小型化以及制造成本低
- 根据转子的位置，无刷直流电机可以进一步分为**外转子电机**和**内转子电机**。外转子电机可以提供更大的力矩，因此更容易驱动大螺旋桨而获得更高效率。

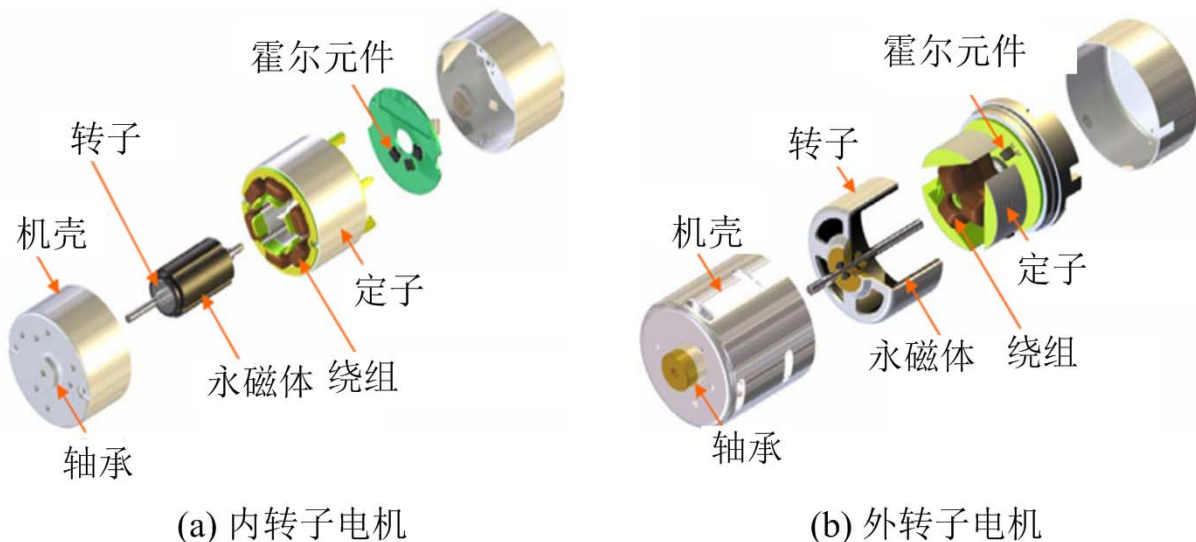


图2.9: 内转子电机和外转子电机，图片来源 [www.nidec.com](http://www.nidec.com)

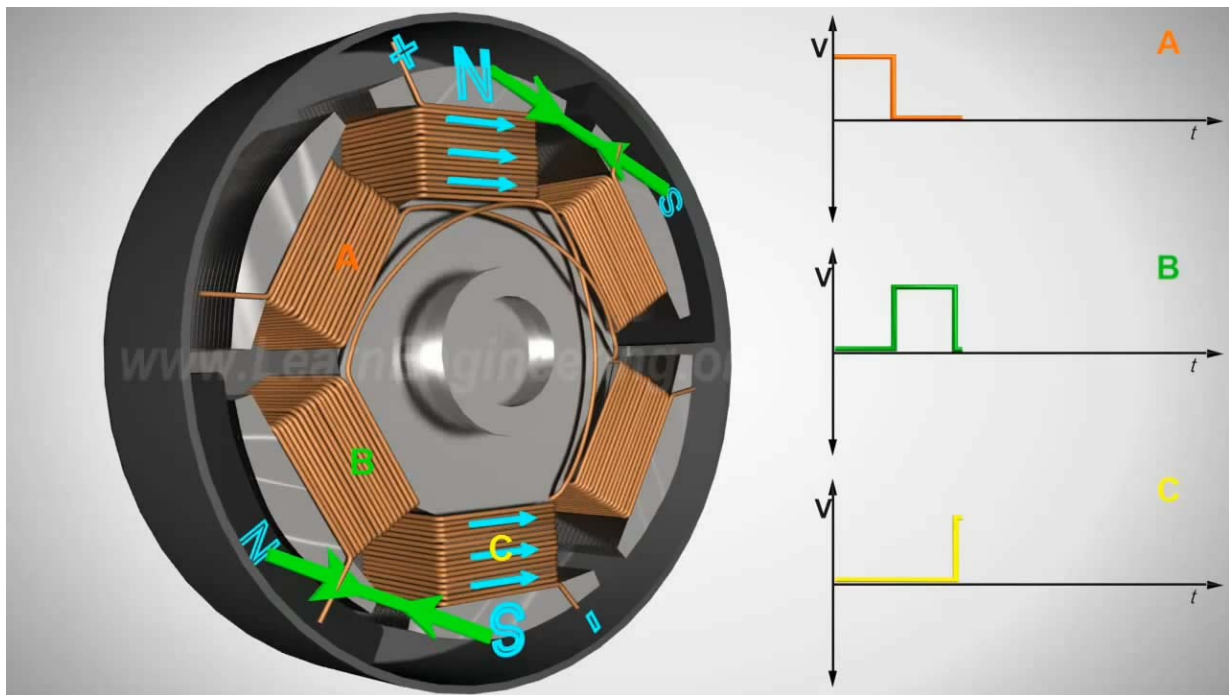


# 3.动力系统

## 电机

### (2) 工作原理

- 这是一个外转子电机，转子上有一对永磁铁，定子上有如图展示的线圈A, B, C。这时对线圈进行通电，产生电磁场。无刷直流电机的工作原理在于永磁铁磁场和电磁场相互作用，吸引转子转动。



- 当转子上的永磁铁磁场与电磁场重合时，线圈B通电，产生了新的电磁场。这时转子继续被吸引。当永磁铁磁场到达线圈B附近时，线圈C通电。然后永磁铁磁场到达线圈C附近时，线圈A通电。周期性的对线圈A, B, C进行通电，进而周而复始地驱动转子转动。

视频: Brushless DC Motor, How it works ? <https://www.youtube.com/watch?v=bCEiOnuODac>



# 3.动力系

## □ 电机

### (3) 指标参数

#### 1) 尺寸

电机的尺寸取决于定子的大小，由一个四位数字来表示。例如2212（或写成22×12）电机，前两个数字代表定子直径（单位mm），后两个数字代表定子高度（单位mm），因此2212电机表示电机定子直径是22mm，定子高度为12mm。

#### 2) 标称空载KV值

- 无刷直流电机的KV值指的是空载情况下，外加1V电压得到的电机转速值（单位：RPM）。
- 大型螺旋桨可以选用KV值较小的电机，而小型螺旋桨可以选用KV值较大的电机

3660-1700KV



RS2205  
2300KV





# 3.动力系统

## 电机

### 3) 标称空载电流和电压

在空载（不安装螺旋桨）试验中，

对电机施加空载电压（通常为**10V**）时测得的电机电流被称为空载电流。

### 4) 最大电流/功率

最大峰值（瞬时）电流/功率：电机能承受的最大瞬时通过的电流/功率；

最大连续（持续）电流/功率：电机能允许持续工作（规定时间）而不烧坏的最大连续电流/功率

### 5) 内阻

电机电枢本身存在内阻，虽然该内阻很小，但是由于电机电流很大有时甚至可以达到几十安培，所以该小内阻不可忽略

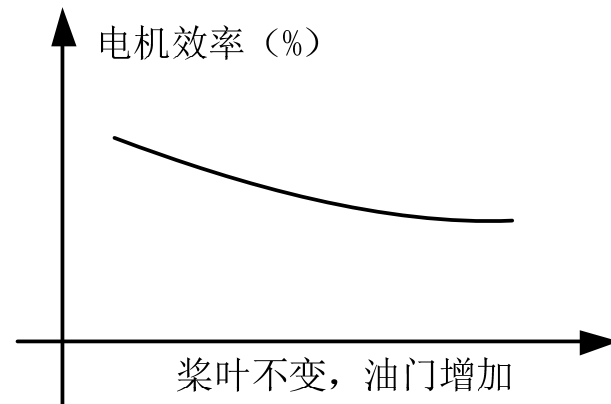
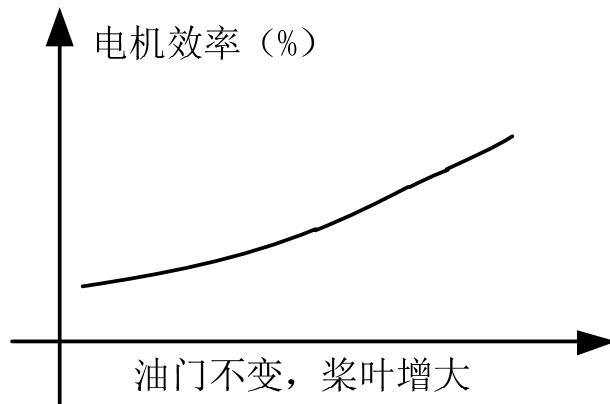
Specifications	V2814	推荐多旋翼重量 ≤620g x轴数
Stator Diameter	28mm	定子瓶
Stator Thickness	14mm	定子厚度
No. of Stator Arms	12	定子槽数
No. of Stator Poles	14	定子极数
Motor Kv	770	电机KV
No-Load Current (A/10V)	0.8A	空载电流
Motor Resistance	70m	电机电阻
Max Continuous Current	30A/30S	最大连续电流
Max Continuous Power	550W	最大连续功率
Weight	118g	重量（含长线）
Outside Diameter	35mm	转子直径
Shaft Diameter	4mm	出轴直径
Body Length	36mm	电机长度
Overall Shaft Length	38.5mm	电机含轴总长度
Max Lipo Cell	2-4S	最大电池节数
ESC	30A	建议使用电调
Recommended Prop(inch)	APC1047	推荐螺旋桨规格



## 3. 动力

### 电机

#### 6) 电机效率



电机效率是评估性能的一个重要参数

电功率 (单位: W) = 电机输入电压 (单位: V) × 电机电流 (单位: A)

$$\text{电机效率} = \frac{\text{机械功率 (单位: w)}}{\text{电功率 (单位: W)}}$$

#### 7) 总力效

总力效的计算方式如下:

$$\begin{aligned} \text{总力效 (单位: g/W)} &= \frac{\text{螺旋桨拉力 (单位: g)}}{\text{电功率 (单位: W)}} \\ &= \text{螺旋桨力效} \times \text{电机效率} \end{aligned}$$





# 3.动力系统

表中给出了一款电机，4种不同的螺旋桨，在不同油门下的总力效。针对特定任务，一般我们可以遍历这些组合，选取一个油门、力效和工作温度的一个折中。

电机型号	电压 (V)	螺旋桨型号	油门指令	电流 (A)	功率 (W)	拉力 (g)	转速 (RPM)	力效 (G/W)	扭矩 (N·m)	温度 °C
T-MOTOR MN5212 KV340	24	T-MOTOR 15x5CF	50%	3.3	79	745	3821	9.44	0.142	38
			55%	4.2	99.8	910	4220	9.11	0.172	
			60%	5.2	123.6	1075	4576	8.7	0.198	
			65%	6.3	150.7	1254	4925	8.32	0.232	
			75%	9.1	217.2	1681	5663	7.74	0.31	
			85%	12.2	292.1	2115	6315	7.24	0.382	
			100%	17.8	426.7	2746	7167	6.44	0.498	
		T-MOTOR 18x6.1CF	50%	5.7	137.5	1318	3596	9.58	0.29	74
			55%	7.4	178.1	1612	3958	9.05	0.344	
			60%	9.3	222	1901	4310	8.56	0.411	
			65%	11.6	278.2	2259	4622	8.12	0.472	
			75%	16.5	395.5	2835	5226	7.17	0.605	
			85%	22.1	531.1	3477	5751	6.55	0.737	
			100%	31	744.7	4355	6358	5.85	0.918	

图2.10: 电机T-MOTOR MN5212 KV420性能参数表



# 3.动力系统

## □ 电调

### (1) 作用

电调全称电子调速器，英文 Electronic Speed Control，简称ESC。

- 1) 电调最基本的功能就是电机调速
- 2) 为遥控接收器上其它通道的舵机供电
- 3) 充当换相器的角色
- 4) 电调还有一些其它辅助功能

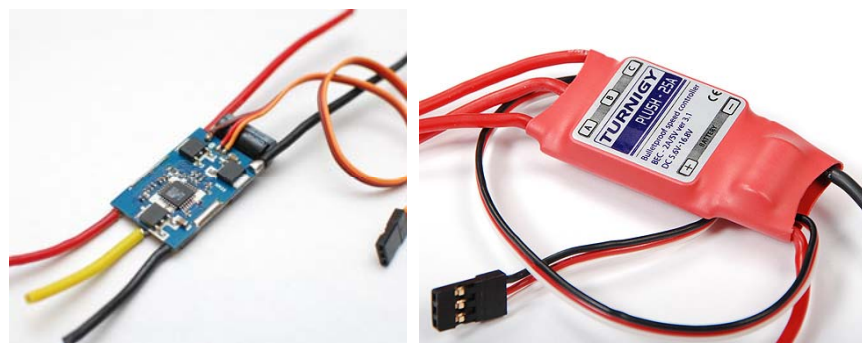
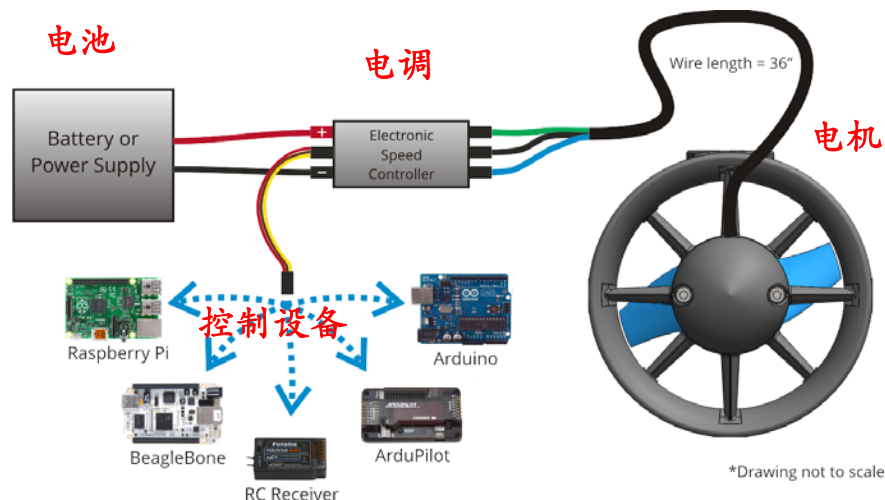


图2.11 电调实物图



图片来源<http://veevoo.jumpseller.com/t200-thruster>



# 3.动力系统

**PUSH18A**, BEC2A/5V  
DC: 5.6V-16.8V



**SK-30A**, BEC2A/5V  
DC: 2-4 LiPo/5-12NiMH



## 电调

### (2) 指标参数

#### 1) 最大持续/峰值电流

无刷电调最主要的参数是电调的功率，通常以安数A来表示，如10A、20A、30A。不同电机需要配备不同安数的电调，安数不足会导致电调甚至电机烧毁。

- 最大持续电流指的是在正常工作模式下的持续输出电流
- 峰值电流指的是电调能承受的最大瞬时电流。



#### 2) 电压范围

电调能够正常工作所允许输入的电压范围也是非常重要的参数。一般在电调说明书上可以看到标注例如“3-4S LiPo”字样，表示这个电调适用于3到4节电芯串联的锂聚合物电池，也就是说它的电压范围为11.1V~14.8V。



# 3.动力系统

## □ 电调

### (2) 指标参数

#### 3) 内阻

电调具有相应内阻，其发热功率需要得到注意。有些电调电流可以达到几十安培，发热功率是电流的平方的函数，所以电调的散热性能也十分重要，因此**大规格电调内阻一般都比较小**。

#### 4) 刷新频率

电机的响应速度与电调的刷新速率有很大关系。在多旋翼开始发展之前，电调多为航模飞机而设计，航模飞机上的舵机由于结构复杂，工作频率最大为**50Hz**。相应地，电调的刷新速率也都为**50Hz**。多旋翼与其它类型飞机不同，不使用舵机，而是由电调直接驱动，其响应速度远超舵机。目前，具备**UltraPWM**功能的电调可**支持高达500Hz的刷新率**。





# 3.动力系统

## □ 电调

### (2) 指标参数

### 5) 可编程特性

通过内部参数设置，可以达到最佳的电调性能。通常有三种方式可对电调参数进行设置：

- 可以通过编程卡直接设置电调参数
- 通过USB连接，用电脑软件设置电调参数
- 通过接收器，用遥控器摇杆设置电调参数

### 6) 兼容性

如果电机和电调兼容性不好，那么会发生堵转，即电机不能转动了



图2.12: 好盈无刷电调参数编程卡

Programmable Items	Value								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>Basic Items</b>									
1. Running Mode	Forward with Brake	Forward/Reverse with Brake	Forward/Reverse (For Rock Crawler)						
2. Drag Brake Force	0%	5%	10%	20%	40%	60%	80%	100%	
3. Low Voltage Cut-Off Threshold	No-Protection	2.6V /Cell	2.8V /Cell	3.0V /Cell	3.2V /Cell	3.4V /Cell			
4. Start Mode(Punch)	Level1	Level2	Level3	Level4	Level5	Level6	Level7	Level8	Level9
<b>Advanced Items</b>									
5. Max Brake Force	25%	50%	75%	100%	Disable				
6. Max Reverse Force	25%	50%	75%	100%					
7. Initial Brake Force	= Drag Brake Force	0%	20%	40%					
8. Neutral Range	6% (Narrow)	9% (Normal)	12% (Wide)						
9. Timing	0.00°	3.75°	7.50°	11.25°	15.00°	18.75°	22.50°	26.25°	
10. Over-heat Protection	Enable	Disable							
11. Motor Rotation	Counter Clockwise	Clockwise							
12. Lipo Cells	Auto Calculate	2 Cells	3 Cells	4 Cells	5 Cells	6 Cells			

图2.13: 一张电调参数配置表





# 3.动力系统

## □ 电调

### (3) 方波驱动 V.S. 正弦波驱动

#### 1) 方波驱动

方波是数字信号，控制元件工作在开关状态，电路简单容易控制发热小等优点。

#### 2) 正弦波驱动（矢量控制，Field Oriented Control）

正弦驱动在运行平稳性、调速范围、减振减噪方面优于方波驱动。目前可采用光电编码器、霍尔传感器或者基于观测器的方法测量转子角度。因为多旋翼电机始终工作在高转速状态下，可以基于观测器的方法进行矢量调制，节约成本。



# 3.动力系统

## □ 电池

### (1) 作用

电池主要用于提供能量。目前航模最大的问题在于续航时间不够，其关键就在于电池容量的大小。现在可用来做航模动力的电池种类很多，常见的有锂聚合物电池（LiPo）和镍氢电池（NiMh），主要源于其优良的性能和便宜的价格优势。



锂电池



镍氢电池



# 3.动力系统

## □ 电池

### (2) 指标参数

航模专用锂聚合物电池 (LiPo 电池) 单节电芯的标称电压是3.7V, 充满电可达4.2V, 通常设定放电后的保护电压为3.6V左右。

#### 1) 电压

- 锂电池组包含两部分: 电池和锂电池保护线路。
- 单节电压3.7V, 3S1P表示3片锂聚合物电池的串联, 电压是11.1V, 其中: S是串联, P表示并联。又如2S2P电池表示2片锂聚合物电池的串联, 然后两个这样的串联结构并联, 总电压是7.4V, 容量是单个电池的两倍。
- 不仅在放电过程中电压会下降, 而且由于电池本身具有内阻, 其放电电流越大, 自身由于内阻导致的压降就越大, 所以输出的电压就越小。

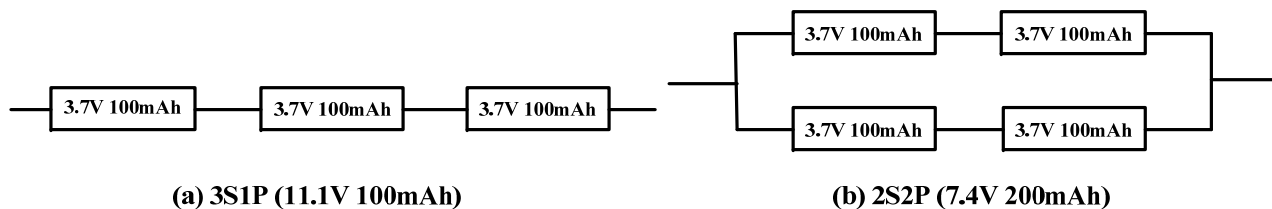


图2.15: 电芯组合方式



# 3.动力系统

## □ 电池

### 2) 容量

- 电池的容量是用毫安时表示的。5000毫安时的电池表示该电池以5000毫安的电流放电可以持续一小时。但是，随着放电过程的进行，电池的放电能力在下降，其输出电压会缓慢下降，所以导致其剩余电量与放电时间并非线性关系。
- 在实际多旋翼飞行过程中，有两种方式检测电池的剩余容量是否满足飞行安全的要求。一种方式是检测电池单节电压，另一种方式是实时检测电池输出电流做积分计算。
- 注意：单电芯充满电电压为4.2V，放电完毕会降至3.0V(再低可能过放导致电池损坏)，一般无人机在低于3.6V之前会电量报警



# 3.动力系统

## □ 电池

### 3) 放电倍率

一般充放电电流的大小常用充放电倍率来表示，即

$$\text{充放电倍率} = \text{充放电电流} / \text{额定容量}$$

- 例如：额定容量为100Ah的电池用20A放电时，其放电倍率为0.2C。
- 电池放电倍率是表示放电快慢的一种量度，越大表明放电越快。所用的容量1小时放电完毕，称为1C放电；5小时放电完毕，则称为 $1/5=0.2C$ 放电。容量5000毫安时的电池最大放电倍率为20C，其最大放电电流为100A。
- 锂聚合物电池一般属于高倍率电池，可以给多旋翼提供动力。
- 放电电流不能超过其最大电流限制，否则可能烧坏电池





## 3.动力系统

### □ 电池

#### 4) 内阻

- 欧姆内阻主要是指由电极材料、电解液、隔膜电阻及各部分零件的接触电阻组成，与电池的尺寸、结构、装配等有关。
- 电池的内阻不是常数，在充放电过程中随时间不断变化，不是线性关系。常随着电池状态和使用寿命变化而变化。。
- 电池的内阻很小，我们一般用毫欧的单位来定义它。正常情况下，内阻小的电池的大电流放电能力强，内阻大的电池放电能力弱。

#### 5) 能量密度

能量密度指在一定的空间或质量物质中储存能量的大小



# 4.指挥控制系统

---

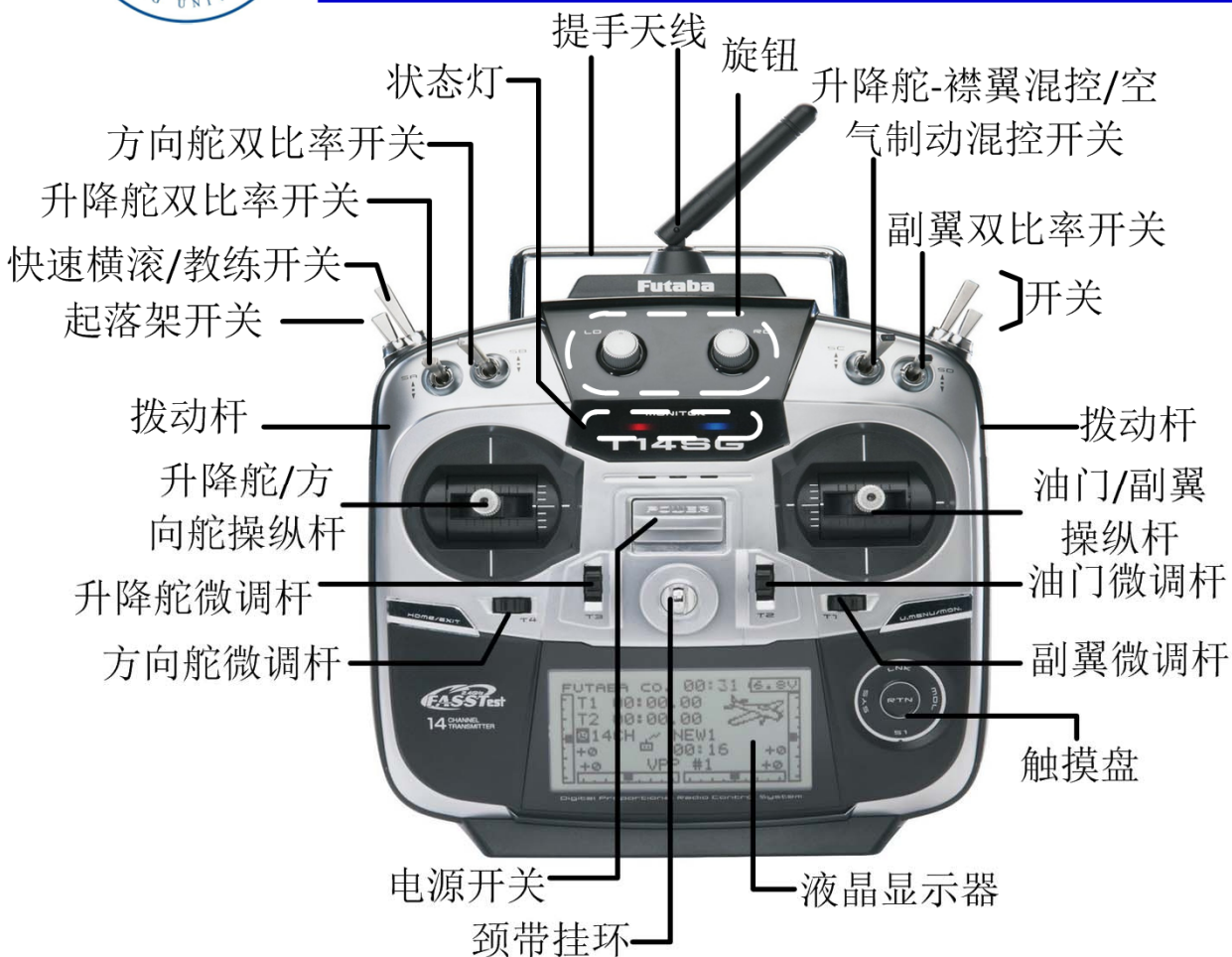
## □ 遥控器和接收器

### (1) 作用

遥控器发送飞控手的遥控指令到接收器上，接收机解码后传给飞控制板，进而多旋翼根据指令做出各种飞行动作。遥控器可以进行一些飞行参数的设置，例如：油门的正反，摇杆灵敏度大小，舵机的中立位置调整，通道的功能定义，飞机时间记录与提醒，拨杆功能设定。高级功能有航模回传的电池电压电流数据等等。



# 4. 指挥控制系统



左边图片定义是针对固定翼的日本手定义。与多旋翼美国手对应关系如下：

固定翼 (日本手)	多旋翼 (美国手)
升降舵	油门，上下运动
方向舵	偏航，偏航运动
油门	俯仰，前后运动
副翼	滚转，左右运动



Futaba接收器

图2.16: Futaba遥控器及定义



# 4.指挥控制系统

## □ 遥控器和接收器

### (2) 指标参数

#### 1) 频率

- 常用的无线电频率是72MHz与2.4GHz，目前采用的最多的是2.4GHz遥控器。
- 2.4GHz技术属于微波领域，有如下几个优点：频率高、同频几率小、功耗低、体积小、反应迅速、控制精度高。
- 2.4G微波的**直线性很好**，换句话说，控制信号的**避让障碍物的性能就差了**。控制模型过程中，发射天线应与接收天线有效的形成直线，尽量避免遥控模型与发射机之间有很大的障碍物（如房屋及仓库等）。



# 4. 指挥控制系统

## □ 遥控器和接收器

### (2) 指标参数

#### 2) 调制方式

- **PCM**是英文Pulse Code Modulation的缩写，中文的意思是：**脉冲编码调制**，又称脉码调制。**PPM**是英文Pulse Position Modulation的缩写，中文意思是：**脉冲位置调制**，又称脉位调制，前者指的是信号脉冲的编码方式，后者指的是高频电路的调制方式。
- **PCM**编码的优点不仅在于其很强的抗干扰性，而且可以很方便的利用计算机编程，不增加或少增加成本，实现各种智能化设计。相比**PCM**编码，**PPM**比例遥控设备实现相对简单，成本较低，但较容易受干扰。



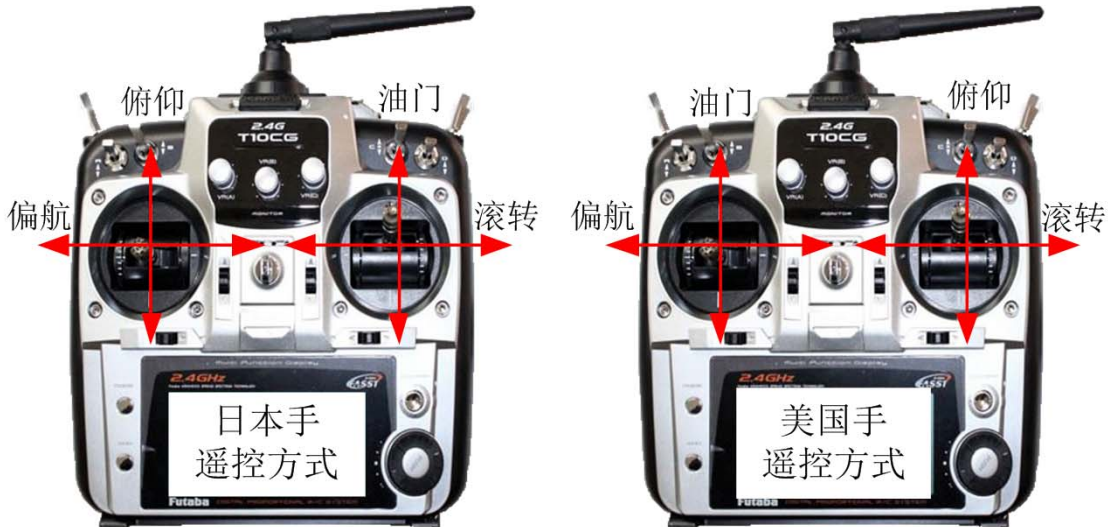


## 4. 指挥控

### □ 遥控器和操

#### (2) 指标参数

#### 3) 通道



油门：控制上下运动，对应固定翼油门杆  
俯仰：控制前后运动，对应固定翼升降舵

偏航：控制机头转向，对应固定翼方向舵  
滚转：控制左右运动，对应固定翼副翼

一个通道对应一个独立的动作，一般有六通道、十通道等。多旋翼在控制过程中需要控制的动作路数有：油门、偏航、俯仰、滚转，所以至少得四个通道遥控器。

#### 4) 控制模式 -- 美国手和日本手

美国手和日本手就是遥控器对应的控制通道的设置不同。美国左手操作杆是“油门+偏航”，右手为“俯仰+滚转”。日本手则是左手“俯仰+偏航”，右手“油门+滚转”。目前，国内多旋翼操控以美国手遥控器为主。



# 4. 指挥控制系统

## □ 遥控器和接收器

### (2) 指标参数

### 5) 油门

- 油门杆不会自动回中，最低点为0%油门，最高点为100%油门。这种油门主要对应的是期望的推力的大小，称**直接式油门**。
- 还有一种油门是松手油门自动回中，属于**增量式油门**。

### 6) 遥控距离

根据功率不同，遥控器控制的距离也有所不同。遥控器上也可以使用带有功率放大（Power Amplifier, PA）模块，带有鞭状天线，可以增大操控距离。





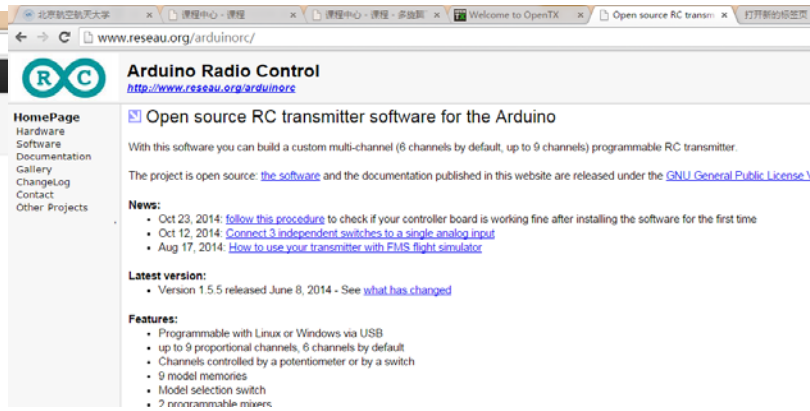
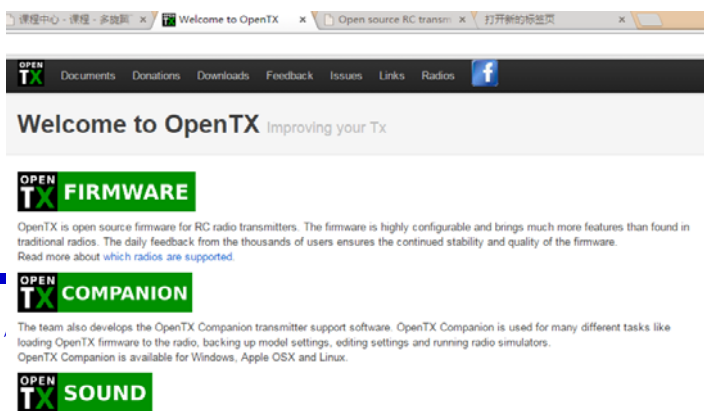
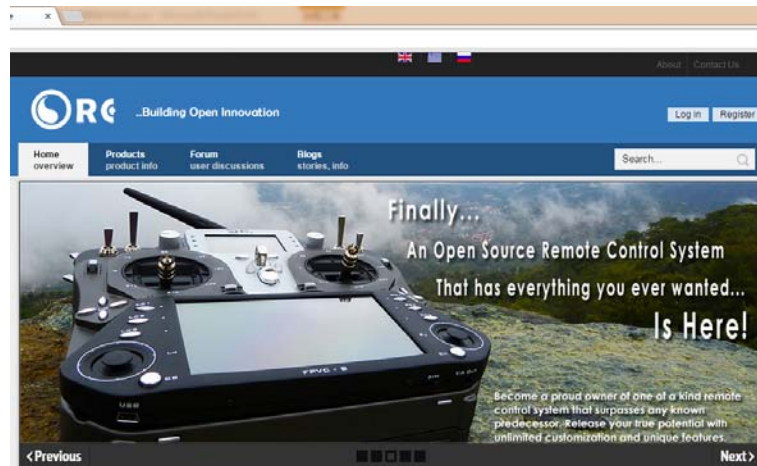
# 4. 指挥控制系统

## □ 遥控器和接收器

### (3) 开源遥控器

针对遥控器，目前也有开源项目，可参见网站

- <http://www.os-rc.com/>
- <http://www.open-tx.org/>
- <http://www.reseau.org/arduino-rc/>
- 这样用户可以根据自己的需求定制自己的遥控器。





# 4. 指挥控制系统

## 自动驾驶仪



飞控板计算芯片



GPS模块

### (1) 组成

多旋翼自动驾驶仪，分为软件部分和硬件部分。包括：

- 1) 全球定位系统 (GPS) 接收器；
- 2) 惯性测量单元 (IMU)，包括三轴加速度计、三轴陀螺仪、电子罗盘（或磁力计），目的是得到多旋翼的姿态信息；
- 3) 气压计和超声波测距模块；
- 4) 微型计算机；
- 5) 接口。



气压计



超声波模块



IMU模块





# 4. 指挥控制系统

## □ 自动驾驶仪

### (2) 作用

1) **感知**。导航就是解决“**多旋翼在哪**”的问题。如何发挥各自传感器优势，得到准确的位置和姿态信息，是自驾仪飞控要做的首要的事情。**对应第七、八、九讲**

2) **控制**。控制就是解决“**多旋翼怎么去**”的问题。首先得到准确的位置和姿态信息，之后根据任务，通过算法计算出控制量，输出给电调，进而控制电机转速。**对应第十、十一、十二讲**

3) **决策**。决策就是解决“**多旋翼去哪儿**”的问题。去哪儿可能是操作手决定的，也可能是为了安全，按照规定流程的紧急处理方案。**对应第十三、十四讲**





# 4. 指挥控制系统

## □ 自动驾驶仪

### (3) 开源自驾仪

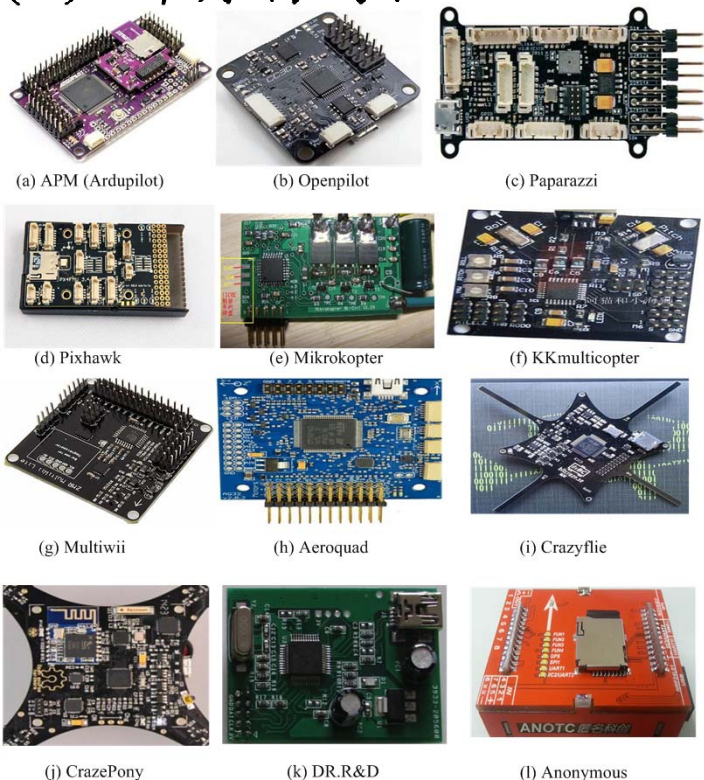


图2.18: 多旋翼开源自驾仪

开源项目 (Open-Source Projects)	网址 (Web site URL)
Ardupilot	<a href="http://ardupilot.com">http://ardupilot.com</a>
Openpilot	<a href="http://www.openpilot.org/">http://www.openpilot.org/</a>
Paparazzi	<a href="http://paparazziuav.org">http://paparazziuav.org</a>
Pixhawk	<a href="https://pixhawk.ethz.ch/">https://pixhawk.ethz.ch/</a>
Mikrokopter	<a href="http://www.mikrokopter.de">http://www.mikrokopter.de</a>
KKmulticopter	<a href="http://www.kkmulticopter.kr/">http://www.kkmulticopter.kr/</a>
Multiwii	<a href="http://www.multiwii.com/">http://www.multiwii.com/</a>
Aeroquad	<a href="http://www.aeroquadstore.com/">http://www.aeroquadstore.com/</a>
Crazyflie	<a href="https://www.bitcraze.io/category/crazyflie/">https://www.bitcraze.io/category/crazyflie/</a>
CrazePony (国内)	<a href="http://www.crazepony.com/">http://www.crazepony.com/</a>
圆点博士 (国内)	<a href="http://www.etootle.com/">http://www.etootle.com/</a>
匿名飞控 (国内)	<a href="http://www.anotc.com/">http://www.anotc.com/</a>
Autoquad	<a href="http://autoquad.org/">http://autoquad.org/</a>
MegaPirate	<a href="http://megapiratex.com/index.php">http://megapiratex.com/index.php</a>
Erlrobot	<a href="http://erlerobotics.com/">http://erlerobotics.com/</a>
MegaPirateNG	<a href="http://code.google.com/p/megapirateng">http://code.google.com/p/megapirateng</a>



# 4. 指挥控制系统

## □ 自动驾驶仪

### (3) 开源自驾仪

开源项目	网址 (Web site URL)
Taulabs	<a href="http://forum.taulabs.org/">http://forum.taulabs.org/</a>
Flexbot	<a href="http://www.flexbot.cc/">http://www.flexbot.cc/</a>
Dronecode(开源无人机航空操作系统)	<a href="https://www.dronecode.org/">https://www.dronecode.org/</a>
Percepto(无人机开源视觉平台)	<a href="http://www.percepto.co/">http://www.percepto.co/</a>
Parrot API(开放SDK)	<a href="https://projects.ardrone.org/embedded/ardrone-api/index.html">https://projects.ardrone.org/embedded/ardrone-api/index.html</a>
3DR DRONEKIT(SDK)	<a href="http://www.dronekit.io/">http://www.dronekit.io/</a>
DJI DEVELOPER(SDK)	<a href="http://dev.dji.com/cn">http://dev.dji.com/cn</a>
DJI MATRICE 100+ DJI Guidance	<a href="https://developer.dji.com/cn/matrice-100/">https://developer.dji.com/cn/matrice-100/</a>
SDK for XMission(SDK)	<a href="http://www.xaircraft.cn/en/xmission/developer">http://www.xaircraft.cn/en/xmission/developer</a>
EHANG GHOST SDK(SDK)	<a href="http://dev.ehang.com/">http://dev.ehang.com/</a>



# 4. 指挥控制系统

Description	尺寸(mm)	重量(g)	处理器	处理频率 (MHz)	陀螺仪	加速度计	磁力计	气压计
APM (Ardupilot)	66×40.5	23	ATmega2560	16	MPU-6000	MPU-6000	HMC5843	MS5611
Openpilot	36×36	8.5	STM32F103CB	72	ISZ/IDC-500	ADX330	HMC5843	BMP085
Paparazzi(Lisa/M)	51×25	10.8	STM32F105RCT6	60	MPU-6000	MPU-6000	HMC5843	MS5611
Pixhawk	40×30.2	8	LPC2148	60	ISZ/IDC-500	SCA3100-D04	HMC5843	BMP085
Mikrokopter	44.6×50	35	ATmega644	20	ADXRS610	LIS344ALH	KMZ51	MPX4115A
Kkmulticopter	49×49	11.7	ATmega168	20	ENC-03	—	—	—
Multiwii	N/A <sup>a</sup>	N/A <sup>a</sup>	Arduino <sup>b</sup>	8-20	ISZ/IDC-650	LIS3L02AL	HMC5883L	BMP085
Aeroquad	N/A <sup>a</sup>	N/A <sup>a</sup>	Arduino <sup>b</sup>	8-20	ITG3200	ADXL345	HMC5883L	BMP085
Crazyflie 2.0	90×90 (机体)	19	STM32F405	168	MPU-9250	MPU-9250	MPU-9250	LPS25H
CrazePony-II(4版)	38.9*39.55	20	STM32f103T8U6	72	MPU6050	MPU6050	HMC5883L	MS5611
圆点博士 (2015) IV	33x33	300 (整机)	STM32F103	72	MPU6050	MPU6050	HMC5883L	超声波HC-SR04
匿名飞控V2版			STM32F407	168	MPU6050	MPU6050	AK8975	MS5611

注：a:无法确定。因为Multiwii和Aeroquad支持动态硬件配置，因此尺寸与结构相关。b:飞控板是基于Arduino开发，因此实际用的处理器可改变。表中内容部分参考了文献Lim H, Park J, Lee D, et al. Build your own quadrotor: Open-source projects on unmanned aerial vehicles. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 2012, 19(3): 33-45.



# 4. 指挥控制系统

## □ 地面站

### (1) 作用

- 地面站软件是多旋翼地面站的重要组成部分
- 操作员通过地面站系统提供的鼠标、键盘、按钮和操控手柄等外设来与地面站软件进行交互
- 预先规划好本次任务的航迹，对多旋翼的飞行过程中飞行状况进行实时监控和修改任务设置以干预多旋翼飞行
- 任务完成后还可以对任务的执行记录进行回放分析



图2.19: APM地面站软件界面





# 4. 指挥控制系统

## □ 地面站

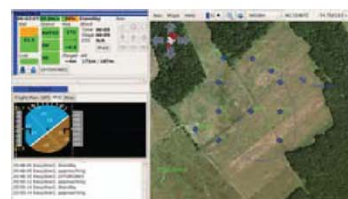
### (2) 开源地面站



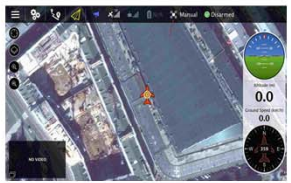
(a) MissionPlanner (Ardupilot)



(b) Openpilot



(c) Paparazzi



(d) QGroundControl (PX4)



(e) Mikrokopter



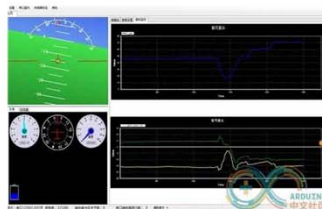
(f) Multiwii



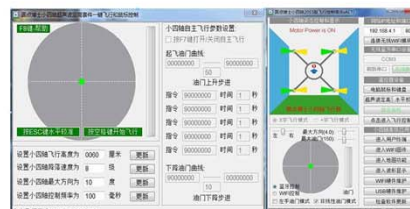
(g) Aeroquad



(h) Crazyflie



(i) CrazePony



(j) D.R R&D

图2.20: 部分开源地面站软件截图





# 4. 指挥控制系统

## □ 数传

### (1) 作用

数传电台是指借助**DSP**技术和无线电技术实现的高性能专业数据传输电台。采用数字信号处理、**数字调制解调**、**具有前向纠错、均衡软判决**等功能的无线数据传输电台。数传电台一端接入计算机（地面站软件），一端接入多旋翼自驾仪，通讯采用一定协议进行，从而保持自驾仪与地面站的**双向**通讯。



图2.21: 3DR数传实物图

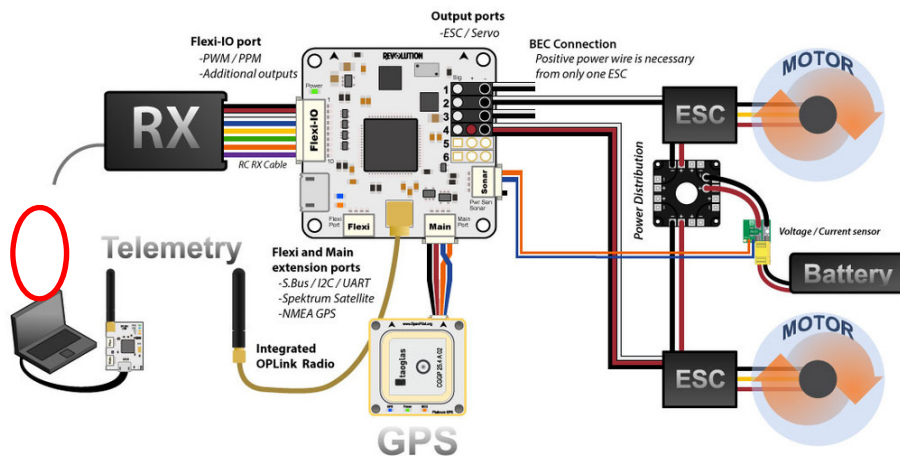


图2.22: Openpilot 数传连接示意图



# 4. 指挥控制系统

## □ 数传

### (2) 指标

1) 频率。可选择：433MHz或915MHz。美洲地区可用915 MHz，欧洲和中国等一般用**433 MHz**，对915 MHz频段是禁用的。

2) 传输距离

3) 传输速率

### (3) 通讯协议

- 通信协议又称通信规程，是指通信双方对数据传送控制的一种约定。只要按照一定的通讯协议，可以使得地面站软件通用起来，可以兼容不同的自驾仪。
- MAVLink通讯协议是一个为微型飞行器设计的非常轻巧的、只由头文件构成的信息编组库。MAVLink最初由劳伦兹·迈耶根据**LGPL (Lesser General Public License)** 许可在2009年初发表。Openpilot自驾仪采用了UAVTalk协议与地面站进行通讯。



## 5.本讲小结

---

### (1) 多旋翼三大系统:

- 机架 (对应第三讲)
- 动力系统 (对应第四讲)
- 指挥控制系统 (导航模块 (对应第七、八、九讲)、控制模块 (对应第十、十一、十二讲)、决策模块 (对应第十三、十四讲))

(2) “麻雀虽小，五脏俱全”，无人车、无人船结构类似

(3) 熟悉多旋翼的组成有利于选择相应的器件，也有利于提高飞行性能或判断飞行事故产生的原因



# 资源

---

(1) 可靠飞行控制研究组主页课程中心(全部课件下载)

<http://rfly.buaa.edu.cn/course>

(2) 关注可靠飞行控制研究组公众号 buaarfly(文章、资讯等)

(3) 多旋翼设计与控制交流QQ群:183613048

(4) 视频课程(MOOC)同步发布, 网易云课堂搜索 “多旋翼”

<http://study.163.com/course/introduction/1003715005.htm>

(5) 同名中文书本教材《多旋翼飞行器设计与控制》即将在电子工业出版社出版, 敬请期待

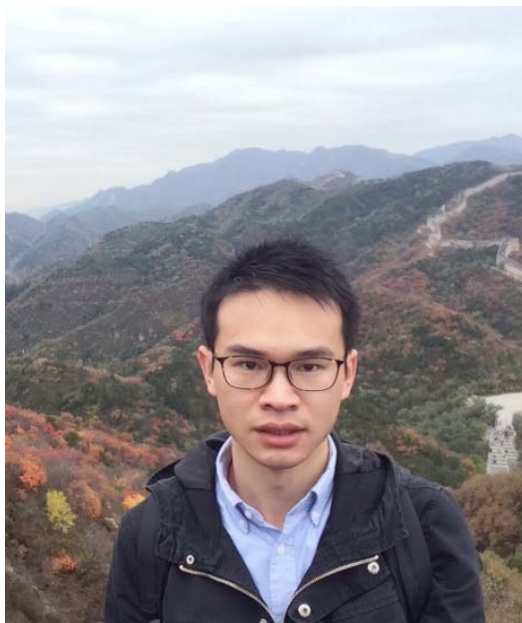
(6) 有疑问可联系课程总助教戴训华, 邮箱: [dai@buaa.edu.cn](mailto:dai@buaa.edu.cn)



# 致谢

---

感谢控制组同学



戴训华

为本节课程准备作出的贡献。





---

# 谢谢！



---

# 多旋翼飞行器设计与控制

## 第三讲 机架设计

全权 副教授

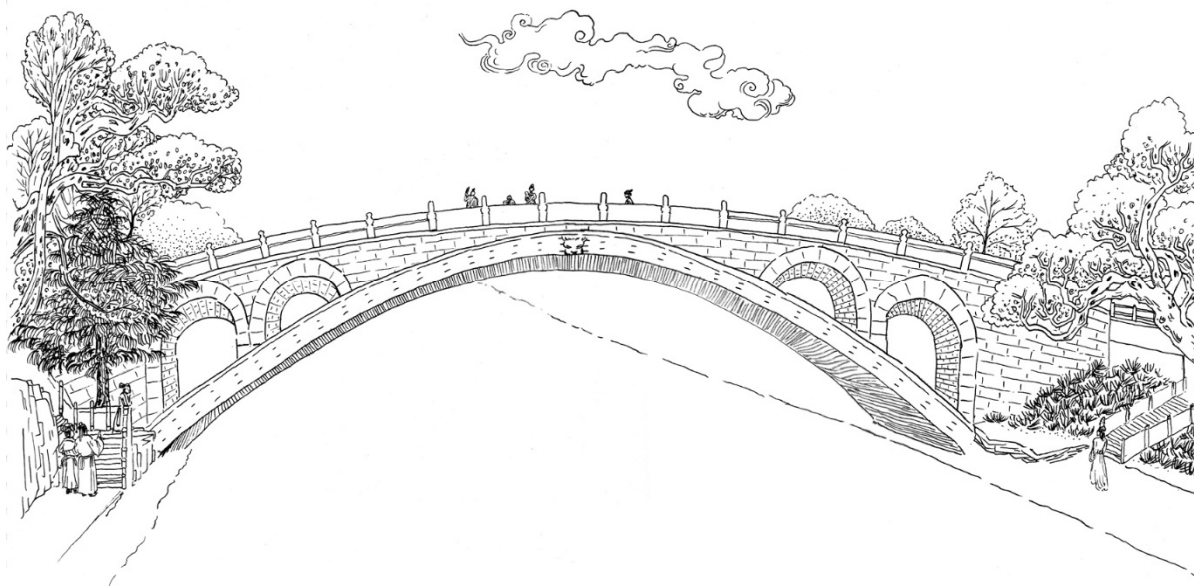
qq\_buaa@buaa.edu.cn

自动化科学与电气工程学院

北京航空航天大学



# 东方智慧



赵州桥



# 核心问题

---

在多旋翼设计中需要注意些什么？



# 大纲

---

1. 布局设计

2. 结构设计

3. 本讲小结





# 1. 布局设计

## □ 机身基本布局

### (1) 交叉型

按飞行方向与机身关系，  
又分为+字型和X字型。

目前常用的X字型结构，因为：

- 机动性更强
- 前视相机的视场角不容易被遮挡。

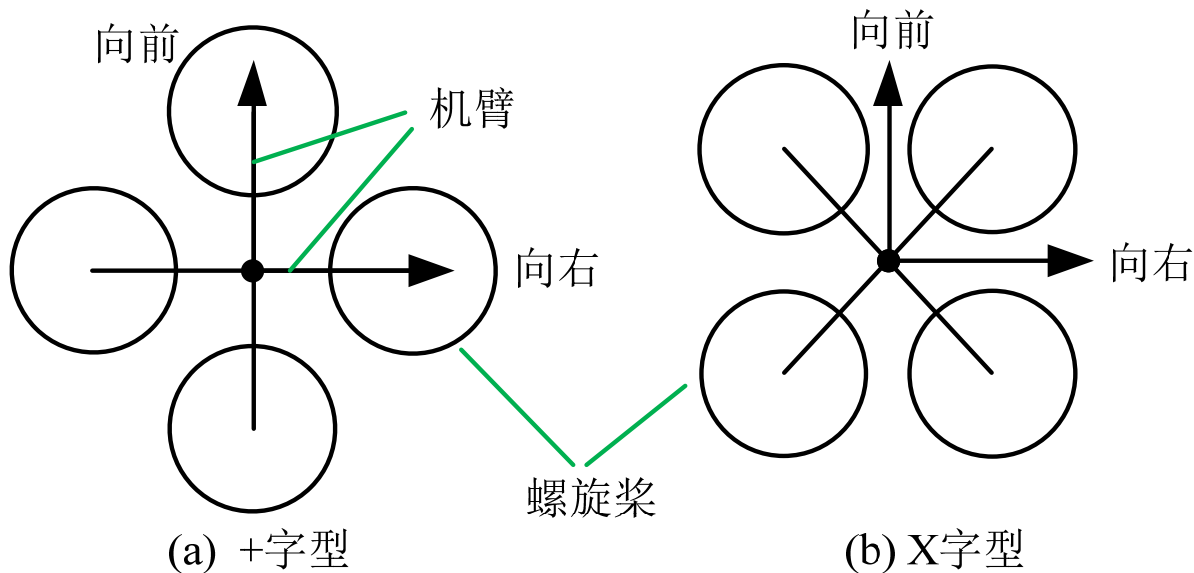


图3.1: 传统四旋翼的结构形式

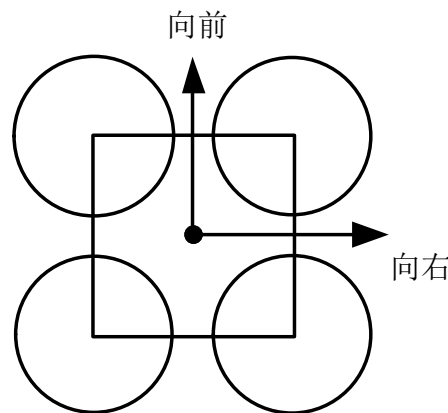


# 1. 布局设计

## □ 机身基本布局

### (2) 环型

- 与传统交叉型机架相比，其刚性更大
- 可较大程度避免飞行中机架所产生的振动，增加了机架结构强度。
- 增加了机架的重量，转动惯量，灵活性降低。



(a) 示意图



(b) 实物图

图3.2: 环形四旋翼的结构形式



# 1. 布局设计

## □ 旋翼安装

### (1) 常规布局 and 共轴双桨

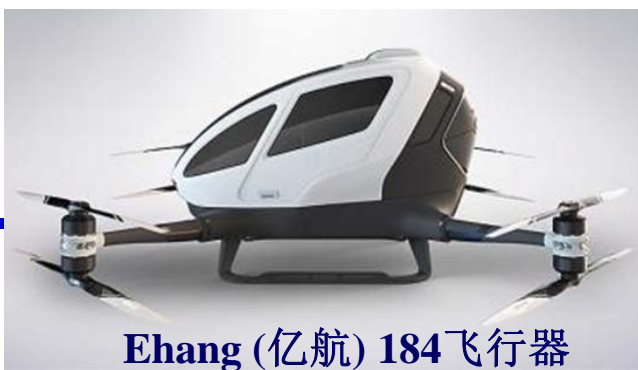
#### 1) 共轴双桨优点

- 不增加多旋翼整体尺寸
- 减少螺旋桨对相机视场的遮挡

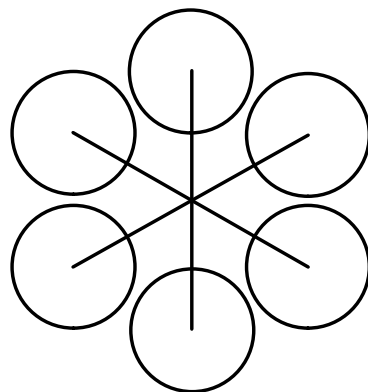
#### 2) 注意

- 会降低单个螺旋桨的效率。大概共轴双桨只相当于1.6个螺旋桨
- 根据实验[1]推荐  $h/r_p > 0.357$

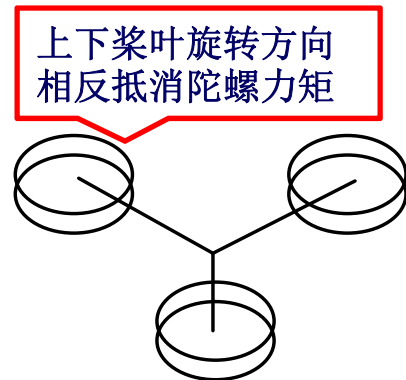
[1] Bohorquez F. Rotor hover performance and system design of an efficient coaxial rotary wing micro air vehicle [Ph. D. dissertation], University of Maryland College Park, USA, 2007.



Ehang (亿航) 184 飞行器



(a) 常规形式



(b) 共轴双桨形式

图3.3: 常规布局 and 共轴双桨布局示意图

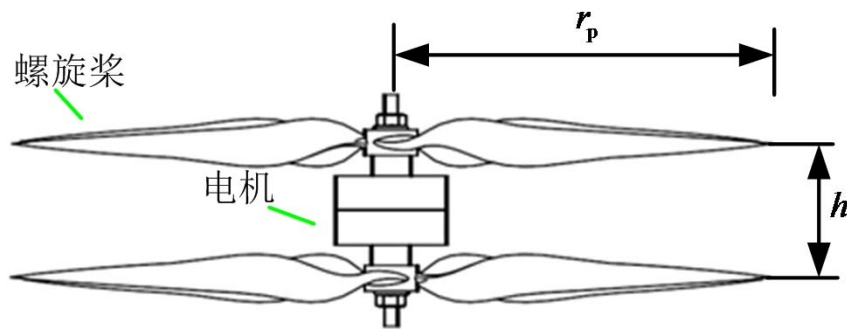


图3.4: 共轴双桨的简单连接示意图



# 1. 布局设计

## □ 旋翼安装

### (2) 桨盘角度

#### 1) 螺旋桨桨盘水平装配

- 简单
- 需云台使相机保持水平

#### 2) 螺旋桨桨盘倾斜装配

- 至少六个桨 (为什么?)
- 无需云台

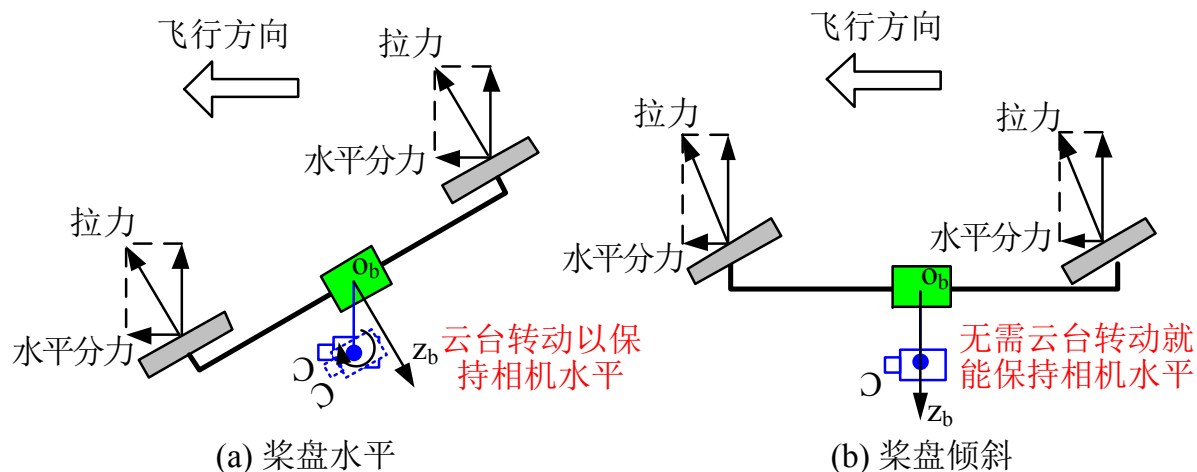


图3.5: 桨盘水平和桨盘倾斜多旋翼的前飞方式



图3.6: 桨盘倾斜多旋翼CyPhyLVL1



# 1. 布局设计

## □ 旋翼安装

### (2) 桨盘角度

视频: [CyPhyLVL1飞行视频](#)







# 1. 布局设计

## □ 旋翼安装

### (3) 旋翼朝向



大疆  
Phantom



极飞XMission



深圳零度Xplorer

桨盘位于机臂位置上方:

- 1) 螺旋桨产生拉力
- 2) 着陆阶段不易碰到障碍, 而损伤桨
- 3) 遮挡相机视野小



亿航Ghost

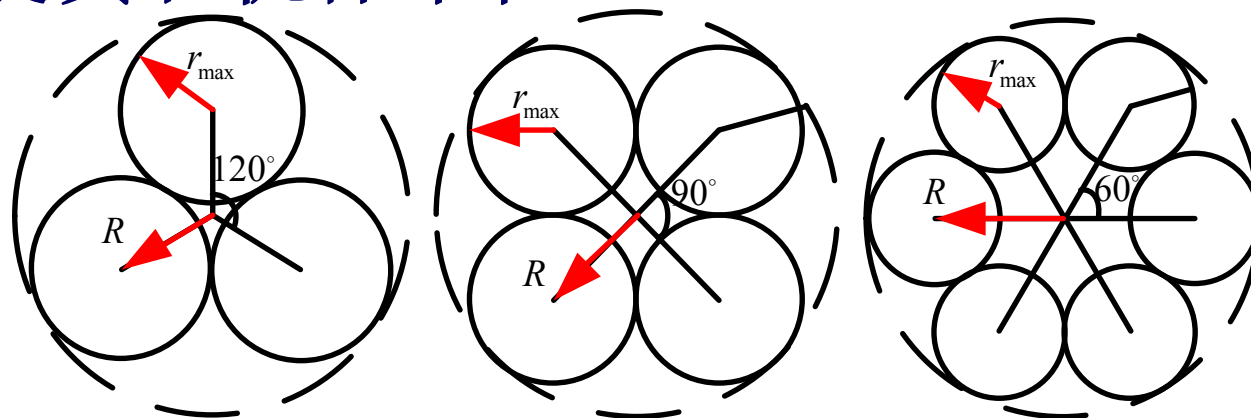
桨盘位于机臂位置下方

- 1) 螺旋桨产生推力
- 2) 下洗气流完整, 防雨, 气流低于飞控气压计高度准确, 不脱桨



# 1. 布局设计

## □ 旋翼和机体半径



(a) Y6六旋翼（共轴双桨）      (b) 传统四旋翼      (c) 传统六旋翼

图3.7: 多旋翼机体半径与最大旋翼半径示意图

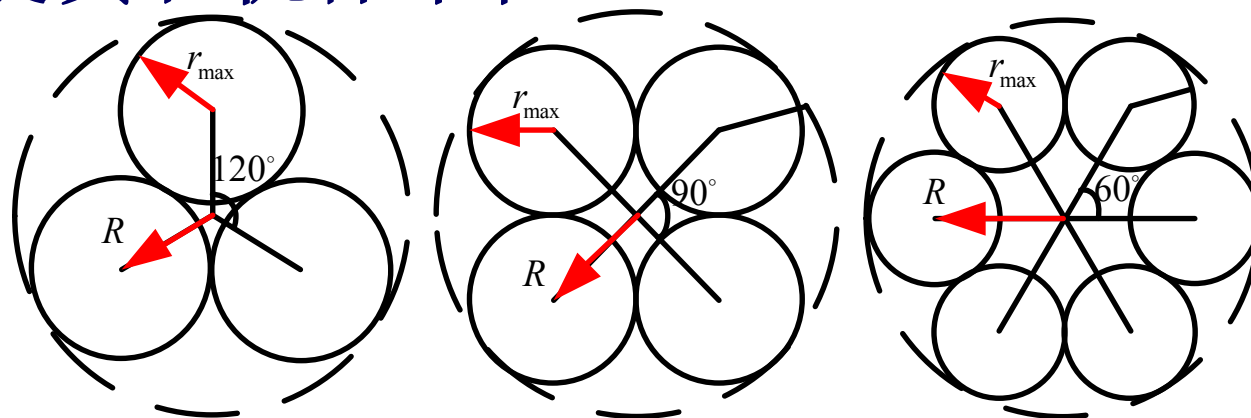
$n_r$  机臂旋翼飞行器，机架半径  $R$  与旋翼最大半径  $r_{\max}$  存在如下关系 ( $\theta$  表示轴间夹角)

$$R = \frac{r_{\max}}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{r_{\max}}{\sin \frac{180^\circ}{n_r}}$$



# 1. 布局设计

## □ 旋翼和机体半径



(a) Y6六旋翼（共轴双桨）

(b) 传统四旋翼

(c) 传统六旋翼

图3.7: 多旋翼机体半径与最大旋翼半径示意图

实验[2]表明，当桨与桨之间的距离从1个桨半径到0.1个桨半径变化时，气流对飞行器的整体性能影响很小。因此，为了使飞行器尽可能的紧凑，可以取螺旋桨半径 $r_p$ 满足

$$r_{max} = 1.05r_p \sim 1.2r_p$$

[2] Harrington A M. Optimal Propulsion System Design for A Micro Quad Rotor [Master dissertation]. University of Maryland College Park, USA, 2011.



# 1. 布局设计

## □ 尺寸和机动性关系

$T_p, M_p$ 为单个螺旋桨的拉力与力矩,  $T, M$ 为多旋翼总拉力与力矩,  $\omega$ 为桨叶转速,  $R$ 为多旋翼机架半径,  $J$ 为多旋翼转动惯量,  $r_p$ 为螺旋桨半径。

减小多旋翼机体尺寸对多旋翼惯性、有效负载具有很大影响, 并最终影响最大可达角加速度 $\alpha$ 和位移加速度 $a$ 。

$$T_p = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 C_T \rho \omega^2 (2r_p)^4$$

$$M_p = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 C_M \rho \omega^2 (2r_p)^5$$

$$\begin{cases} T \sim T_p \\ M_{\text{pitch,roll}} \sim T_p \cdot R \\ M_{\text{yaw}} \sim M_p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T \sim \omega^2 R^4 \\ M \sim \omega^2 R^5 \end{cases}$$

$$m \sim R^3, J \sim R^5$$

$$a = \frac{T}{m} \sim \frac{\omega^2 R^4}{R^3} = \omega^2 R$$

$$\alpha = \frac{M}{J} \sim \frac{\omega^2 R^5}{R^5} = \omega^2$$

(1) 马赫数尺度限制(这里符号“ $\sim$ ”表示“在同一数量级”)

$$\omega \sim 1/r_p \Rightarrow a \sim \frac{1}{R}, \alpha \sim \frac{1}{R^2}$$

(2) 弗劳德数尺度限制

$$v_b^2 / Rg \sim \omega^2 r_p^2 / Rg \sim 1 \Rightarrow \omega \sim 1/\sqrt{r_p} \Rightarrow a \sim 1, \alpha \sim \frac{1}{R}$$

尺寸越大  
机动性越差



# 1. 布局设计

## □ 重心位置

在设计时，需要将重心设计到多旋翼的中心轴上。另外的一个问题是将重心设计到多旋翼螺旋桨形成的桨盘平面的上方还是下方呢？



(a) 重心在下侧



(b) 重心在上侧

图3.8: Freefly多旋翼的两种相机安装方式



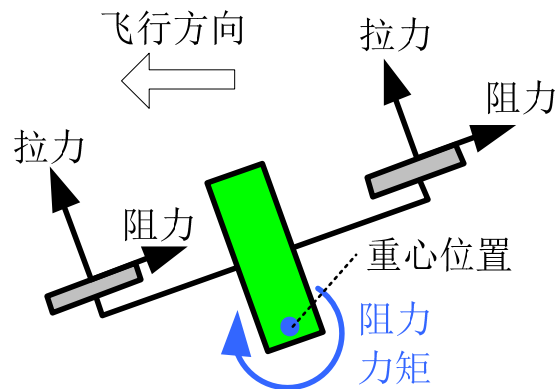


# 1. 布局设计

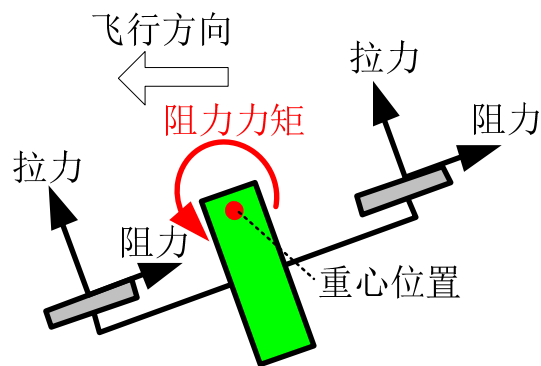
## □ 重心位置

### (1) 多旋翼前飞情形

- 在右图中，诱导的来流会产生平行于桨盘平面的阻力
- 如图(a)，如果多旋翼重心在桨盘平面下方，那么阻力形成的力矩会促使多旋翼俯仰角转向0度方向
- 如图(b)，若多旋翼重心在桨盘平面上，那么阻力形成的力矩会促使多旋翼俯仰角朝发散方向发展，直至翻转。因此，当多旋翼前飞时，重心在桨盘平面的下方会使前飞运动稳定。



(a) 前飞时重心偏低



(b) 前飞时重心偏高

图3.9: 多旋翼受力简化图



# 1. 布局设计

## □ 重心位置

### (2) 多旋翼风干扰情形

- 当阵风吹来，诱导的来流会产生平行于桨盘平面的阻力
- 如图(c)，如果多旋翼重心在下，那么阻力形成的力矩会促使多旋翼俯仰角朝发散的方向发展，直至翻转。
- 如图(d)，若多旋翼重心在上，那么阻力形成的力矩会促使多旋翼俯仰趋向于0。因此，当多旋翼受到外界风干扰时，重心在桨盘平面的上方可以抑制扰动。

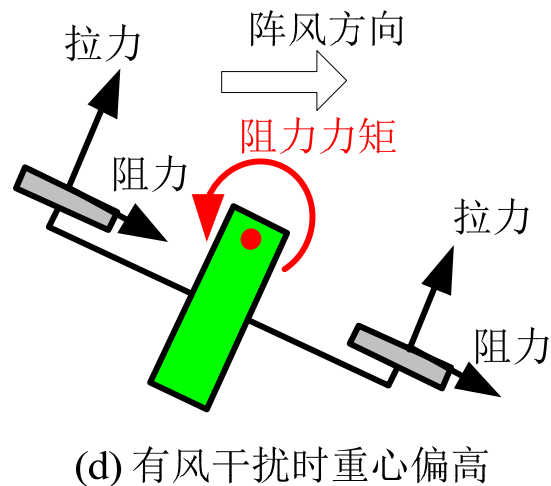
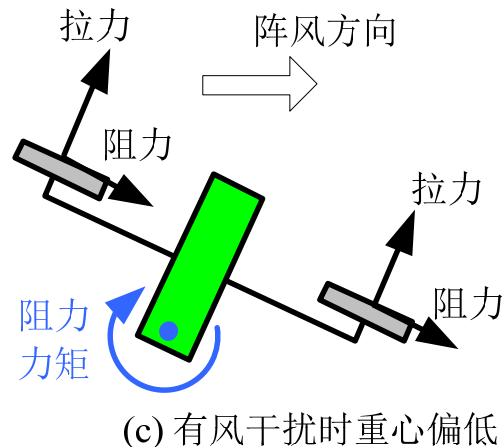


图3.9: 多旋翼受力简化图



# 1. 布局设计

## □ 重心位置

### (3) 结论

- 无论重心在桨盘平面的上方或下方都不能使多旋翼稳定。
- 需要通过反馈控制将多旋翼平衡。然而，如果重心在桨盘平面很靠上的位置，会使多旋翼某个运动模态很不稳定。因此，实际中建议将重心靠近多旋翼的中心，或者根据需求可以稍微靠下。这样控制器控制起来更容易些。关于更具体的内容可参考文献[3]。

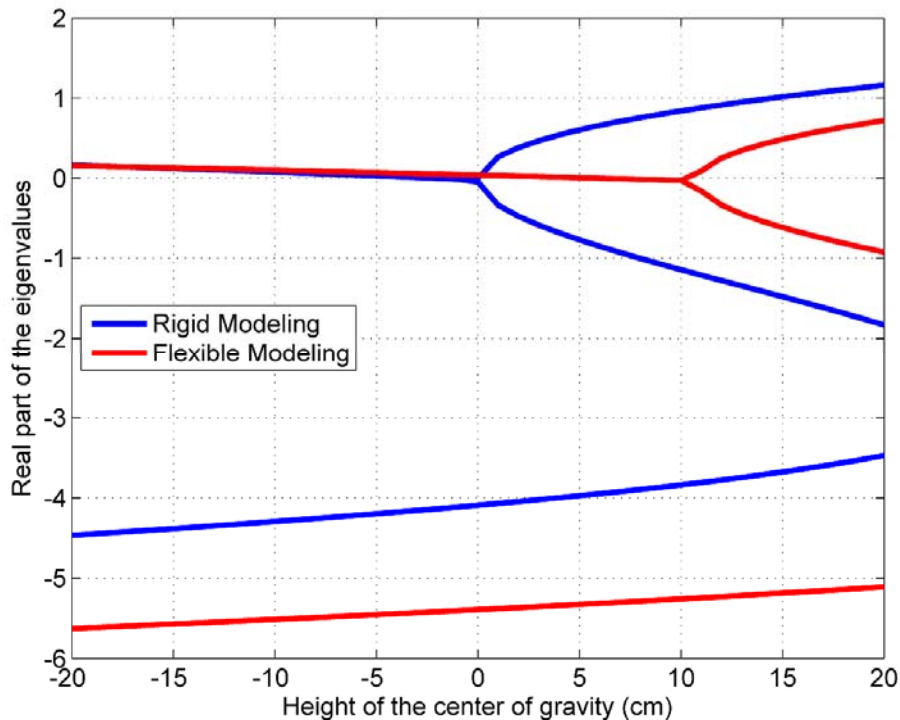


图3.10: 重心高度与稳定性的关系[3, Fig.7]

[3] Bristeau P J, Martin P, Salaun E, et al. The role of propeller aerodynamics in the model of a quadrotor UAV. In: Control Conference (ECC). European: IEEE, 2009. 683-688



# 1. 布局设计

## □ 自驾仪安装位置

理想位置应在多旋翼的中心。若自驾仪离飞行器中心较远，由于存在离心加速度和切向加速度，将会引起加速度计的测量误差，即“**杆臂效应**”。

### (1) 标准安装方位



图3.11: 飞控板安装位置

### (2) 代用安装方位

Pixhawk/APM2 自驾仪可在超过30度角的方位安装在机架上，需要通过相应的软件设置重新得到自驾仪安装在机体上的标准方位。



# 1. 布局设计

## □ 气动布局

对外形进行设计主要是为了降低飞行时的阻力。按其产生的原因不同可分为

(1) 摩擦阻力

(2) 压差阻力

(3) 诱导阻力

(4) 干扰阻力。要减少该阻力，需要妥善考虑和安排各部件之间的相对位置关系，部件连接处尽量圆滑过渡，减少漩涡产生。

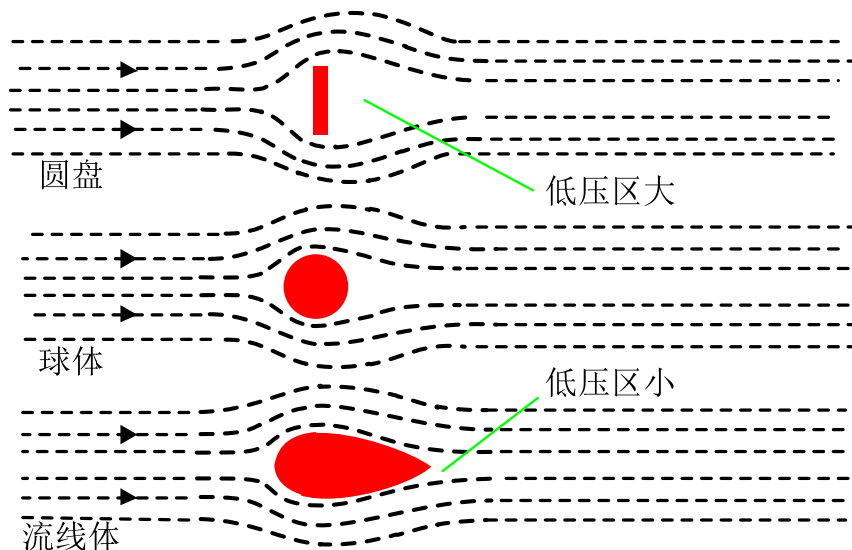


图3.12: 压差阻力示意图





# 1. 布局设计

## □ 气动布局

设计建议:

(1) 需要考虑多旋翼前飞时的倾角, 减少最大迎风面积。

(2) 并设计流线型机身

(3) 考虑和安排各部件之间的相对位置关系, 部件连接处尽量圆滑过渡, 飞机表面也要尽量光滑

(4) 通过CFD仿真计算阻力系数, 不断优化



(a) 大疆Inspire 1



(b) 极飞Xmission



(c) Microdrones MD4-3000



(d) DHL Parcelcopter

图3.13: 具有一定外形设计的多旋翼



## 2.结构设计

---

### □ 机体基本设计原则

- (1) 刚度、强度满足负载要求，机体不会发生晃动、弯曲；
- (2) 满足其他设计原则下，重量越轻越好；
- (3) 合适的长宽高比，各轴间距、结构布局适宜；
- (4) 飞行过程中，满足其他设计原则下，保证机体振动越小越好；
- (5) 美观耐用。



## 2.结构设计

### □ 减振设计

#### (1) 减振意义

1) 飞控板上的加速度传感器对振动十分敏感，而加速度信号直接关系到姿态角和位置的估计，因此十分重要。具体地：

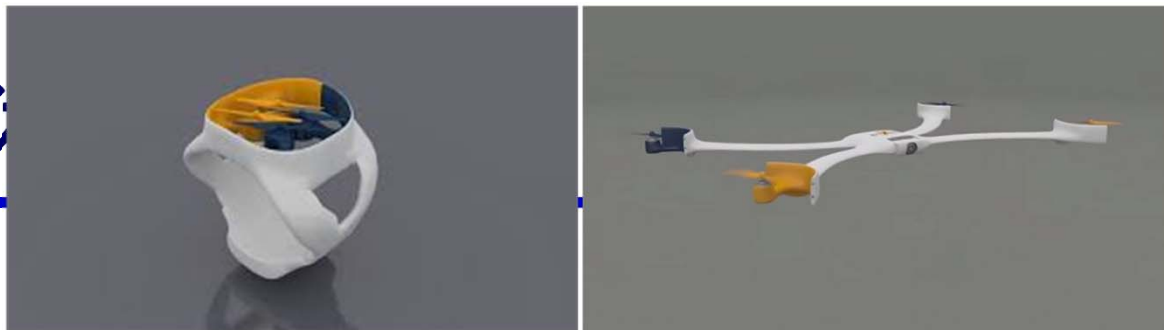
- 加速度信号直接关系到姿态角和姿态角速率的估计。
- 飞控程序融合了加速度计和气压计、GPS数据来估计飞行器的位置。而在飞行器定高、悬停、返航、导航、定点和自主飞行模式下，位置估计很关键

2) 减振另外一个重要的作用是提高成像的质量，这样就可以不依赖云台。这对于多旋翼的小型化至关重要。



## 2.结构设计

### □ 减振设计



(a) 收起状态

(b) 展开状态

图3.15: Nixie可穿戴四旋翼概念机

### (2) 振动的主要来源

机体振动主要来源于机架变形、电机和螺旋桨不对称。

#### 1) 机架

- 机架变形特别是机臂变形会导致产生异步振动，所以机臂的刚度越大越好；
- 一般的碳纤维多旋翼机架具有足够的抗扭特性和抗弯特性；
- 相比而言，铝制机架刚性更好，但更重；
- 要保证电机与机臂的安装连接，以及机臂与控制云台的安装连接是安全可靠的，并具有一定的减震缓冲效果。



## 2.结构设计

---

### □ 减振设计

#### (2) 振动的主要来源

##### 2) 电机

- 电机能够平滑稳定运行；
- 桨夹需要和电机轴承、螺旋桨中心共轴，避免电机转动时产生偏心力；
- 电机平衡。





## 2.结构设计

---

### □ 减振设计

#### (2) 振动的主要来源

#### 3) 螺旋桨

- 螺旋桨平衡调节器；
- 螺旋桨应匹配机架型号和机体重量，并在顺逆时针旋转时具有相同的韧性；
- 碳纤维刚度大，但旋转时存在安全隐患；
- 低速大螺旋桨相比于高速小桨效率更高，但是振动幅度较大。



## 2.结构设计

### 减振设计

#### (3) 振动强度约束

- 1) 一般在多旋翼横向振动强度低于0.3g，在纵向振动要求低于0.5 g。
- 2) 实际工程中要求所有轴振动强度在±0.1g之内。

若以上问题都考虑了，那么只需要再考虑其他减振手段了

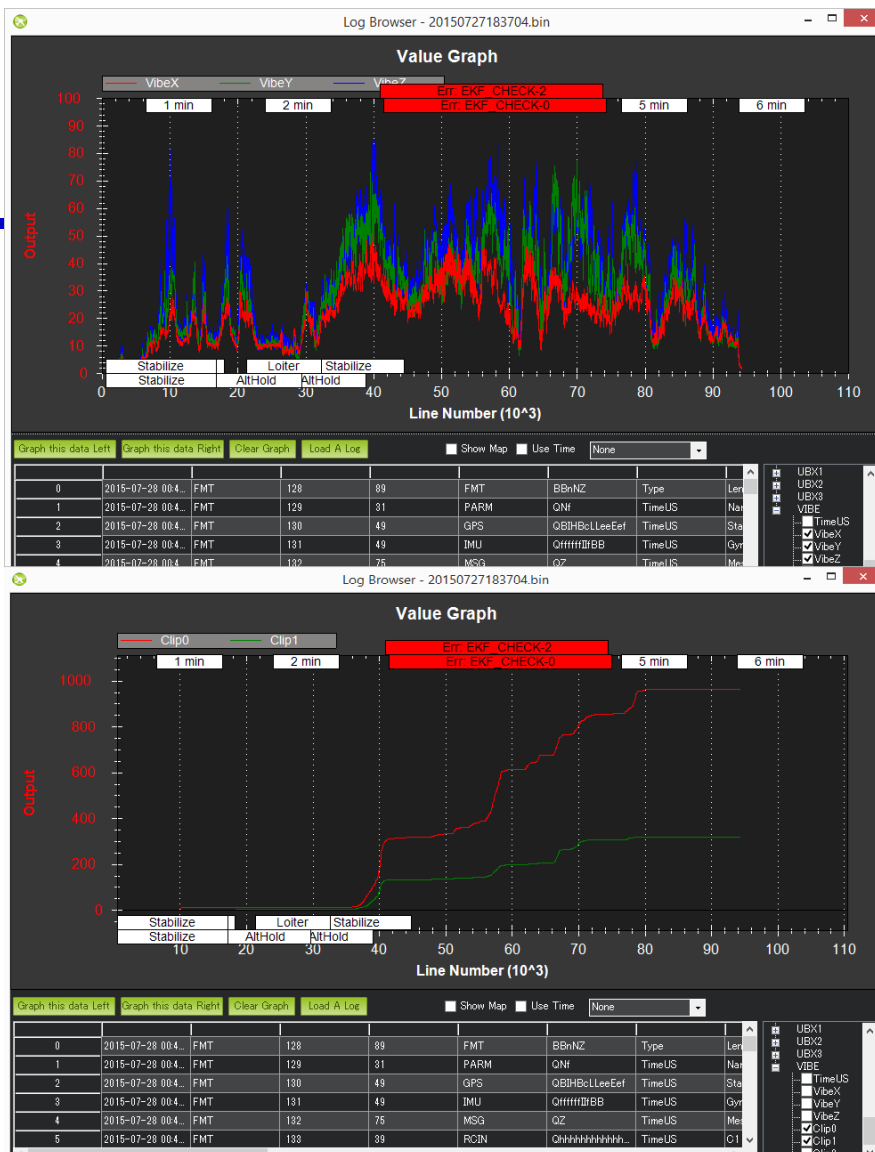
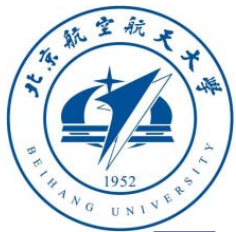


图3.16: 噪声大时的位置估计，来源网站 [ardupilot.org](http://ardupilot.org)



## 2.结构设计

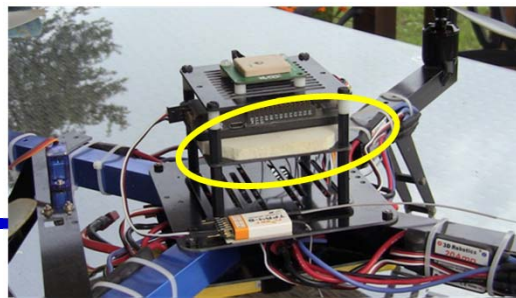
### □ 减振设计

#### (4) 自驾仪与机架的隔振

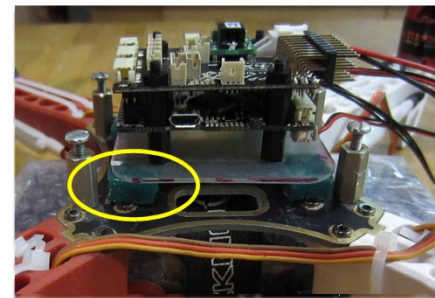
1) 传统做法上，双面泡沫胶带和尼龙扣已被应用于把自驾仪固定在机架上。

2) 在许多情况下，因为自驾仪质量很小，导致泡沫胶带或尼龙扣不能起到足够的减振作用。如右图，已被测试过的可行的隔振方案有：**Dubro**泡沫、凝胶垫、O形环悬挂安装和耳塞式安装等。

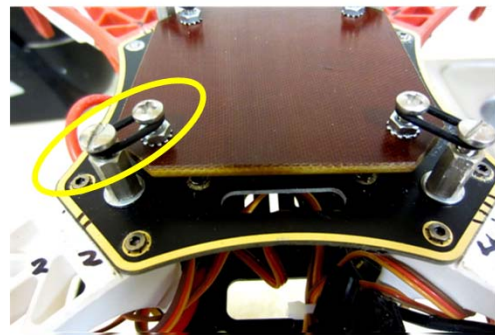
3) 目前市面上也有飞控减振器，。它由2块玻纤支架，4个减震球和2块泡沫棉胶垫组成。



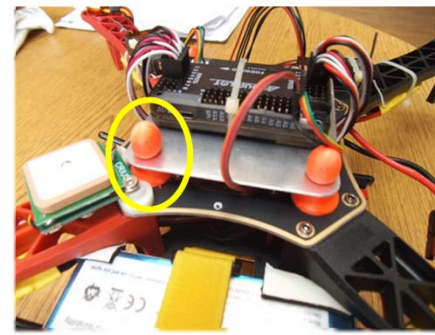
(a) 泡沫



(b) 凝胶垫



(c) O型环



(d) 耳塞式

图3.17: 隔振方案,来源 [ardupilot.org](http://ardupilot.org)



图3.08: 减振器



## 2.结构设计

### □ 减噪设计

#### (1) 螺旋桨噪声的主要危害

1) 多旋翼机身将处于螺旋桨所直接辐射的声场中，各灵敏传感器可能会受到噪声的影响而失真。

2) 噪声影响周围飞行环境，产生噪声污染。特别是多旋翼在居民区飞行时产生的噪音。

3) 若考虑不周，螺旋桨辐射的噪声所诱发的机体结构振动与声疲劳，有可能严重影响飞机的安全性。

4) 小型多旋翼出于隐秘侦查的需求，需要保持飞行时的足够安静。



## 2.结构设计

### □ 减噪设计

#### (1) 螺旋桨发声原理

##### 1) 旋转噪声

- 具有一定厚度的螺旋桨桨叶周期性地扫过周围空气介质，并导致空气微团的周期性非定常运动，于是就产生了**厚度噪声**；
- **负载噪声**是拉力噪声与阻力噪声的组合，是由于桨叶叶面的压力场变化而引起的。

##### 2) 宽带噪声

螺旋桨的宽带噪声是由桨叶与湍流之间相互作用产生的桨叶负载随机变化引起。

对于飞行器螺旋桨和各类叶轮机械来说，其共同特征是由旋转叶片发声。高速旋转的螺旋桨会导致气流脉动的产生，而强烈脉动的气流会以噪声的形式向外释放。一般而言，螺旋桨噪声可进一步区分为旋转噪声和宽带噪声。





## 2.结构设计

### □ 减噪设计

#### (2) 减噪措施

- 1) 对于多旋翼来说增大**桨距**或**桨叶直径**可以有效减小叶尖速度，从而减弱桨叶叶尖失速产生的噪声；
- 2) 通过减小桨叶的总体积，我们就可以减小桨叶剖面的相对**厚度**和弦长，从而大幅度降低厚度噪声；
- 3) 对于给定的拉力设计要求，增加螺旋**桨叶数**可以减小叶片尺寸和转速，从而降低翼尖线速度，减弱叶片的噪声辐射；
- 4) 通过设计改进**桨叶形状**，将噪声功率向内径方向移动来实现降噪；
- 5) 机载的声传感器可以探测到某个螺旋桨所产生的噪声，通过**闭环反馈**，系统可以利用另一个螺旋桨进行相应的抗噪，从而抵消所产生的噪声



## 3.本讲小结

---

(1) 设计有特色的飞行器构型，让人容易识别。

(2) 减振方面，因为机体振动主要来源于机架变形、电机和螺旋桨不对称，所以在机架重量和尺寸相同情况下，尽量保证机架拥有更强的刚度，选择做工优良的电机和螺旋桨。为了防止针对对飞控或者摄像设备的影响，需要进一步考虑加入减振云台。

(3) 在减噪方面，主要通过设计新型的螺旋桨来达到。

这一讲，我们仅仅给出了一些设计原则，而没有具体的设计方法。那么，在同等性能要求下，**如何设计阻力最小、振动最小、噪声最小的多旋翼呢？**在多旋翼外型大同小异的今天，这些可能就是未来可以改进的方向之一。



# 资源

---

(1) 可靠飞行控制研究组主页课程中心(全部课件下载)

<http://rfly.buaa.edu.cn/course>

(2) 关注可靠飞行控制研究组公众号 buaarfly(文章、资讯等)

(3) 多旋翼设计与控制交流QQ群:183613048

(4) 视频课程(MOOC)同步发布, 网易云课堂搜索 “多旋翼”

<http://study.163.com/course/introduction/1003715005.htm>

(5) 同名中文书本教材《多旋翼飞行器设计与控制》即将在电子工业出版社出版, 敬请期待

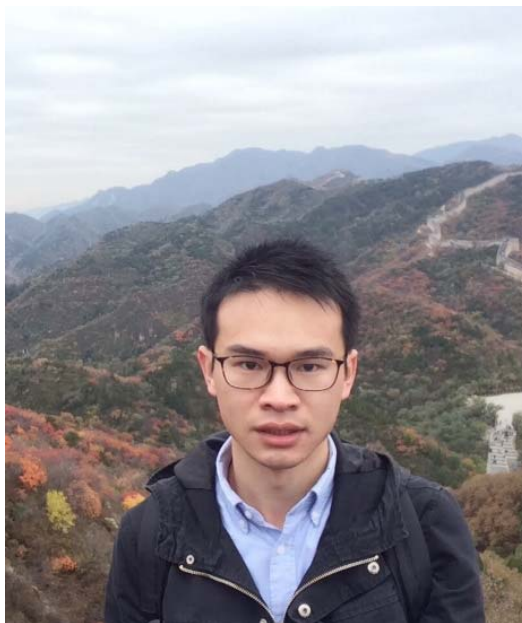
(6) 有疑问可联系课程总助教戴训华, 邮箱: [dai@buaa.edu.cn](mailto:dai@buaa.edu.cn)



# 致谢

---

感谢控制组同学



戴训华

为本节课程准备作出的贡献。



谢谢！





---

# 多旋翼飞行器设计与控制

## 第四讲 动力系统建模和估算

全权 副教授

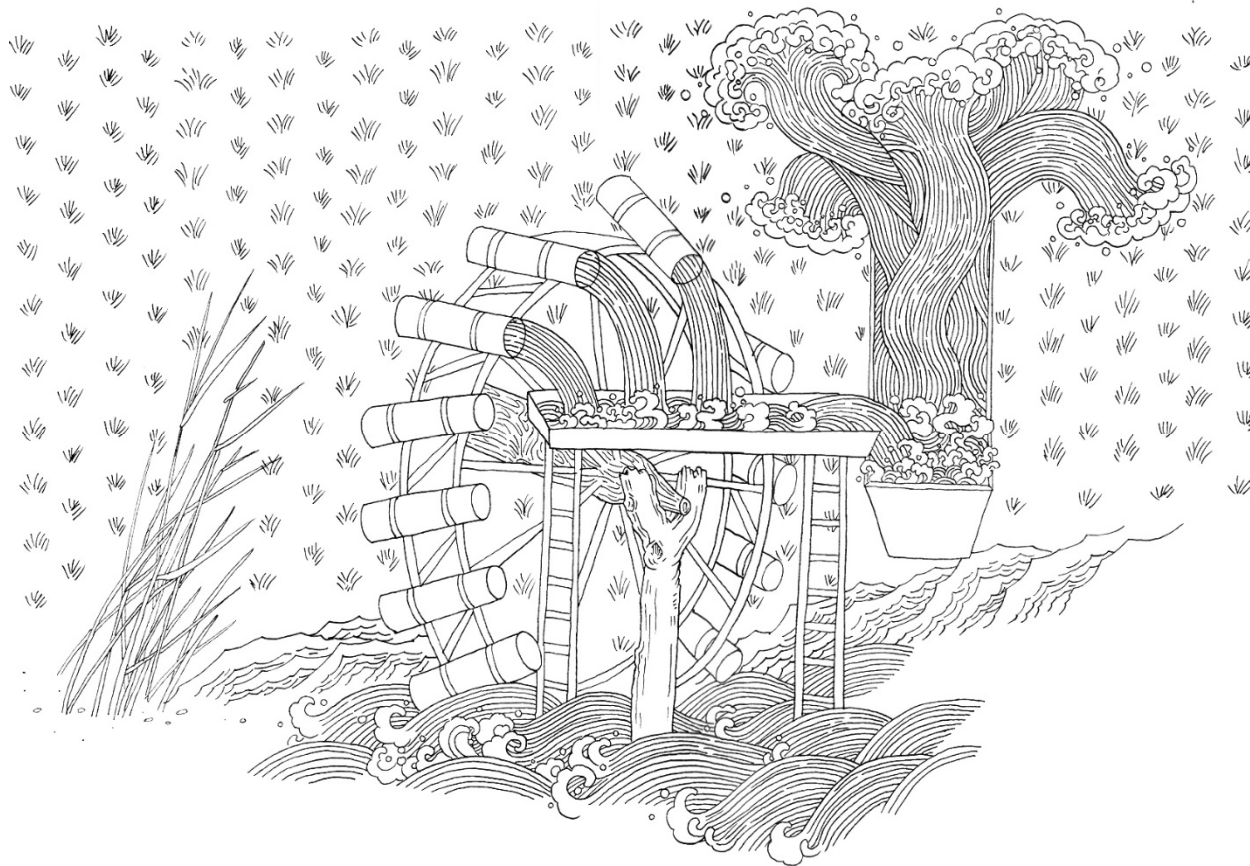
qq\_buaa@buaa.edu.cn

自动化科学与电气工程学院

北京航空航天大学



# 东方智慧



筒车



# 核心问题

---

如何估算一架多旋翼飞行器的各项性能指标?



# 大纲

---

**1. 总体描述**

**2. 动力系统模型**

**3. 性能计算和实验验证**

**4. 评估网站Flyeval.com介绍**

**5. 本讲小结**



# 1. 总体描述

动力系统建模分为四部分：螺旋桨建模、电机建模、电调建模、电池建模。模型所有输入，如表中所示。为了简化本节课讲解，螺旋桨参数可以归为为拉力系数和转矩系数。

## □ 动力系统各器件参数设定

器件	参数指标
螺旋桨	$\Theta_p = \{ \text{直径 } D_p, \text{ 螺距 } H_p, \text{ 桨叶数 } B_p, \text{ 叶片平均气动弦长 } c_p, \text{ 重量 } G_p \}$
电机	$\Theta_m = \{ \text{标称空载电流 } I_{m0}, \text{ 标称空载电压 } U_{m0}, \text{ 标称空载 KV 值 } K_{v0}, \text{ 最大电流 } I_{mMax}, \text{ 内阻 } R_m, \text{ 重量 } G_m \}$
电调	$\Theta_e = \{ \text{最大电流 } I_{eMax}, \text{ 内阻 } R_e, \text{ 重量 } G_e \}$
电池	$\Theta_b = \{ \text{总容量 } C_b, \text{ 内阻 } R_b, \text{ 总电压 } U_b, \text{ 最大放电倍率 } K_b, \text{ 重量 } G_b \}$

螺旋桨的  
拉力系数  
和转矩系数

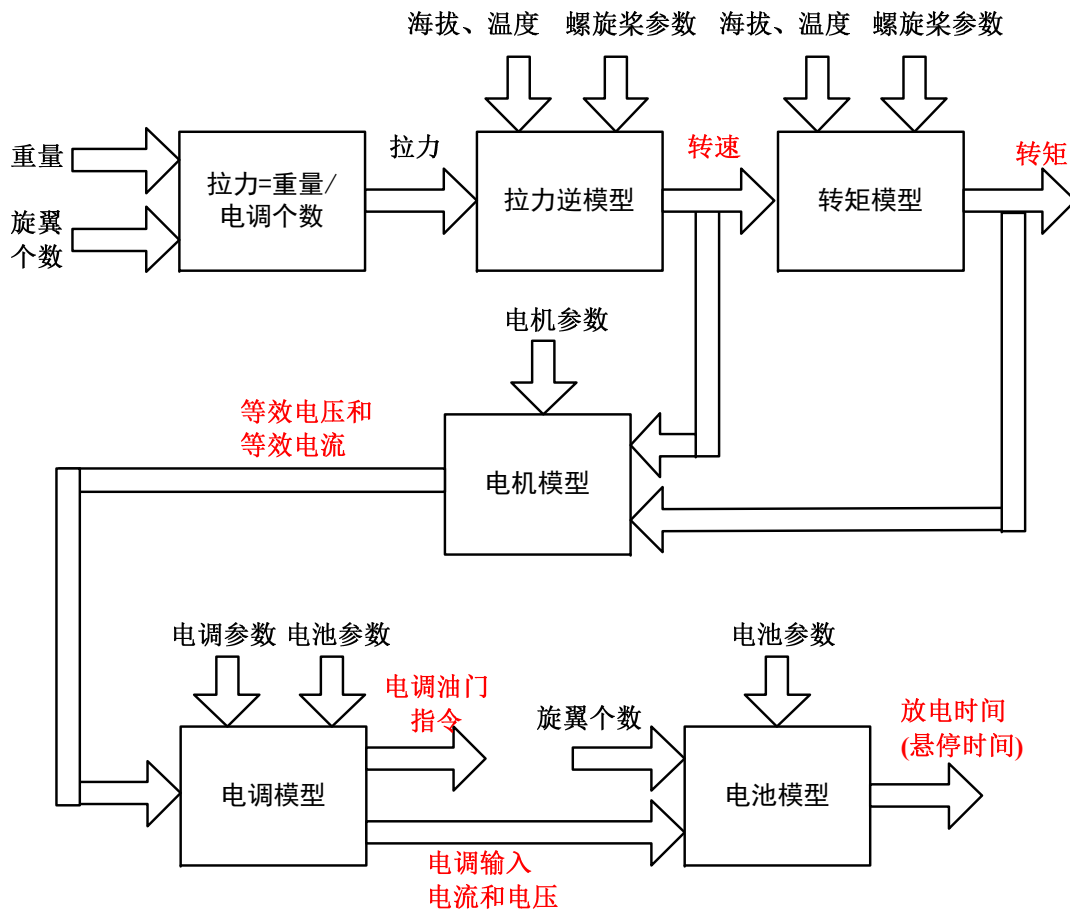
$C_T$   $C_M$





# 1.总体描述

## □ 求解悬停时间的总体思路



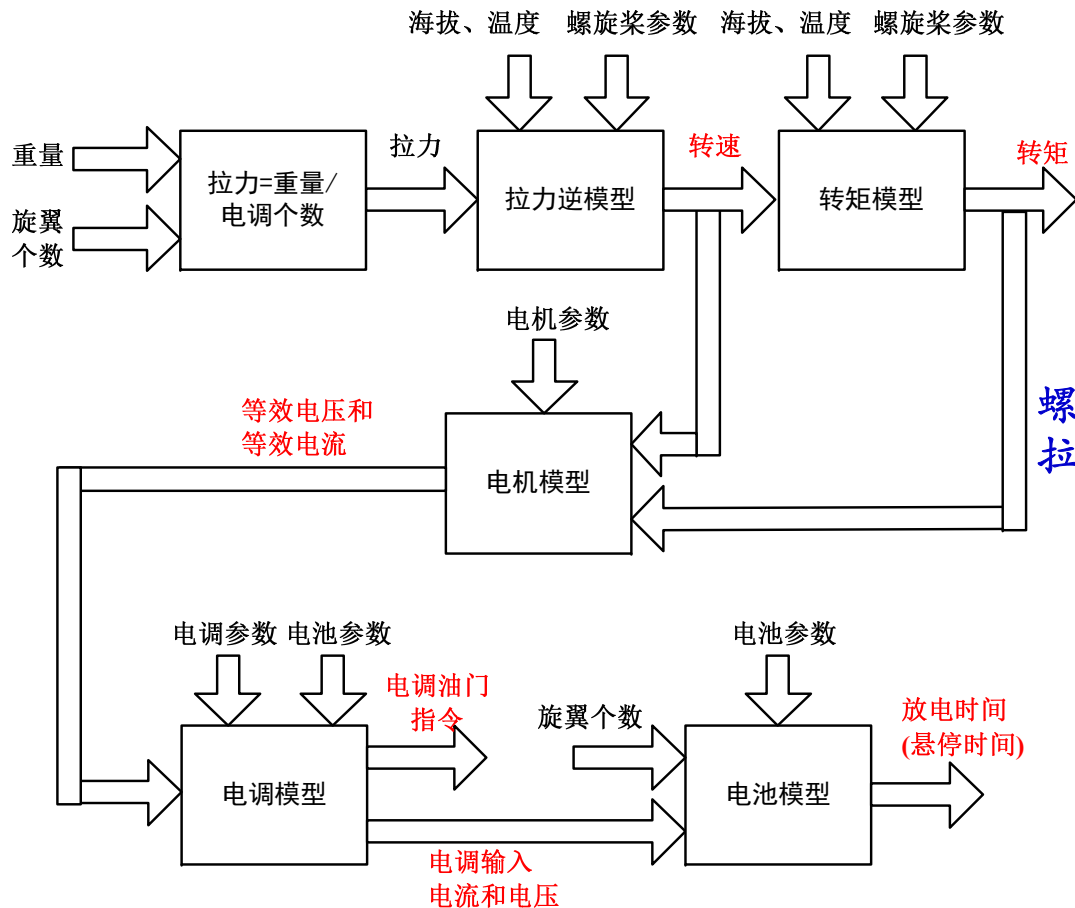
- 螺旋桨模型：  
拉力和转矩
- 电机模型
- 电调模型
- 电池模型



# 2.动力系统模型



## 螺旋桨模型



### (1) 拉力模型

拉力(N)

$$T = C_T \rho \left( \frac{N}{60} \right)^2 D_p^4$$

螺旋桨拉力系数  $C_T$     空气密度  $\rho$  ( $\text{kg/m}^3$ )    转速 (RPM)    螺旋桨直径  $D_p$  (m)

$$\rho = \frac{273 P_a}{101325(273 + T_t)} \rho_0$$

温度 ( $^{\circ}\text{C}$ )

$$P_a = 101325 \left( 1 - 0.0065 \frac{h}{273 + T_t} \right)^{5.2561}$$

海拔 (m)

$$\rho_0 = 1.293 \text{ kg/m}^3$$



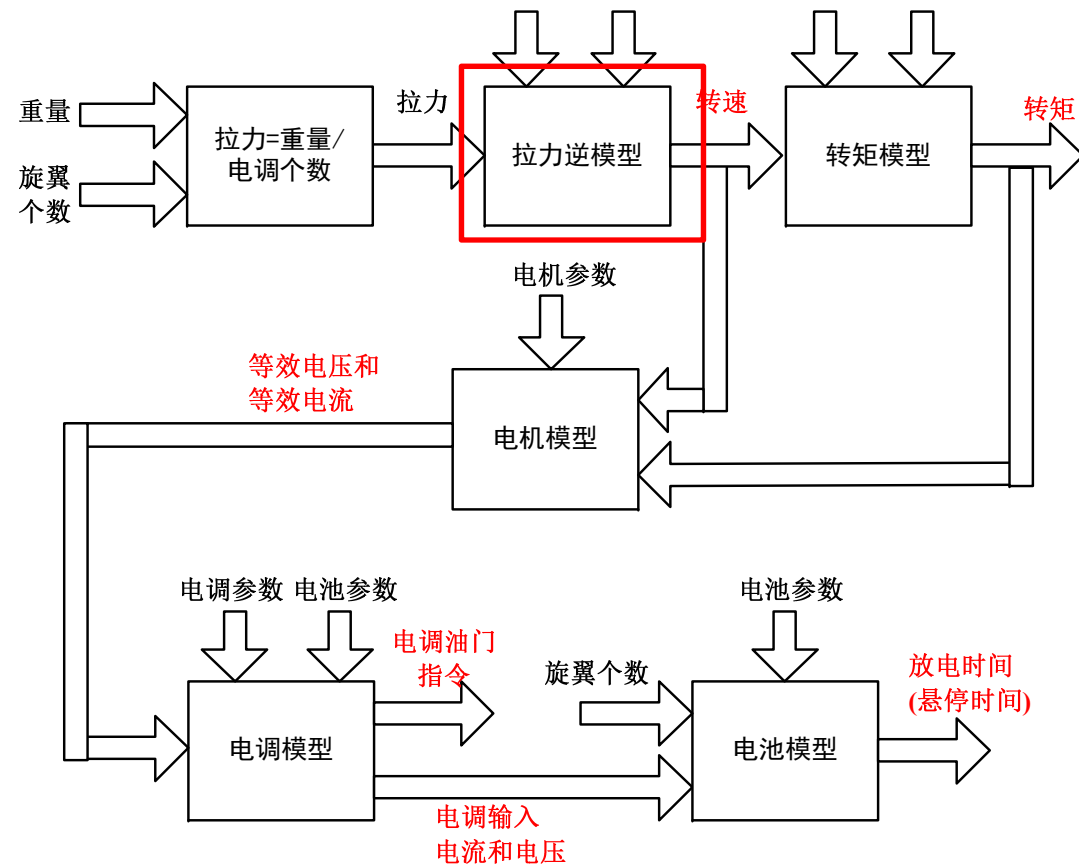
# 2.动力系统模型



## 螺旋桨模型

海拔、温度 螺旋桨参数 海拔、温度 螺旋桨参数

### (2) 拉力逆模型



$$N = 60 \sqrt{\frac{T}{D_p^4 C_T \rho}}$$

单个螺旋桨拉力(N)

$$T = \frac{G}{n_r}$$

螺旋桨个数

飞机重量(N)

$$N = 60 \sqrt{\frac{G}{n_r D_p^4 C_T \rho}}$$

转速 (RPM)



# 2.动力系统模型

## 螺旋桨模型

海拔、温度 螺旋桨参数 海拔、温度 螺旋桨参数



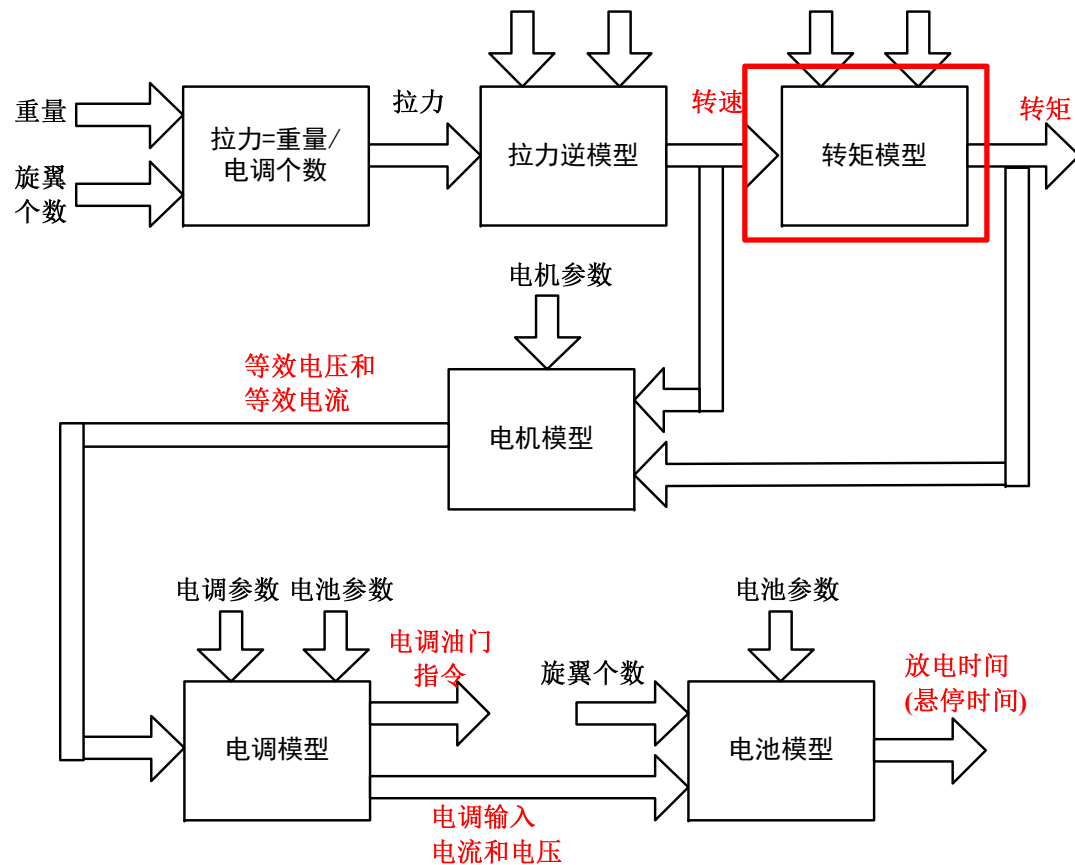
### (3) 转矩模型

螺旋桨  
转矩系数

$$M = C_M \rho \left( \frac{N}{60} \right)^2 D_p^5$$

$$N = 60 \sqrt{\frac{G}{n_r D_p^4 C_T \rho}}$$

$$M = C_M \frac{G}{n_r C_T} D_p$$





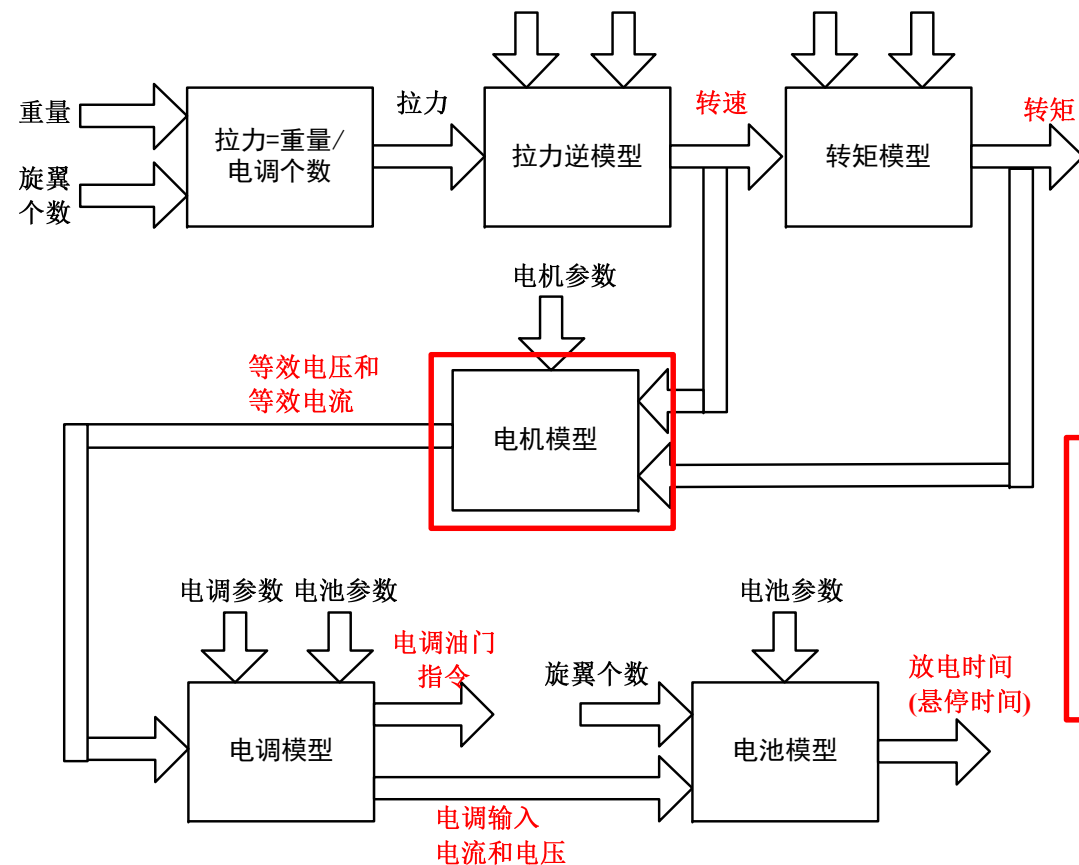
# 2.动力系统模型



## 电机模型

海拔、温度 螺旋桨参数 海拔、温度 螺旋桨参数

### (1) 电磁转矩



$$T_e = K_T I_m$$

电磁转矩      电机转矩常数      电枢电流

$$K_T = \frac{60}{2\pi} K_E = 9.55 K_E$$

$$K_E = \frac{U_{m0} - I_{m0} R_m}{K_{v0} U_{m0}}$$

↑  
器件参数  
厂商可提供





## 2.动力系统模型

### 电机模型

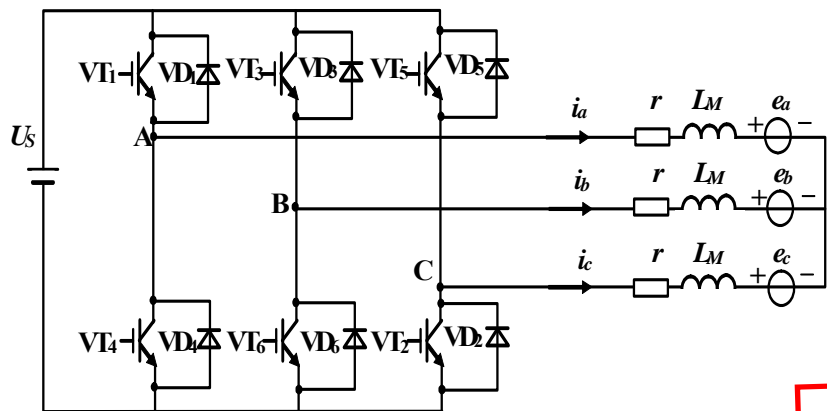


图4.1 三相无刷电机电路

不考虑开关器件动作的过渡过程，并忽略电枢绕组的电感。这样，无刷直流电动机的模型可以简化为右图。

方波驱动—梯形波反电势与方波电流

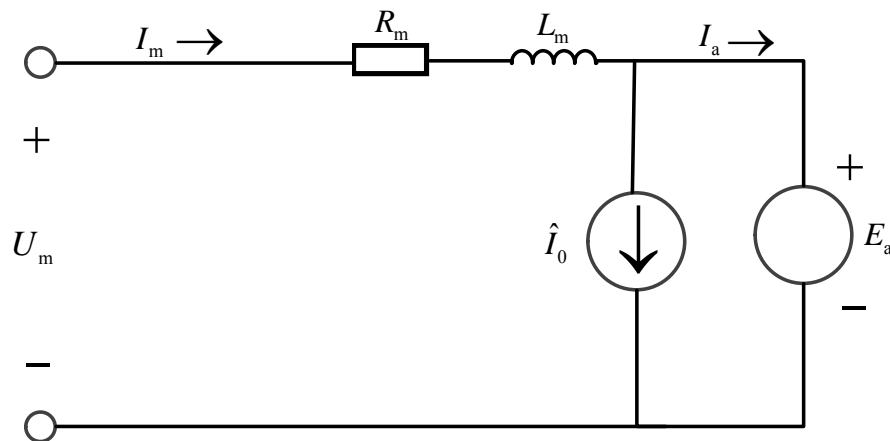


图4.2 电机等价电路



# 2.动力系统模型

## 电机模型

### (2) 输出转矩

$$M = K_T (I_m - I_{m0})$$

空载电流  
(已知)

拉力逆模型得到转矩

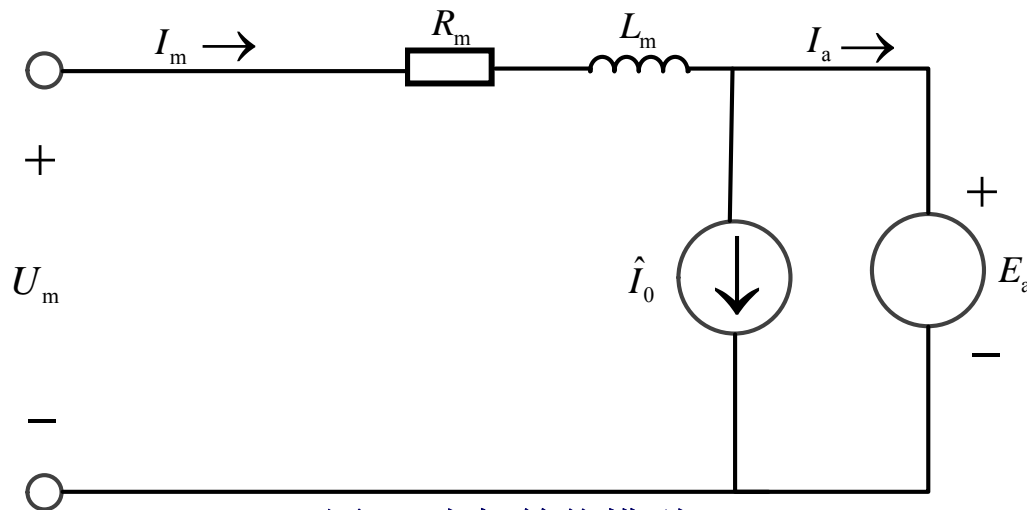


图4.3 电机等价模型

### (3) 等效电流

$$I_m = \frac{M}{K_T} + I_{m0}$$

### (4) 等效电压

$$U_m = K_E N + R_m I_m$$

拉力逆模型  
得到的转速

在无刷直流电机中，电机转速正比于反电动势



# 2.动力系统模型

## 电调模型

海拔、温度 螺旋桨参数 海拔、温度 螺旋桨参数

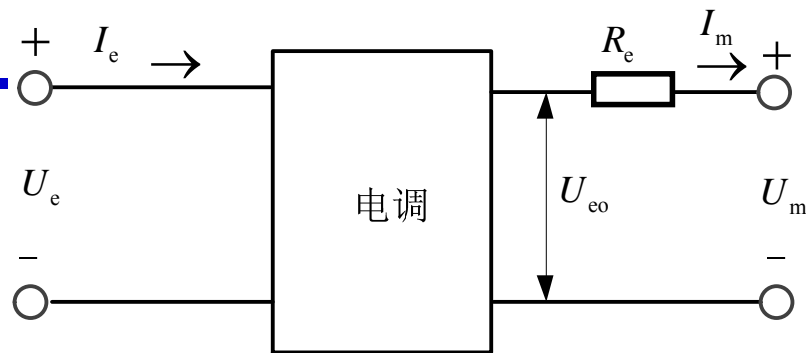
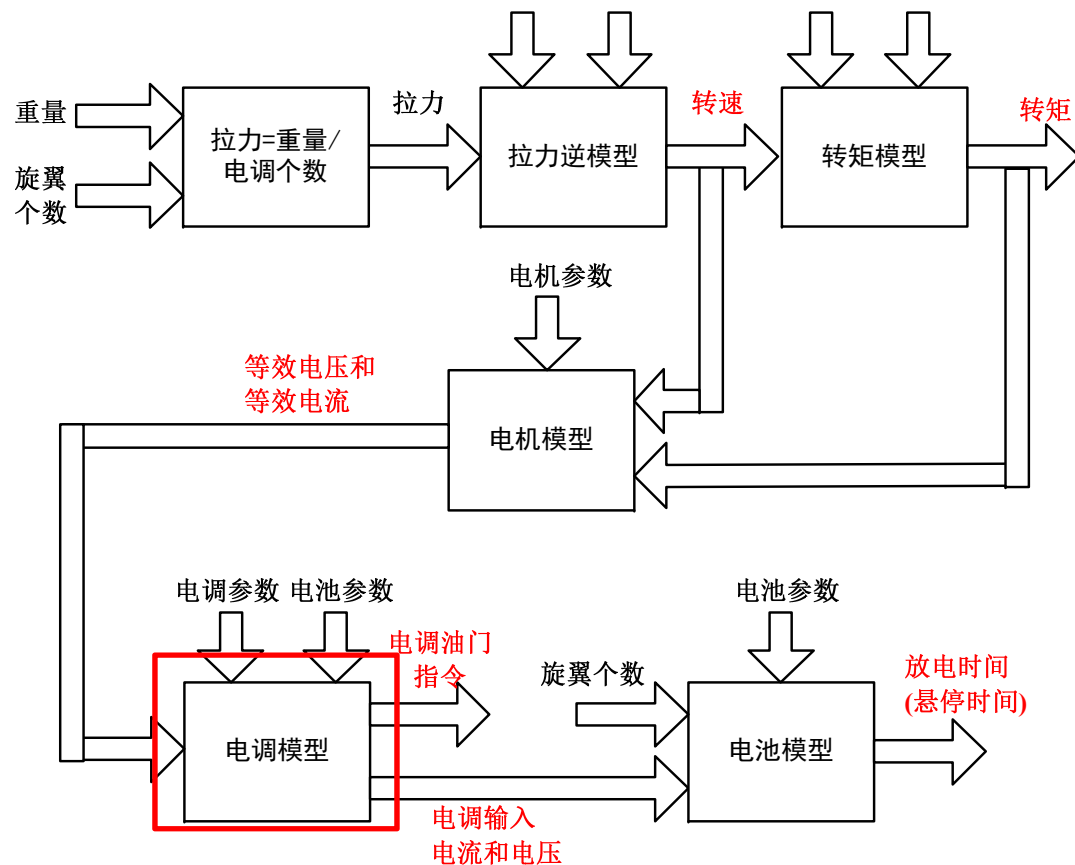


图4.4 电调模型

$U_{eo}$  为电调调制后的等效直流电压，可表示为

$$U_{eo} = U_m + I_m R_e$$

电调输出电压满足

$$\sigma = \frac{U_{eo}}{U_e} \approx \frac{U_{eo}}{U_b}$$

输入油门指令 电池电压



# 2.动力系统模型

## 电调模型

海拔、温度 螺旋桨参数 海拔、温度 螺旋桨参数

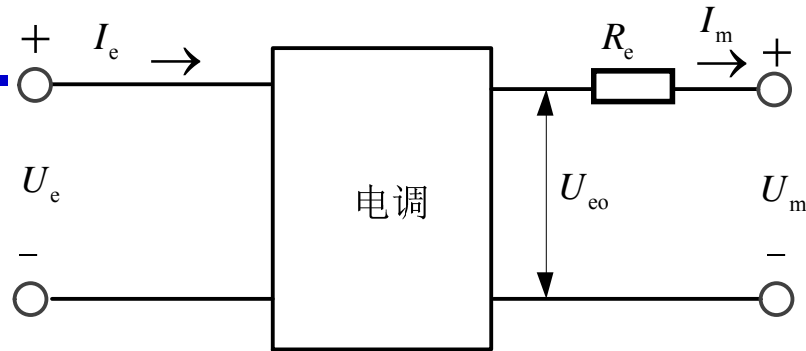
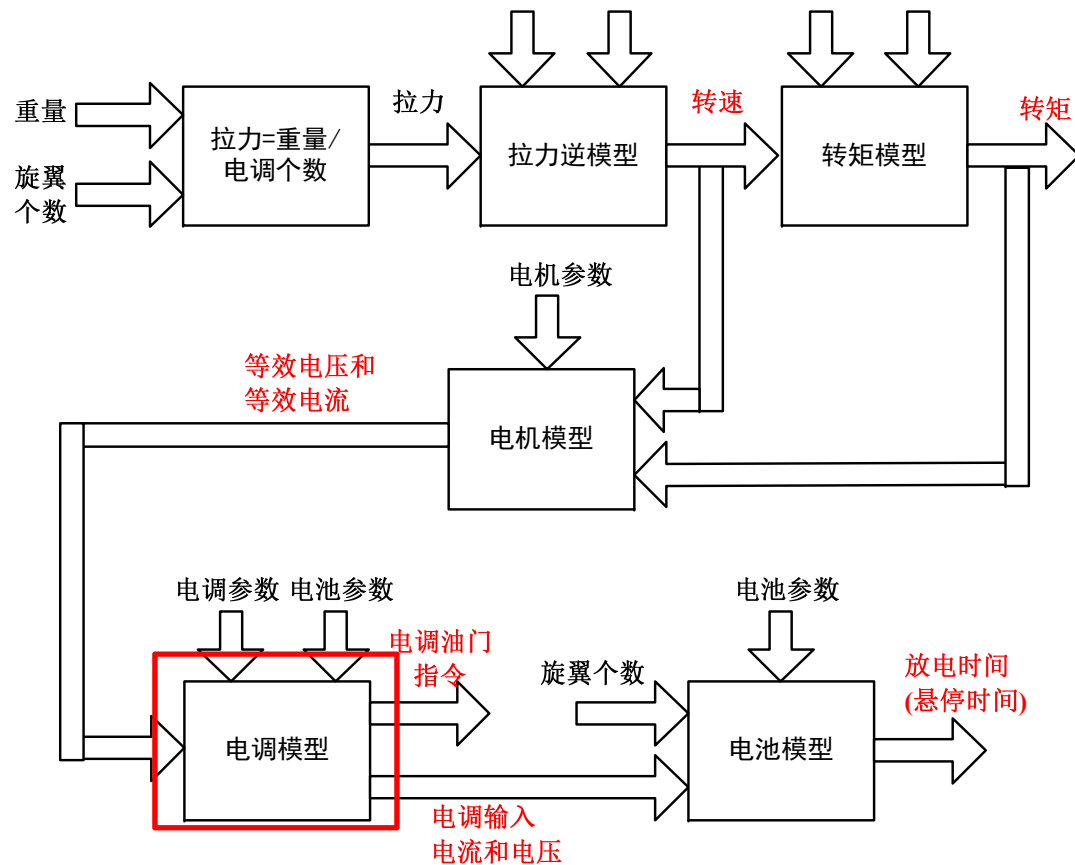


图4.4 电调模型

电调输入电流为

$$I_e = \sigma I_m$$

而电调输入电压（电池输出电压）为

$$U_e = U_b - n_r I_e R_b$$

电调  
个数

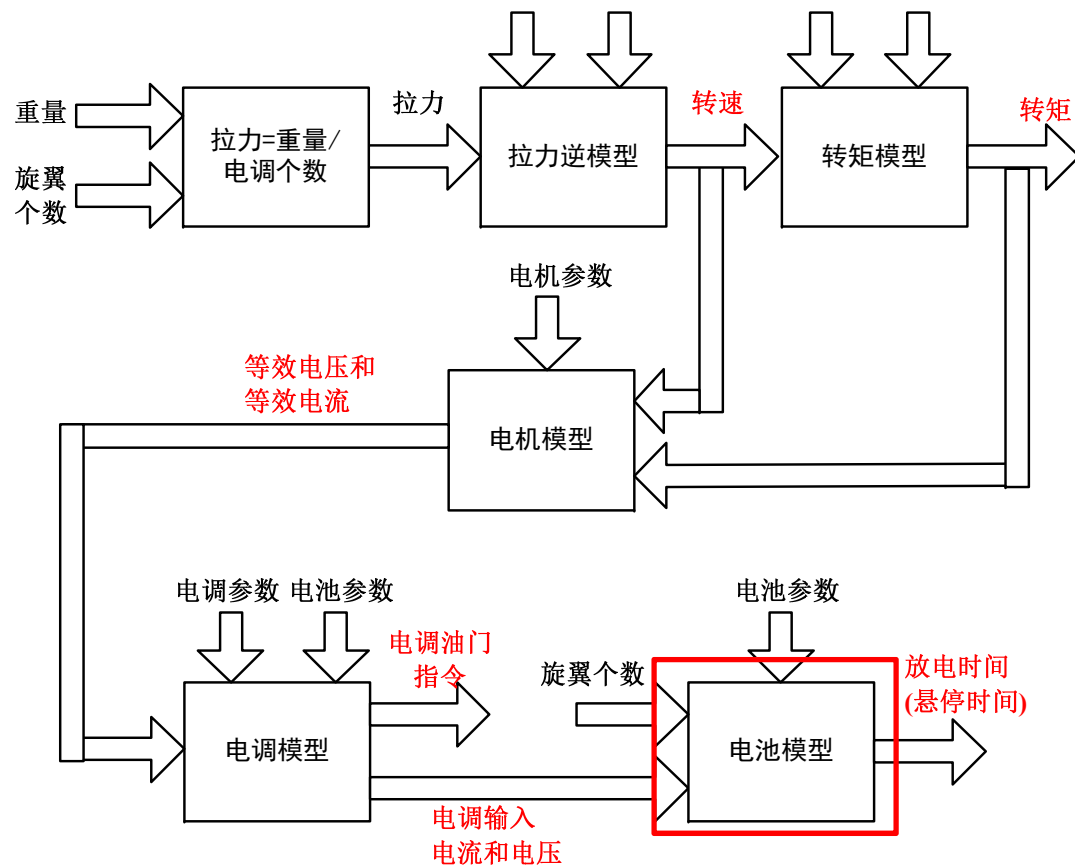
电池  
内阻



# 2.动力系统模型

## □ 电池模型

海拔、温度 螺旋桨参数 海拔、温度 螺旋桨参数



电池建模对电池实际放电过程进行简化，假设放电过程中电压保持不变，悬停电流为定值，电池的放电能力呈线性变化

电池电流

$$I_b = n_r I_e + I_{\text{other}}$$

自 驾 仪 云 台 等 其 他 设 备 电 流 消 耗

$$C_{\text{real}} = C_b - I_b T_{\text{real}}$$

电池实际电 剩余容量

电池使用 时间

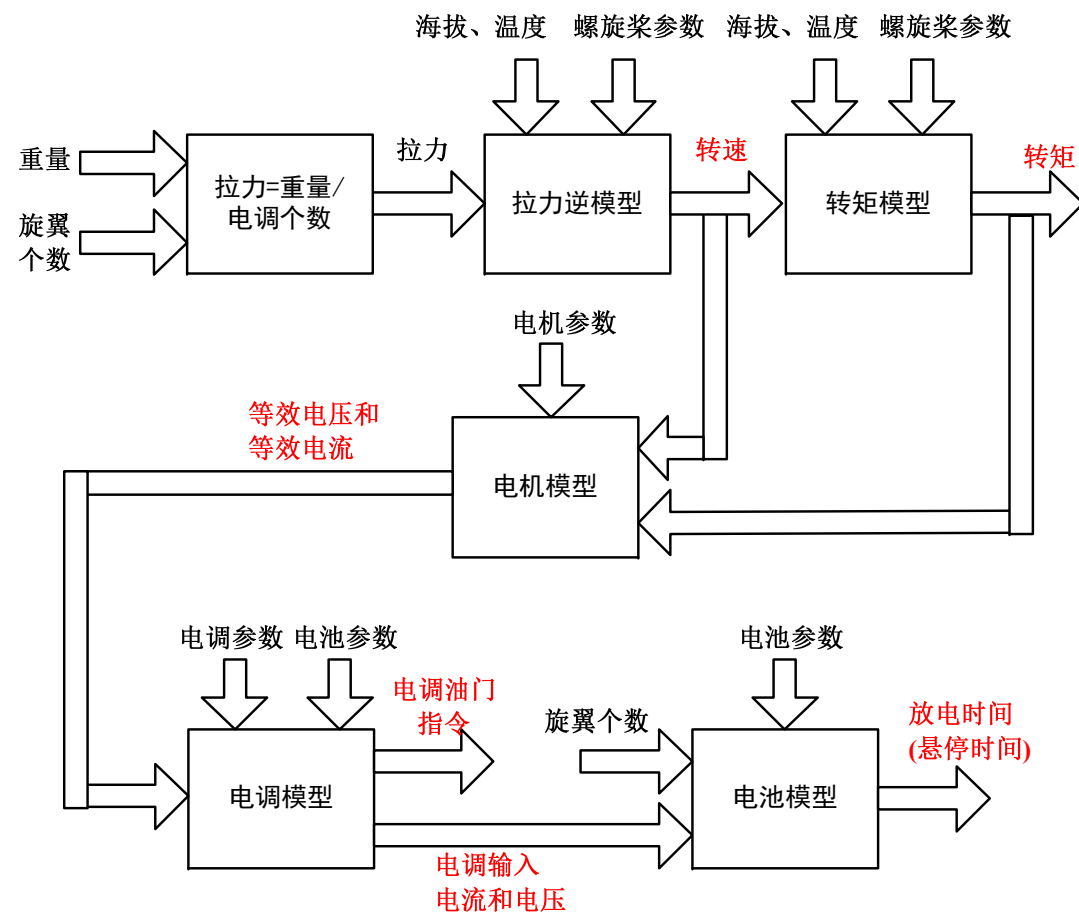
• 放电时间 (min)

$$T_b = \frac{C_b - C_{\text{min}}}{I_b} \cdot \frac{60}{1000}$$

最小放 电容量 (mAh)



# 3.性能计算和实验验证



- 螺旋桨模型

$$N = 60 \sqrt{\frac{G}{\rho D_p^4 C_T (\Theta_p) n_r}}, M = \rho D_p^5 C_M \left(\frac{N}{60}\right)^2$$

- 电机模型

$$U_m = f_{U_m}(\Theta_m, M, N), I_m = f_{I_m}(\Theta_m, M, N)$$

- 电调模型

$$\sigma = f_{\sigma}(\Theta_e, U_m, I_m, U_b)$$

$$I_e = f_{I_e}(\sigma, I_m)$$

$$U_e = f_{U_e}(\Theta_b, I_e)$$

- 电池模型

$$T_b = f_{T_b}(\Theta_b, I_b)$$





### 3.性能计算和实验验证

问题1: 给定总重量  $G$  , 求解悬停时间  $T_{\text{hover}}$  , 电调输入油门指令  $\sigma$  , 电调输入电流  $I_e$  , 电调输入电压  $U_e$  , 电池电流  $I_b$  , 转速  $N$  , 螺旋桨转矩  $M$  。

螺旋桨模型

$$N = 60 \sqrt{\frac{G}{\rho D_p^4 C_T n_r}}, M = \rho D_p^5 C_M \left(\frac{N}{60}\right)^2$$

电机模型

$$U_m = f_{U_m}(\Theta_m, M, N)$$
$$I_m = f_{I_m}(\Theta_m, M, N)$$

电调模型

$$\sigma = f_{\sigma}(\Theta_e, U_m, I_m, U_b)$$
$$I_e = f_{I_e}(\sigma, I_m)$$
$$U_e = f_{U_e}(\Theta_b, I_e)$$

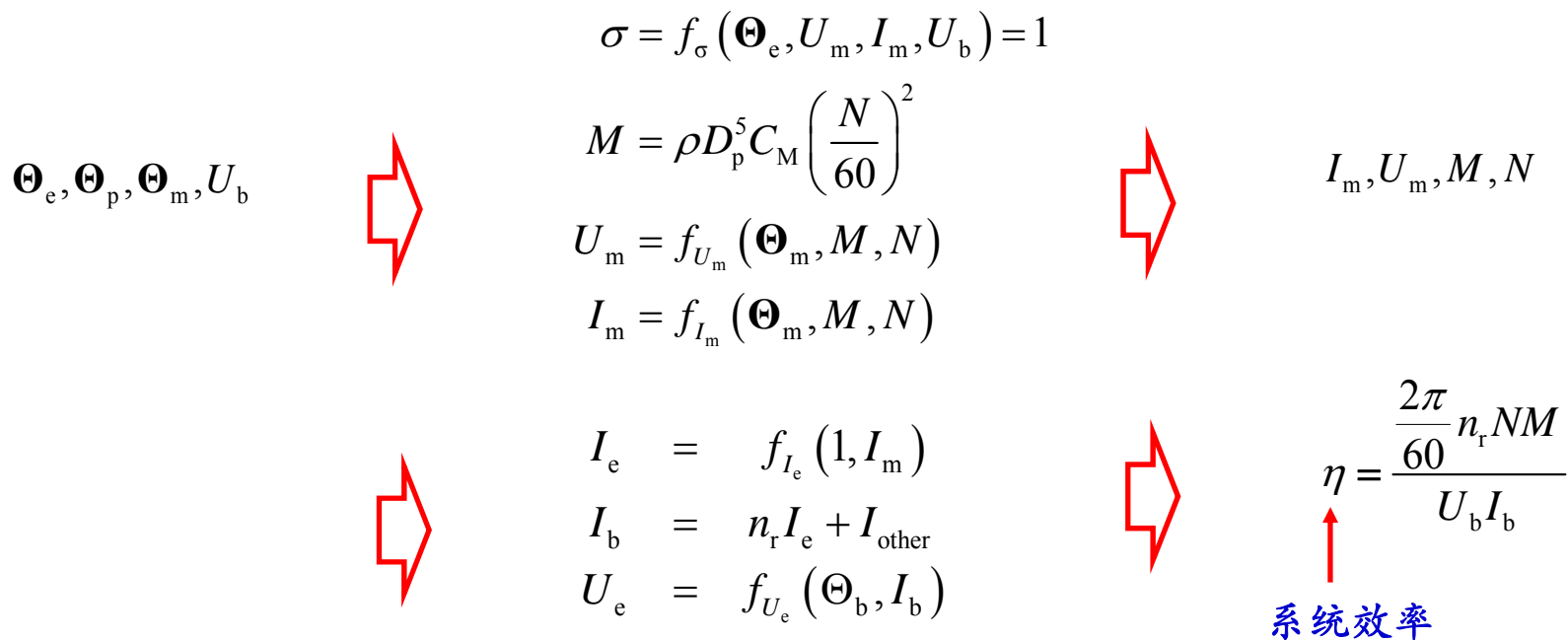
电池模型

$$I_b = n_r I_e + I_{\text{other}} \Rightarrow T_{\text{hover}} = f_{T_b}(\Theta_b, I_b)$$



### 3.性能计算和实验验证

问题2. 给定总重量  $G$ ，电调输入油门指令  $\sigma=1$ ，求解飞行器的极限情况下电调输入电流  $I_e$ ，电调输入电压  $U_e$ ，电池电流  $I_b$ ，转速  $N$ ，系统效率  $\eta$ （系统效率是指在满油门状态下螺旋桨输出功率与电池输出功率的比值）。





### 3.性能计算和实验验证

问题3. 给定总重量  $G$ ，电调输入油门指令  $\sigma = 0.8$ ，求解飞行器的最大载重和最大倾斜角。

$$\sigma = f_{\sigma}(\Theta_e, U_m, I_m, U_b) = 0.8$$

$$M = \rho D_p^5 C_M \left(\frac{N}{60}\right)^2$$

$$U_m = f_{U_m}(\Theta_m, M, N)$$

$$I_m = f_{I_m}(\Theta_m, M, N)$$

$I_m, U_m, M, N$

$$T = C_T \rho D_p^4 \left(\frac{N}{60}\right)^2$$

单旋翼最大拉力

$$G_{\max\text{load}} = n_r T - G$$

最大载重

$$\theta_{\max} = \arccos \frac{G}{n_r T}$$

最大俯仰角

最大负载下，多旋翼的极限。之所以取占空比0.8而不是1，是为了给予控制的一定裕度。



# 3.性能计算和实验验证

**问题4:** 给定总重量  $G$ , 求解飞行器的最大飞行速度, 最远飞行距离以及综合飞行时间 (指飞行器飞行距离达到最远时的飞行时间)。

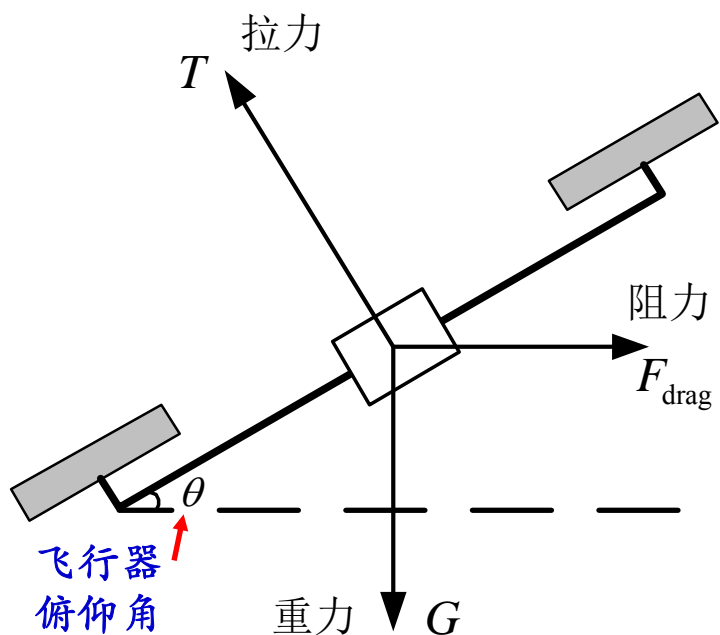


图 4.5 多旋翼前飞受力图

## □ 飞行器前飞速度

- 阻力跟拉力的关系

$$F_{\text{drag}} = G \tan \theta$$

$$T = \frac{G}{n_r \cos \theta}$$

- 阻力跟速度的关系

$$F_{\text{drag}} = \frac{1}{2} C_D \rho V^2 S$$

$$C_D = C_{D_1} \cdot (1 - \sin^3 \theta) + C_{D_2} \cdot (1 - \cos^3 \theta)$$

$$V(\theta) = \sqrt{\frac{2G \tan \theta}{\rho S [C_{D_1} \cdot (1 - \sin^3 \theta) + C_{D_2} \cdot (1 - \cos^3 \theta)]}}$$

飞行器前飞速度  
由俯仰角决定

行控制研究组



### 3.性能计算和实验验证

问题4: 给定总重量  $G$ , 求解飞行器的最大飞行速度, 最远飞行距离以及综合飞行时间 (指飞行器飞行距离达到最远时的飞行时间)。

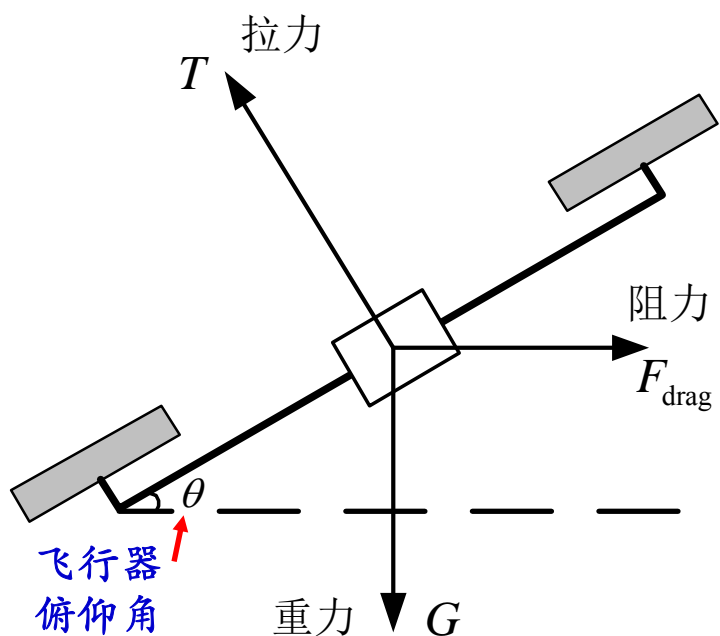


图 4.5 多旋翼前飞受力图

#### □ 飞行器前飞距离

- 螺旋桨转速  $N = 60 \sqrt{\frac{G}{\rho C_T D_p^4 n_r \cos \theta}}$
- 螺旋桨转矩  $M = \frac{G C_M D_p}{C_T n_r \cos \theta}$
- 飞行时间 (见第一问)  $T_{\text{fly}}(\theta)$  (飞行时间, min)
- 飞行距离  $Z(\theta) = 60V(\theta) T_{\text{fly}}(\theta)$
- 最远飞行距离  $\max_{\theta \in [0, \theta_{\text{max}}]} Z(\theta) \rightarrow$  找到某俯仰角使飞行距离最远



## 3.性能计算和实验验证

### □ 约束问题

约束1：电调输入油门在 $[0,1]$ 之间；一般我们希望，合理的油门在**50%**左右，也就是说油门在中间的时候（上下控制余量都足够），恰好多旋翼能够悬停。

约束2：**电机电枢电流不超限**，否则电机会烧掉。

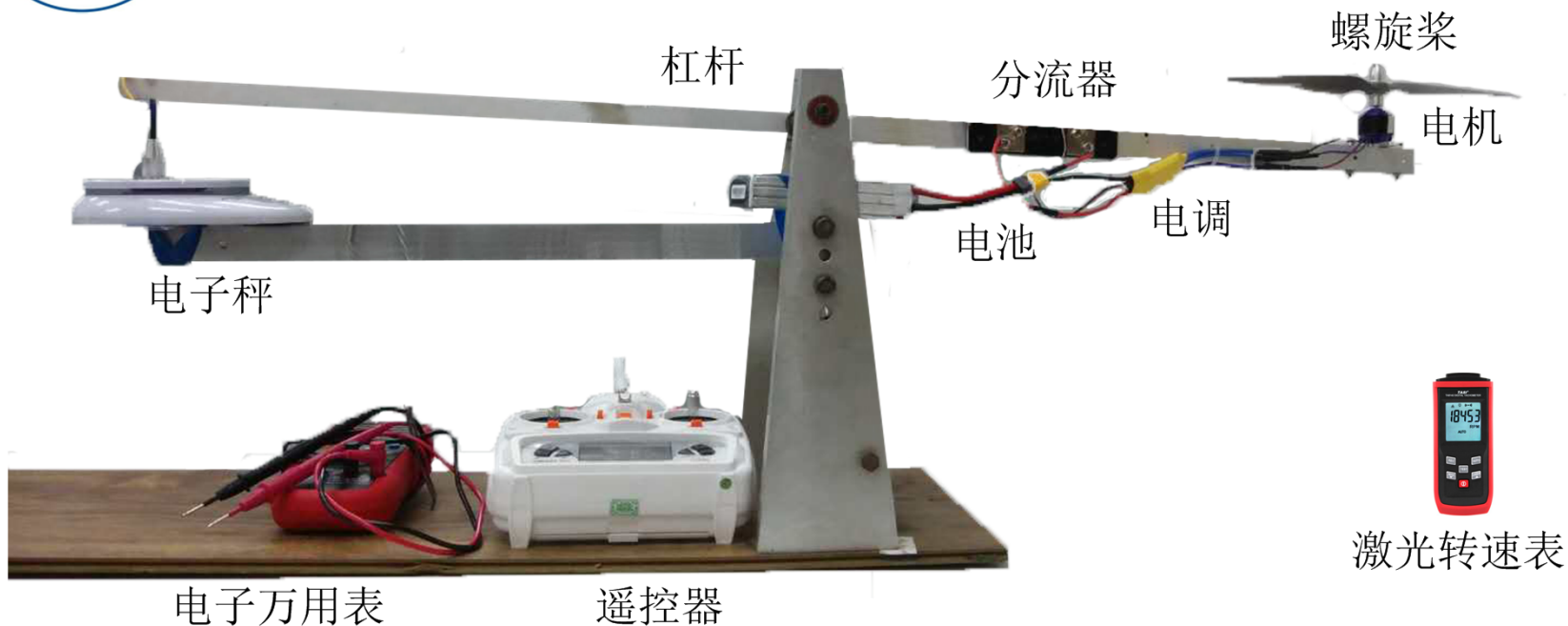
约束3：**电调输入电流不超限**，否则电调会烧掉。

约束4：**电池输出电流不超限**，否则发热损坏电池。





### 3.性能计算和实验验证



图片 4.6 实验验证设备

- 1.验证在不同转速下，模型算出的**拉力**大小与**电调电流**大小是否与实际相符
- 2.验证**悬停时间**这一代表性性能指标



# 3.性能计算和实验验证

表.实验参数表

环境参数	$h=50\text{m}, T_t=25^\circ\text{C}$
螺旋桨参数	APC 10x45MR ( $D_p=10\text{inch}, H_p=4.5\text{inch}, B_p=2$ )
电机参数	Sunnysky Angel A2212 ( $K_{V0}=980\text{RPM/V}, R_m=0.12\Omega, U_{m0}=20\text{V}, I_{m0}=0.5\text{A}, I_{m\text{Max}}=20\text{A}$ )
电调参数	$I_{e\text{Max}}=30\text{A}, R_e=0.008\Omega$
电池参数	ACE ( $C_b=4000\text{mAh}, U_b=12\text{V}, R_b=0.016\Omega, K_b=25\text{C}$ )

□ 验证在不同转速下，模型算出的拉力大小与电调电流大小是否与实际相符

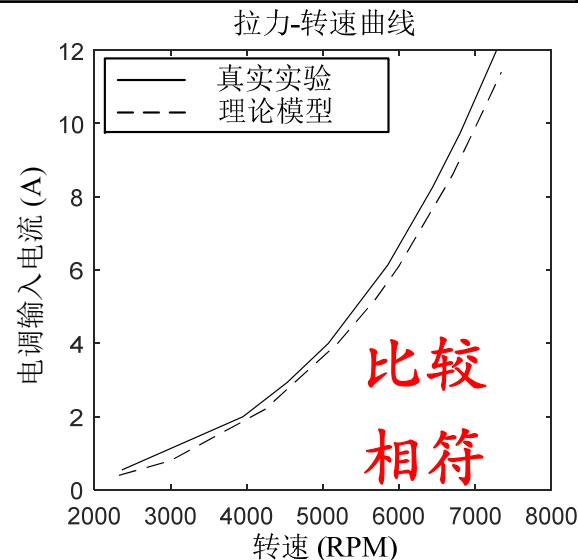
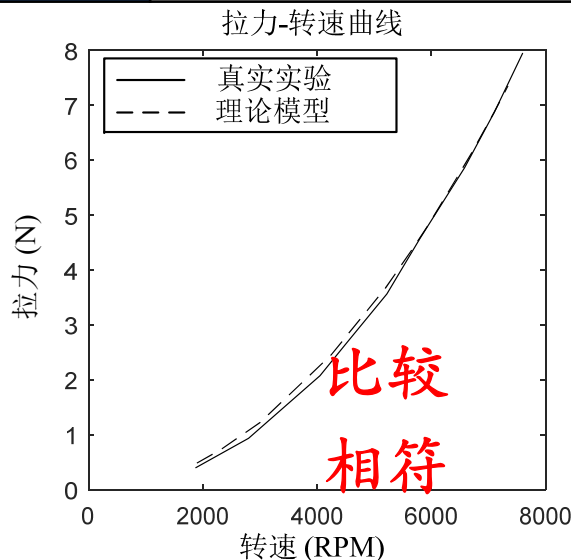


图 4.7 油门-速度与电流-速度曲线



# 3.性能计算和实验验证

## □ 验证悬停时间

- 为了模拟飞行器悬停状态，实验中产生的拉力可以当做飞行器悬停时单个旋翼产生的拉力
- 悬停时间与电池安全放电时间等效
- 实验结果：

虚拟飞行器参数	$G=14.7N, n_r=4$	
环境参数和动力系统参数	见上页的实验参数表	
悬停时间	实验结果	12.5min
	估算结果	12.2min

比较相符



# 4. 评估网站Flyeval.com介绍

**Fe 飞行评测**  
Flying Evaluation

首页 **设计 (Beta)** 反馈&联系 关于我们 语言 ▼

整机重量: 1.5 kg | 机架轴距: 450 mm | 飞行海拔: 200 m | 空气温度: 25 °C | 外形气动: 一般 ▼

电池放电下限: 15% | 安全起飞油门上限: 85% | 飞控最大倾角: 无限制 | 飞控附件电流: 0.5 A

电机品牌: T-MOTOR (老虎电机) | 型号: MNZ212 V2.0 KV920

螺旋桨品牌: APC | 型号: 10x4.5MR

电调品牌: Hobbywing (好盈) | 型号: XRotor 40A

电池品牌: ACE (格氏电池) | 型号: LiPo 3S-11.1V-30C-5300mAh | 电池串联+并联组合: 1 | S | 1 | P

**计算!**

**基本信息**

悬停时间: 17.1 min. ≥ 44.9% 多旋翼

剩余负载: 1.28 kg ≥ 56.1% 多旋翼

## 详细信息

### 悬停性能:

悬停时间	: 17.1 min.
油门百分比	: 57.4 %
电机电流	: 3.83 A
电机转速	: 5282.7 rpm
电机输出功率	: 35.5 W
电池输出电压	: 11.8 V
电池输出电流	: 15.9 A
能量效率	: 74.9 %

### 最大油门性能:

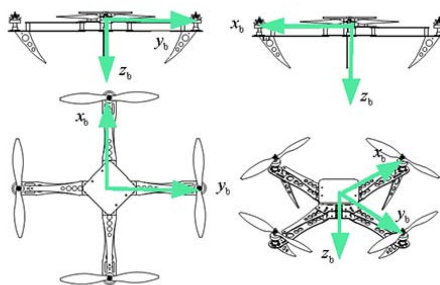
飞行时间	: 4.4 min.
总升力	: 34.7 N
电机电流	: 15.2 A
电机转速	: 6121.1 rpm
电机输出功率	: 129.1 W
电池输出电压	: 11.4 V
电池输出电流	: 60.9 A
能量效率	: 70.7 %

### 整体性能:

正常使用	: 13.2 min.
整机重量	: 1.5 kg
剩余载重	: 1.28 kg
最大起飞海拔	: 5.08 km
最大倾斜角度	: 57.3 °
最大平飞速度	: 12 m/s
单程飞行距离	: 5.3 km
抗风等级	: 4 级

🔗 结果不准? 点此校正

## 控制模型 (说明文档)(课件)



多旋翼总质量	: $m = 1.5 \text{ kg}$
重力加速度	: $g = 9.8 \text{ m/s}^2$
转动惯量矩阵	: $J = \text{diag}(J_{xx}, J_{yy}, J_{zz})$
	: $J_{xx} = 1.372e-2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
	: $J_{yy} = 1.372e-2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
	: $J_{zz} = 2.465e-2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
多旋翼机身半径( $l_1$ =轴距)	: $d = 0.225 \text{ m}$
螺旋桨推力系数( $T_p/\omega^2$ )	: $C_T = 1.201e-5 \text{ N}/(\text{rad/s}^2)$
螺旋桨力矩系数( $M_p/\omega^2$ )	: $C_M = 2.100e-7 \text{ N}\cdot\text{m}/(\text{rad/s}^2)$
油门( $\sigma$ )到电机稳态转速( $\omega_{ss}$ )	: $C_R = 708.7 \text{ rad/s}$
( $\omega_{ss} = C_R \cdot \sigma + \omega_b$ )	: $\omega_b = 146.07 \text{ rad/s}$
电机螺旋桨转动惯量	: $J_m = 1.16e-4 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
电机响应时间常数	: $T_m = 0.0673 \text{ s}$
多旋翼空气阻力系数( $D/v^2$ )	: $C_d = 0.222 \text{ N}/(\text{m/s}^2)$

基于本讲的理论，我们建立了一个在线性能估算网站flyeval.com.用户在网站上输入机架布局参数、环境参数和动力系统参数后，可以方便地得到性能估算结果。



## 4. 评估网站Flyeval.com介绍

The screenshot shows the Flyeval.com website interface. At the top, there is a navigation menu with links for HOME, DESIGN(Beta), BUGS&CONTACT, ABOUT US, and LANGUAGE. Below the navigation is a search bar with the text "Flying Evaluation". The main content area contains a form with several input fields: Frame Type (QuadCopter), Total Weight (1.5 kg), Hovering Time (15 min), Flying Altitude (50 m), Design Application (Aerial Photography), and Battery Density (\*Optional) (Wh/kg). Below the form is a section titled "Recommended Configurations" with a "Reverse Solution!" button. The table below lists 8 recommended configurations with columns for Num., Motor, ESC, Propeller, Battery, Frame Size, Hovering Time, Remaining Load, and Weight.

Num.	Motor	ESC	Propeller	Battery	Frame Size	Hovering Time	Remaining Load	Weight
1	JFRC U2212 KV750	Hobbywing XRotor 20A	APC 10x4.7	Lipo 3S-11.1V-20C-6000mAh	450mm	26.6min.	0.3kg	1.5kg
2	JFRC U2208 KV1500	Hobbywing XRotor 20A	APC 10x4.7	Lipo 2S-7.4V-20C-9900mAh	450mm	24.7min.	0.3kg	1.5kg
3	JFRC U2206 KV1500	Hobbywing XRotor 20A	Carbon 8x3.8	Lipo 3S-11.1V-20C-7900mAh	360mm	22.6min.	0.3kg	1.5kg
4	EMAX MT2216-810KV	EMAX Simonk 12A	1055 Carbon Fiber	Lipo 3S-11.1V-20C-7100mAh	450mm	23.6min.	0.3kg	1.5kg
5	JFRC U2212 KV980	Hobbywing XRotor 20A	APC 9x4.7	Lipo 3S-11.1V-20C-6600mAh	400mm	23.6min.	0.3kg	1.5kg
6	T-MOTOR MT2208 KV1100	T-MOTOR AIR 15A	T-MOTOR 10*3.3CF	Lipo 3S-11.1V-20C-6900mAh	450mm	23min.	0.3kg	1.5kg
7	EMAX MT2208II-2000KV	EMAX Simonk 25A	HQ 6x4.5	Lipo 3S-11.1V-25C-7900mAh	270mm	20.9min.	0.3kg	1.5kg
8	T-MOTOR MT2212 KV980	T-MOTOR AIR 15A	T-MOTOR 10*3.3CF	Lipo 3S-11.1V-20C-6500mAh	450mm	23.1min.	0.3kg	1.5kg

除了性能估算的功能，该网站还提供辅助设计功能。用户简单地输入多旋翼需要达到的飞行性能指标，网站自动推荐最优的多旋翼配置方案。





## 5.本讲小结

---

- 动力系统性能是飞行总体性能的核心
- 多旋翼性能评估网站 [www.flyeval.com](http://www.flyeval.com) (评估+设计)
- 设计就是寻求最佳的配置，即给定一架多旋翼飞行器的悬停时间、最大负载重量和飞行距离等飞行性能给出最佳的动力系统配置。
- 未来工作：增加动态的飞行指标。





# 资源

---

(1) 可靠飞行控制研究组主页课程中心(全部课件下载)

<http://rfly.buaa.edu.cn/course>

(2) 关注可靠飞行控制研究组公众号 buaarfly(文章、资讯等)

(3) 多旋翼设计与控制交流QQ群:183613048

(4) 视频课程(MOOC)同步发布, 网易云课堂搜索 “多旋翼”

<http://study.163.com/course/introduction/1003715005.htm>

(5) 同名中文书本教材《多旋翼飞行器设计与控制》即将在电子工业出版社出版, 敬请期待

(6) 有疑问可联系课程总助教戴训华, 邮箱: [dai@buaa.edu.cn](mailto:dai@buaa.edu.cn)

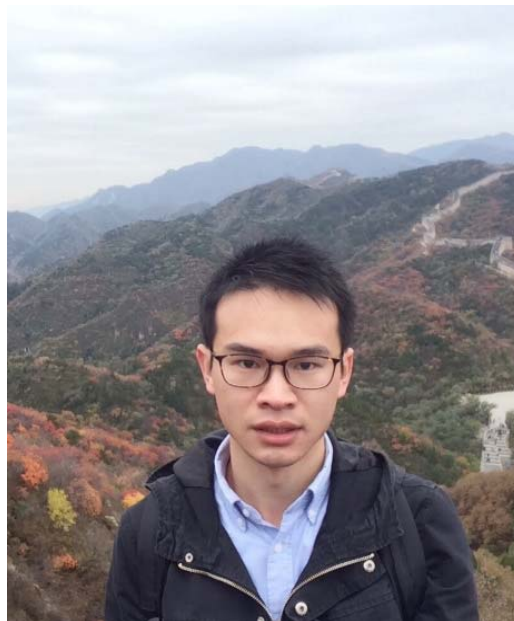


# 致谢

## 感谢控制组同学



史东杰



戴训华

为本节课程准备作出的贡献。



---

# 谢谢！



---

# 多旋翼飞行器设计与控制

## 第五讲 坐标系和姿态表示

全权 副教授

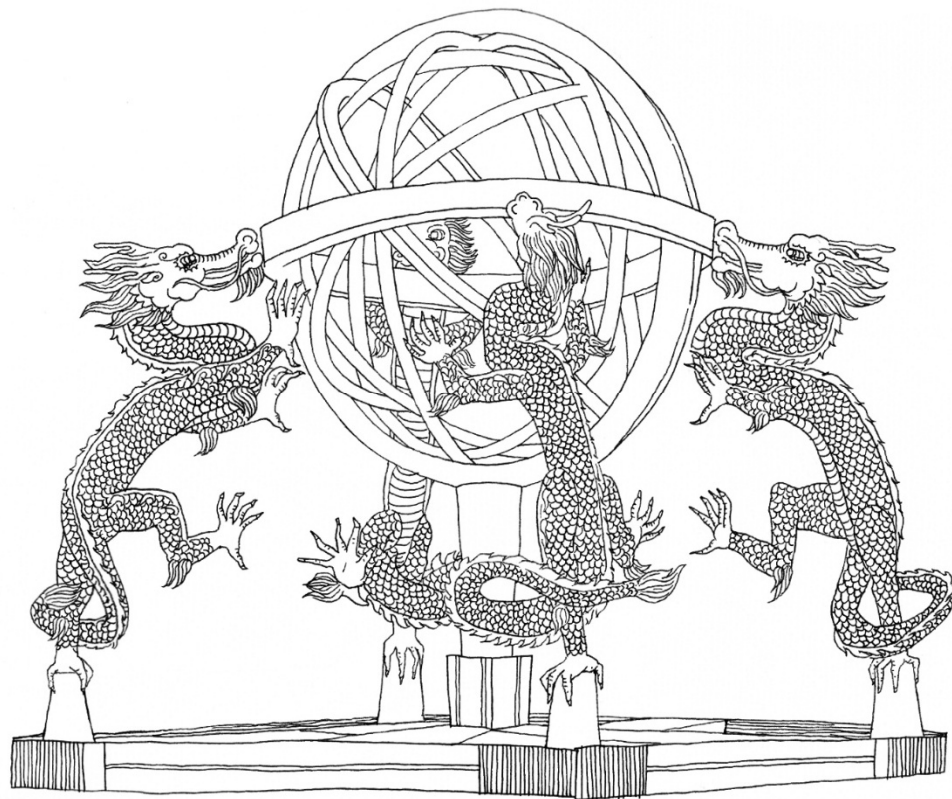
qq\_buaa@buaa.edu.cn

自动化科学与电气工程学院

北京航空航天大学



# 东方智慧



浑天仪



# 核心问题

---

欧拉角、旋转矩阵和四元数三种姿态表示的变化与机体角速度的关系？





# 大纲

---

1. 坐标系
2. 欧拉角
3. 旋转矩阵
4. 四元数
5. 本讲小结



# 1. 坐标系

## □ 右手定则



(a) 坐标轴



(b) 旋转正方向

图 5.1 右手定则下的坐标轴和旋转正方向

如所上图示，右手的拇指指向x轴的正方向，食指指向y轴的正方向，中指所指示的方向即是z轴的正方向。进一步，如上图所示，要确定旋转正方向，用右手的大拇指指向轴的正方向，弯曲四指。那么四指所指示的方向即是旋转正方向。本讲采用的坐标系和后面定义的角度正方向都是沿用**右手定则**。



# 1. 坐标系

## □地球固联坐标系与机体坐标系定义

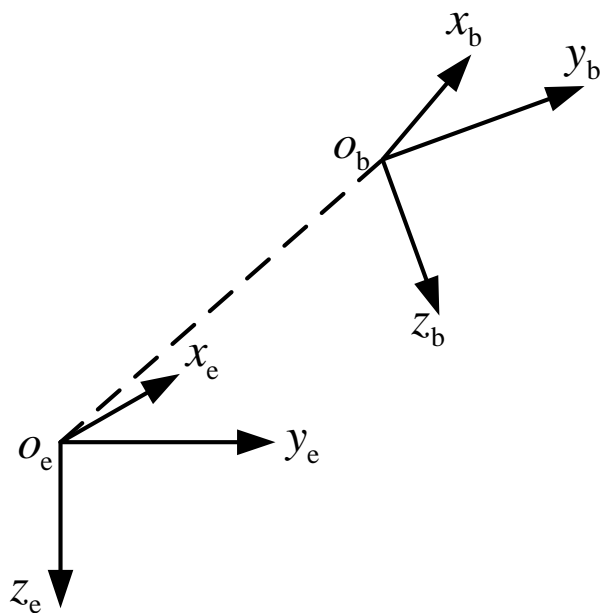


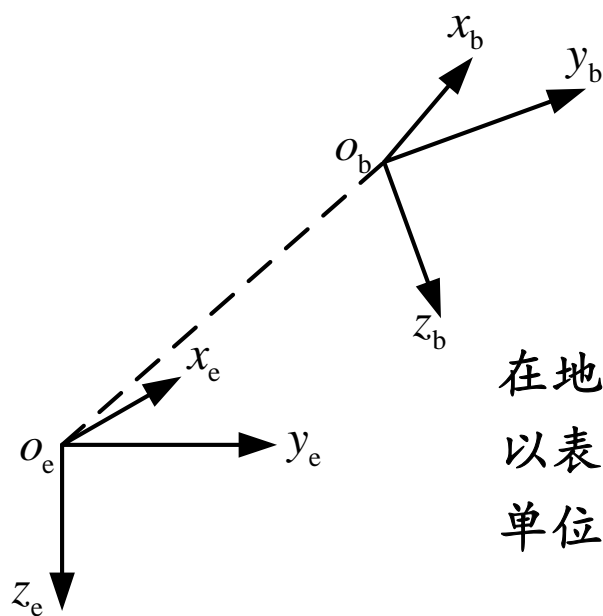
图 5.2 机体坐标系与地面坐标系的关系图

- **地球固联坐标系**用于研究多旋翼飞行器相对于地面的运动状态，确定机体的空间位置坐标。它忽略地球曲率，即将地球表面假设成一张平面。通常以多旋翼起飞位置或者地心作为坐标原点  $O_e$ 。先让  $x_e$  轴在水平面内指向某一方向， $z_e$  轴垂直于地面向下。然后，按右手定则确定  $y_e$  轴。
- **机体坐标系**与多旋翼固连，其原点  $O_b$  取在多旋翼的重心位置上。 $x_b$  轴在多旋翼对称平面内指向机头（机头方向与多旋翼+字形或X字形相关）。 $z_b$  轴在飞机对称平面内，垂直  $x_b$  轴向下。然后，按右手定则确定  $y_b$  轴。
- **右下标e表示Earth，下标b表示Body**



# 1. 坐标系

## □ 地球固联坐标系与机体坐标系定义



定义如下三个单位向量

$$\mathbf{e}_1 \triangleq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_3 \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

在地球固联坐标系中，沿着轴  $x_e, y_e, z_e$  的单位向量可以表示为  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 。在机体坐标系下，沿着  $x_b, y_b, z_b$  轴的单位向量满足 (注：左上标**b**表示向量在机体坐标系的表示)

$${}^b\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1, {}^b\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_2, {}^b\mathbf{b}_3 = \mathbf{e}_3$$

在地球固联坐标系中，沿着  $x_b, y_b, z_b$  轴的单位向量表示为  ${}^e\mathbf{b}_1, {}^e\mathbf{b}_2, {}^e\mathbf{b}_3$  (注：左上标**e**表示向量在地球固联坐标系的表示)

图 5.2 机体坐标系与地面坐标系的关系图



## 2. 欧拉角

### □ 欧拉角定义

可以通过转换绕  $e_3, k_2, n_1$  轴分别旋转欧拉角  $\psi, \theta, \phi$  将地球固联坐标系转动到机体坐标系。

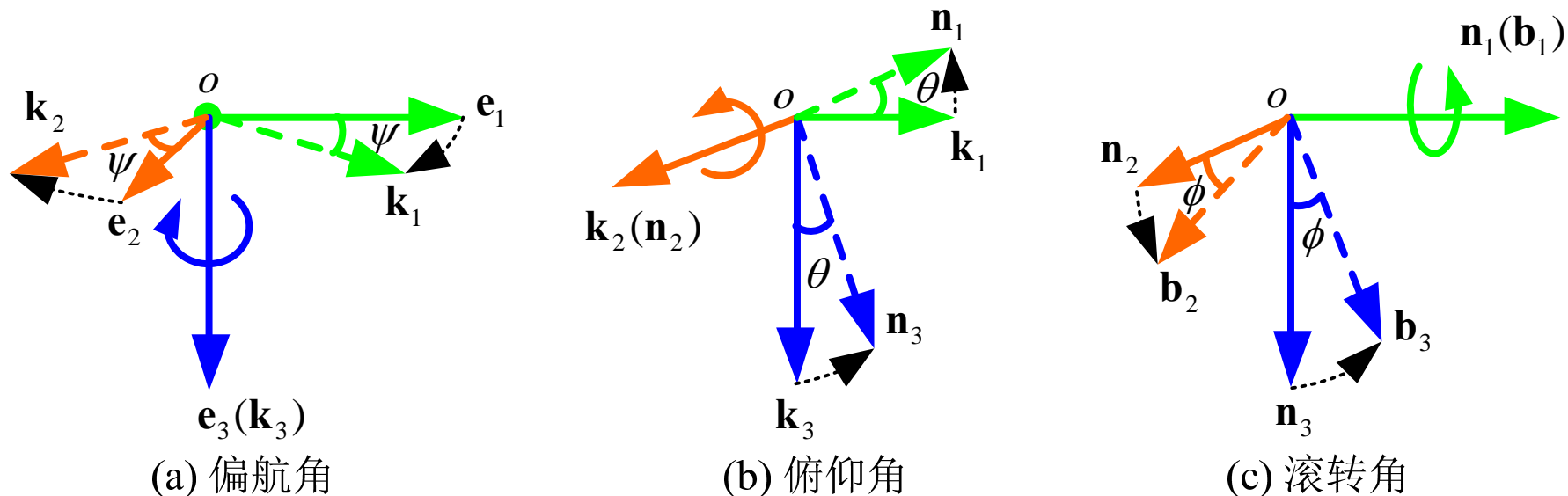
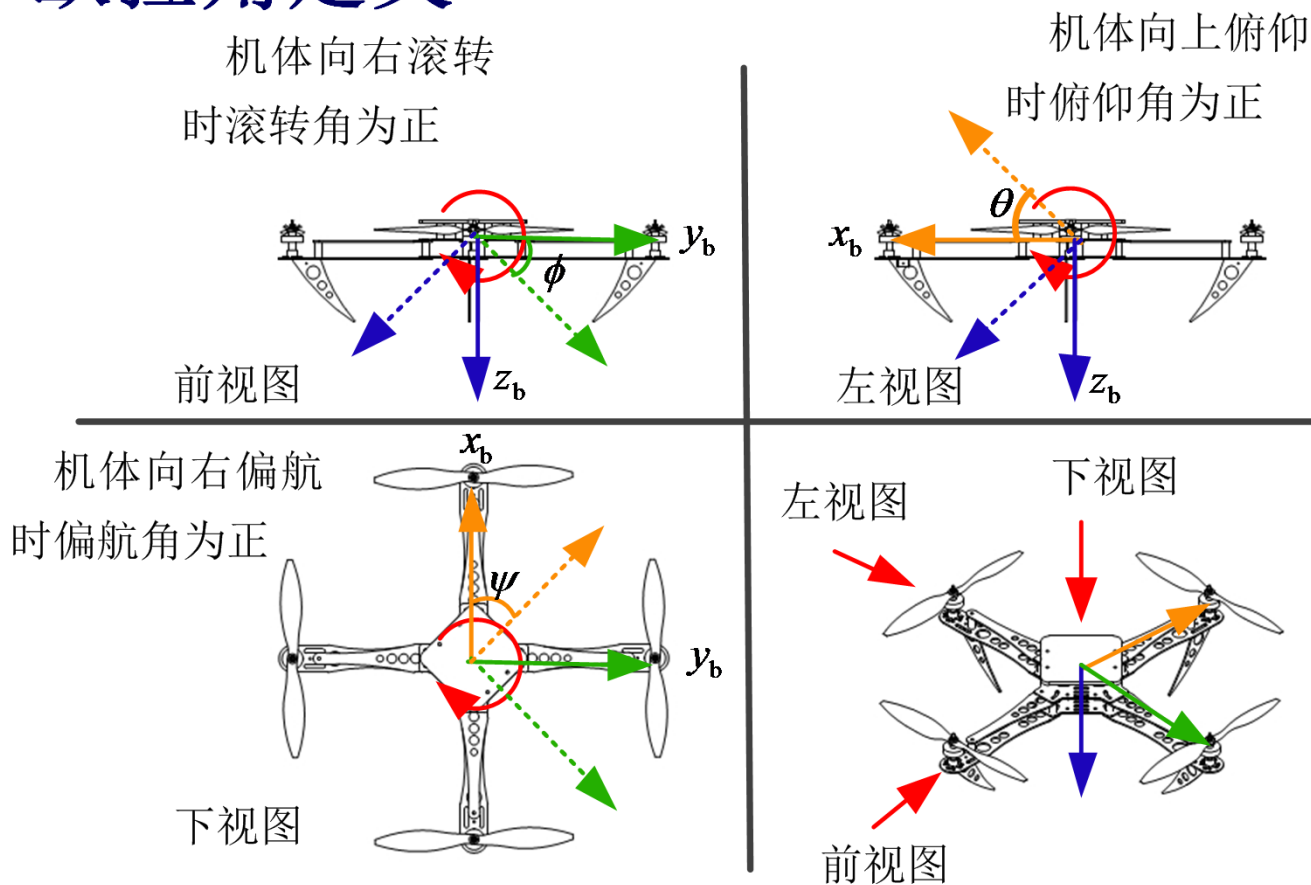


图 5.3 偏航角、俯仰角与滚转角分步转动示意图



## 2. 欧拉角

### □ 欧拉角定义







## 2. 欧拉角

### □ 欧拉角定义

机体坐标系与地面地球固联坐标系之间的夹角就是飞机的姿态角，又称**欧拉角**：

- **俯仰角  $\theta$** ：机体轴与地平面（水平面）之间的夹角，飞机抬头为正。
- **偏航角（方位角）  $\psi$** ：机体轴在水平面上的投影与地轴之间的夹角，以机头右偏为正。
- **滚转角（倾斜角）  $\phi$** ：飞机对称面绕机体轴转过的角度，右滚为正。

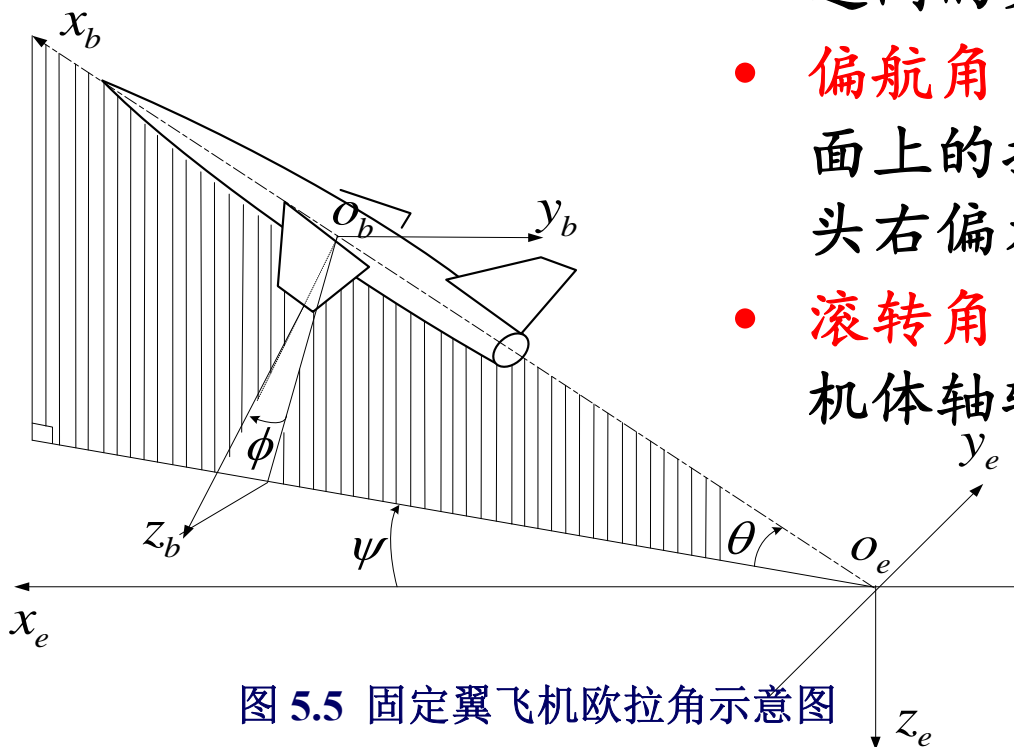


图 5.5 固定翼飞机欧拉角示意图



## 2. 欧拉角

### □ 欧拉角变化率与机体角速度的关系

机体旋转的角速率为  ${}^b\boldsymbol{\omega} = [\omega_{x_b} \quad \omega_{y_b} \quad \omega_{z_b}]^T$

那么

$$\begin{bmatrix} \omega_{x_b} \\ \omega_{y_b} \\ \omega_{z_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad ?$$



## 2. 欧拉角

### □ 欧拉角变化率与机体角速度的关系

如果机体旋转的角速率为  ${}^b\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_{x_b} & \omega_{y_b} & \omega_{z_b} \end{bmatrix}^T$

$${}^b\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \cdot {}^b\mathbf{k}_3 + \dot{\theta} \cdot {}^b\mathbf{n}_2 + \dot{\phi} \cdot {}^b\mathbf{b}_1$$

注：左上标**b**表示向量在机体坐标系的表示

因此有

$$\begin{bmatrix} \omega_{x_b} \\ \omega_{y_b} \\ \omega_{z_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \cos\theta\sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$



## 2. 欧拉角

### □ 欧拉角变化率与机体角速度的关系

进一步可以得到

$$\dot{\Theta} = \mathbf{W} \cdot {}^b \boldsymbol{\omega}$$

其中

$$\Theta \triangleq [\phi \quad \theta \quad \psi]^T \quad \mathbf{W} \triangleq \begin{bmatrix} 1 & \tan \theta \sin \phi & \tan \theta \cos \phi \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi / \cos \theta & \cos \phi / \cos \theta \end{bmatrix} \quad \theta = \pm \pi/2$$

奇异性问题

当  $\theta, \phi \approx 0$  时, 可以认为

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{x_b} \\ \omega_{y_b} \\ \omega_{z_b} \end{bmatrix}$$



# 3. 旋转矩阵

## □ 旋转矩阵定义

旋转矩阵中的向量满足

$${}^e\mathbf{b}_1 = \mathbf{R}_b^e \cdot {}^b\mathbf{b}_1 = \mathbf{R}_b^e \cdot \mathbf{e}_1, \quad {}^e\mathbf{b}_2 = \mathbf{R}_b^e \cdot {}^b\mathbf{b}_2 = \mathbf{R}_b^e \cdot \mathbf{e}_2, \quad {}^e\mathbf{b}_3 = \mathbf{R}_b^e \cdot {}^b\mathbf{b}_3 = \mathbf{R}_b^e \cdot \mathbf{e}_3$$

左上标 $e$ 表示向量在惯性坐标系的表示

左上标 $b$ 表示向量在机体坐标系的表示

定义旋转矩阵为

右上标表示从机体坐标系 $b$ 旋转到地球固联坐标系 $e$ 的旋转矩阵

$$\mathbf{R}_b^e \triangleq \begin{bmatrix} {}^e\mathbf{b}_1 & {}^e\mathbf{b}_2 & {}^e\mathbf{b}_3 \end{bmatrix}$$

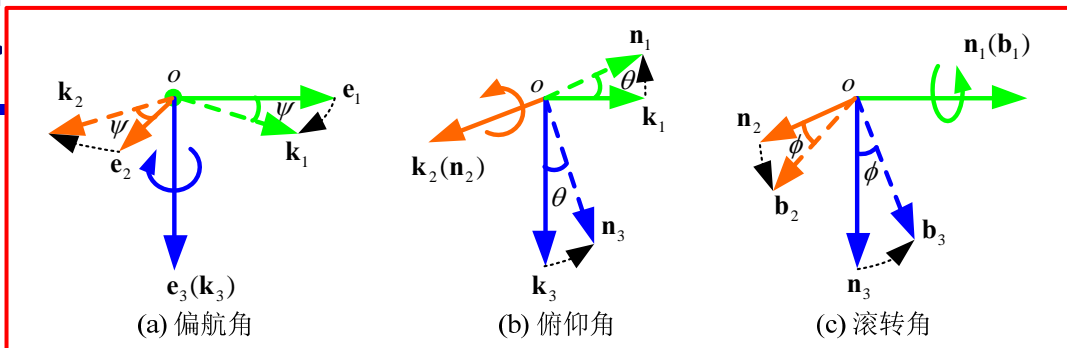
$$\mathbf{R}_b^e \mathbf{R}_b^{eT} = \mathbf{R}_b^{eT} \mathbf{R}_b^e = \mathbf{I}_3$$
$$\det(\mathbf{R}_b^e) = 1$$

注:  $\det()$  表示求矩阵的行列式



# 3. 旋转矩阵

## □ 旋转矩阵定义



从地球固联坐标系到机体坐标系的旋转可以通过三步来完成

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{R}_z(\psi)} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_2 \\ \mathbf{k}_3 = \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{R}_y(\theta)} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 = \mathbf{k}_2 \\ \mathbf{n}_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{R}_x(\phi)} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 = \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{bmatrix},$$

其中

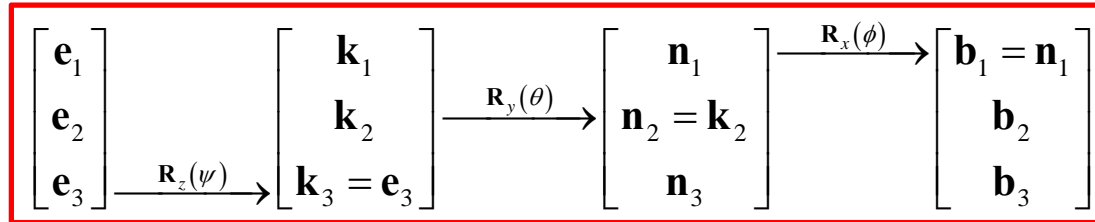
$$\mathbf{R}_z(\psi) \triangleq \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{R}_y(\theta) \triangleq \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, \mathbf{R}_x(\phi) \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}.$$





# 3. 旋转矩阵

## □ 旋转矩阵定义



$$\mathbf{R}_b^e = (\mathbf{R}_e^b)^{-1}$$

$$= \mathbf{R}_z^{-1}(\psi) \mathbf{R}_y^{-1}(\theta) \mathbf{R}_x^{-1}(\phi)$$

$$= \mathbf{R}_z(-\psi) \mathbf{R}_y(-\theta) \mathbf{R}_x(-\phi)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi \\ \cos \theta \sin \psi & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi \\ -\sin \theta & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}$$



# 3. 旋转矩阵

## □ 旋转矩阵定义

$$\mathbf{R}_b^e \triangleq \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

由旋转矩阵  
反求欧拉角

$$\tan(\psi) = \frac{r_{21}}{r_{11}}$$

$$\psi = \arctan \frac{r_{21}}{r_{11}}$$

$$\sin(\theta) = -r_{31}$$

$$\theta = \arcsin(-r_{31})$$

$$\tan(\phi) = \frac{r_{32}}{r_{33}}$$

$$\phi = \arctan \frac{r_{32}}{r_{33}}$$

当  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$  时

$$\mathbf{R}_b^e = \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\psi \mp \phi) & \cos(\psi \mp \phi) \\ 0 & \cos(\psi \mp \phi) & \sin(\psi \mp \phi) \\ \mp 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

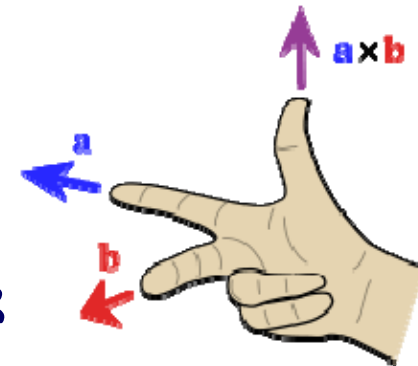
$\theta = \pm \pi/2$   
奇异性  
问题

在奇异情况  
下，人为设  
定  $\phi = 0$

此时， $\psi \mp \phi$  与  $\mathbf{R}_b^e$  一一对应，但是  $\psi, \phi$  的具体值不能唯一确定，有无穷多种组合。



# 3. 旋转矩阵



## □ 旋转矩阵导数与机体角速度的关系

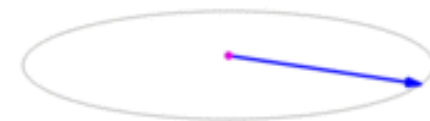
两个向量  $\mathbf{a} \triangleq [a_x \ a_y \ a_z]^T$  和  $\mathbf{b} \triangleq [b_x \ b_y \ b_z]^T$  的叉乘定义为

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [\mathbf{a}]_{\times} \mathbf{b}$$

其中

$$[\mathbf{a}]_{\times} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta \mathbf{n}$$



以上图片来自 [https://en.wikipedia.org/wiki/Cross\\_product](https://en.wikipedia.org/wiki/Cross_product)



# 3. 旋转矩阵

## □ 旋转矩阵导数与机体角速度的关系

仅考虑刚体旋转（不考虑平动），由动力学知识可知，对任意向量  ${}^e \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$  求导（**类比下圆周运动**）

$$\frac{d {}^e \mathbf{r}}{dt} = {}^e \boldsymbol{\omega} \times {}^e \mathbf{r}$$

其中  $\times$  表示向量的**叉乘**。

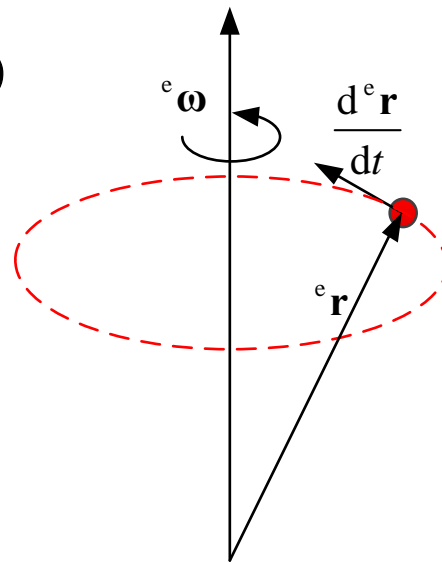


图 5.6 向量求导的直观表示

我们可以得到

$$\frac{d \begin{bmatrix} {}^e \mathbf{b}_1 & {}^e \mathbf{b}_2 & {}^e \mathbf{b}_3 \end{bmatrix}}{dt} = \begin{bmatrix} {}^e \boldsymbol{\omega} \times {}^e \mathbf{b}_1 & {}^e \boldsymbol{\omega} \times {}^e \mathbf{b}_2 & {}^e \boldsymbol{\omega} \times {}^e \mathbf{b}_3 \end{bmatrix}$$



## 3. 旋转矩阵

### □ 旋转矩阵导数与机体角速度的关系

由  ${}^e\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R}_b^e \cdot {}^b\boldsymbol{\omega}$  及叉乘的性质即可得

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{R}_b^e}{dt} &= \begin{bmatrix} ({}^b\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1) & ({}^b\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_2) & ({}^b\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3) \\ \mathbf{R}_b^e ({}^b\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1) & \mathbf{R}_b^e ({}^b\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_2) & \mathbf{R}_b^e ({}^b\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3) \\ \mathbf{R}_b^e [{}^b\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1 \quad {}^b\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_2 \quad {}^b\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3] \\ \mathbf{R}_b^e [{}^b\boldsymbol{\omega}]_x \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{R}_b^e [{}^b\boldsymbol{\omega}]_x\end{aligned}$$

推导过程中用到了叉乘的性质：对于旋转矩阵  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  ( $\det(\mathbf{R}) = 1$ ) 和任意向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ ，我们有

$$(\mathbf{R}\mathbf{a}) \times (\mathbf{R}\mathbf{b}) = \mathbf{R}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

- 采用旋转矩阵表示避免了奇异性问题。然而，以上方程含有9个自由变量，因此求解微分方程的计算量比较大。



## 4. 四元数

### □ 四元数定义

四元数一般用向量的形式表示为

$$\mathbf{q} \triangleq \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix}$$

其中  $q_0$  为四元数的标量部分,  $\mathbf{q}_v = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T$

为四元数的向量部分。对于一个实数  $s$ ,

其四元数表示形式为  $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} s \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix}$ , 对于一个纯向量  $\mathbf{v}$ , 其四元数表示形式  $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}$ 。

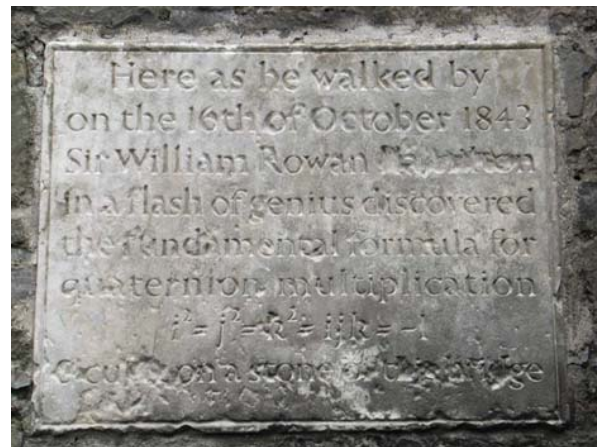


图 5.7 爱尔兰都柏林布鲁穆桥（现称为金雀花桥 Broom Bridge）上的四元数石碑, 图片来自

<https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion>

石碑上写着 “Here as he walked by on the 16th of October 1843 Sir William Rowan Hamilton in a flash of genius discovered the fundamental formula for quaternion multiplication  $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$  & cut it on a stone of this bridge.”





## 4. 四元数

### □ 四元数的基本运算法则

(1) 四元数加、减法 
$$\mathbf{p} \pm \mathbf{q} = \begin{bmatrix} p_0 \\ \mathbf{p}_v \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 \pm q_0 \\ \mathbf{p}_v \pm \mathbf{q}_v \end{bmatrix}$$

(2) 四元数乘法 
$$\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} = \begin{bmatrix} p_0 \\ \mathbf{p}_v \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 q_0 - \mathbf{q}_v^T \mathbf{p}_v \\ \mathbf{p}_v \times \mathbf{q}_v + p_0 \mathbf{q}_v + q_0 \mathbf{p}_v \end{bmatrix}$$

一些运算性质(注:  $\mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{m}$ 是四元数,  $s$ 为标量,  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 为列向量)

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \otimes (\mathbf{r} + \mathbf{m}) &= \mathbf{q} \otimes \mathbf{r} + \mathbf{q} \otimes \mathbf{m} \\ \mathbf{q} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{m} &= (\mathbf{q} \otimes \mathbf{r}) \otimes \mathbf{m} = \mathbf{q} \otimes (\mathbf{r} \otimes \mathbf{m}) \\ s\mathbf{q} = \mathbf{q}s &= \begin{bmatrix} sq_0 \\ s\mathbf{q}_v \end{bmatrix} \quad \mathbf{q}_u \otimes \mathbf{q}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{u}^T \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \times \mathbf{v} \end{bmatrix} \end{aligned}$$



## 4. 四元数

### □ 四元数的基本运算法则

#### (3) 四元数共轭

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} q_0 \\ -\mathbf{q}_v \end{bmatrix}$$

#### 一些运算性质

$$(\mathbf{q}^*)^* = \mathbf{q}$$

$$(\mathbf{p} \otimes \mathbf{q})^* = \mathbf{q}^* \otimes \mathbf{p}^*$$

$$(\mathbf{p} + \mathbf{q})^* = \mathbf{p}^* + \mathbf{q}^*$$

#### (4) 四元数范数

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q}\|^2 &= \|\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^*\| = \|\mathbf{q}^* \otimes \mathbf{q}\| \\ &= q_0^2 + \mathbf{q}_v^T \mathbf{q}_v \\ &= q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \end{aligned}$$

#### 一些运算性质

$$\|\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}\| = \|\mathbf{p}\| \|\mathbf{q}\|$$

$$\|\mathbf{q}^*\| = \|\mathbf{q}\|$$



## 4. 四元数

### □ 四元数的基本运算法则

(5) 四元数的逆  $\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix}$

由  $\mathbf{q}^*$  的定义可知，四元数的逆可以表示为  $\mathbf{q}^{-1} = \frac{\mathbf{q}^*}{\|\mathbf{q}\|}$

### (6) 单位四元数

当四元数  $\mathbf{q}$  的范数  $\|\mathbf{q}\|=1$  时，四元数  $\mathbf{q}$  称为单位四元数。单位四元数有如下性质：当四元数  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  满足  $\|\mathbf{p}\| = \|\mathbf{q}\| = 1$ ，则有

$$\|\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}\| = 1$$

$$\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^*$$



# 4. 四元数

## □ 四元数与旋转

假如 $q$ 表示旋转，而 $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^3$ 表示向量，那么在旋转 $q$ 作用下，向量 $\mathbf{v}_1$ 变为向量 $\mathbf{v}'_1$ 。我们用如下形式表示这个过程

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}'_1 \end{bmatrix} = \mathbf{q} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}^{-1}$$

第一行是恒成立的

单位四元数的物理含义是

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \mathbf{v} \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

这一部分可进一步参考 Shoemaker K. Quaternions. Department of Computer and Information Science, University of Pennsylvania, USA, 1994 [Online], available:

<http://www.cs.ucr.edu/~vbz/resources/quatut.pdf>

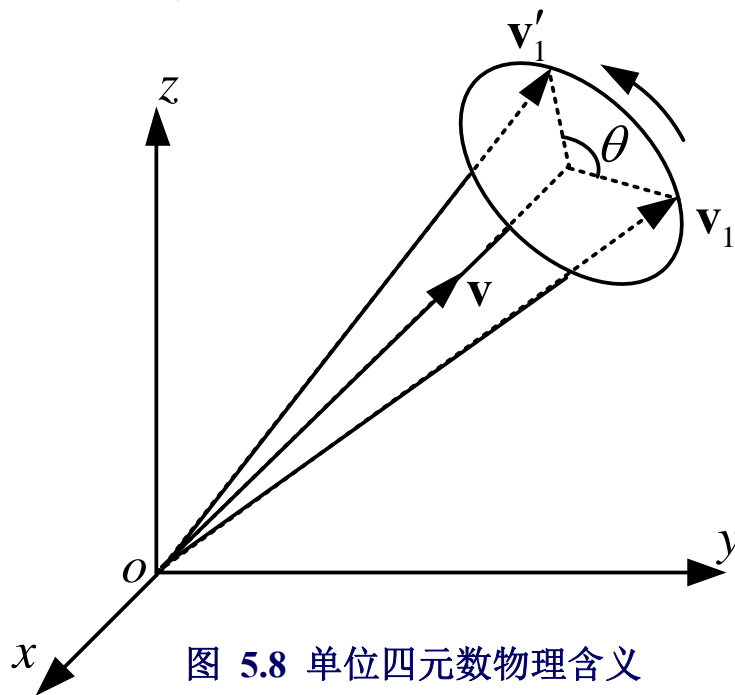


图 5.8 单位四元数物理含义



# 4. 四元数

## □ 四元数与旋转

已知两个三维单位向量  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_1 \neq \pm \mathbf{v}_0)$ 。定义  $\theta/2$  为  $\mathbf{v}_0$  到  $\mathbf{v}_1$  之间的角度，可以推知

$$\mathbf{v}_0^T \mathbf{v}_1 = \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_1\|} = \frac{\mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_0\| \|\mathbf{v}_1\| \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{\mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_1}{\sin \frac{\theta}{2}} \quad \rightarrow$$

$$\mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_1 = \mathbf{v} \sin \frac{\theta}{2}$$

定义一个单位四元数，可以得到

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \mathbf{v} \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0^T \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_0 \end{bmatrix}^*$$

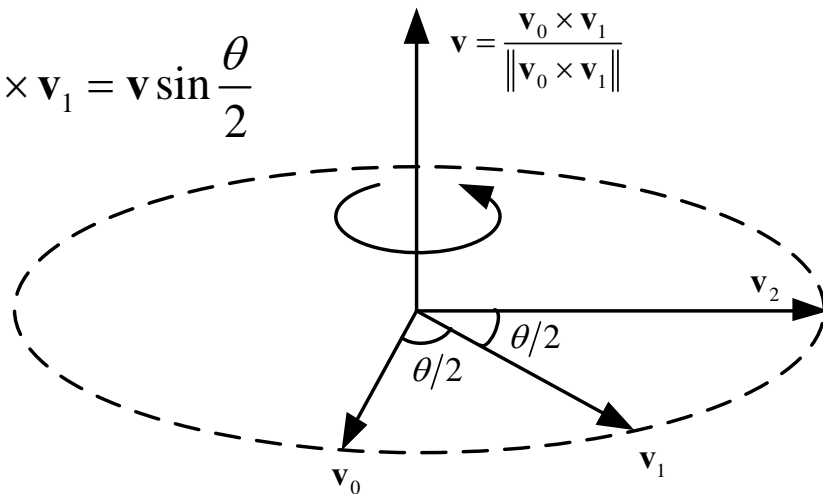


图 5.9 四元数旋转示意图



# 4. 四元数

## 四元数与旋转（为什么能表示旋转）

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{q} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}^{-1} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix}^* &= \left( \mathbf{q} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}^{-1} \right) \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix}^* \\ &= \mathbf{q} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_0 \end{bmatrix} \otimes \left( \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix}^* \right) \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix}^* \\ &= \mathbf{q} \otimes \left( \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_0 \end{bmatrix} \right) \otimes \left( \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix}^* \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix}^* \right) \\ &= \mathbf{q} \otimes \begin{bmatrix} -1 \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -1 \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{q} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_0 \end{bmatrix}^* \end{aligned}$$

$\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  的内积与外积相等，因此三个向量处于同一平面，且  $\mathbf{v}_2$  与  $\mathbf{v}_1$  的夹角也为  $\theta/2$ ，正如下图所示。

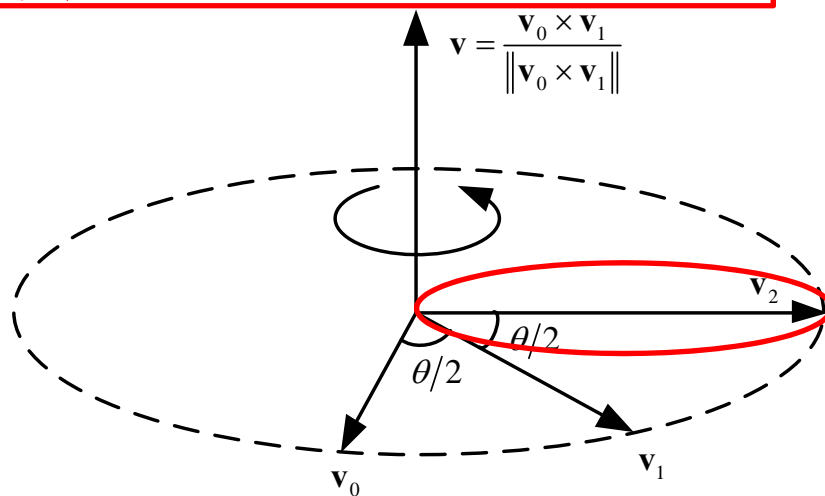


图 5.9 四元数旋转示意图



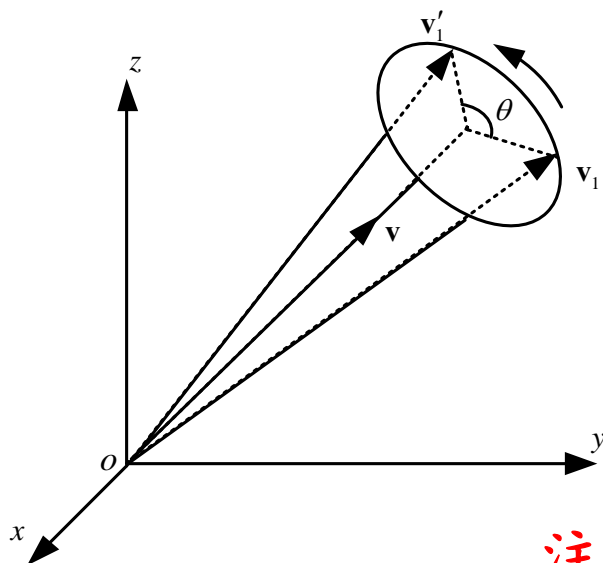


# 4. 四元数

## □ 四元数与旋转

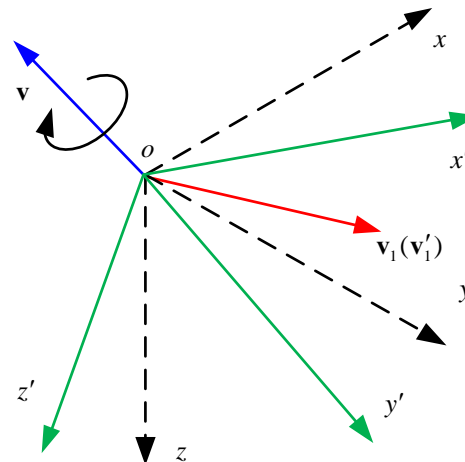
(1) 向量旋转

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}'_1 \end{bmatrix} = \mathbf{q} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}^{-1}$$



(2) 坐标系旋转

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}'_1 \end{bmatrix} = \mathbf{q}^{-1} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}$$



**注意两者的不同！**



# 4. 四元数

右上标表示从地球固联坐标系 $e$ 旋转到机体坐标系 $b$ 的单位四元数

## □ 四元数与旋转矩阵转换

假定地球固联坐标系到机体坐标系的旋转四元数为  $\mathbf{q}_e^b = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]^T$ ,

则有 (坐标系旋转)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{e}_r \end{bmatrix} &= (\mathbf{q}_b^e)^{-1} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b}_r \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}_b^e \\ &= \mathbf{q}_e^b \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b}_r \end{bmatrix} \otimes (\mathbf{q}_e^b)^{-1} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{e}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b}_r \end{bmatrix}$$

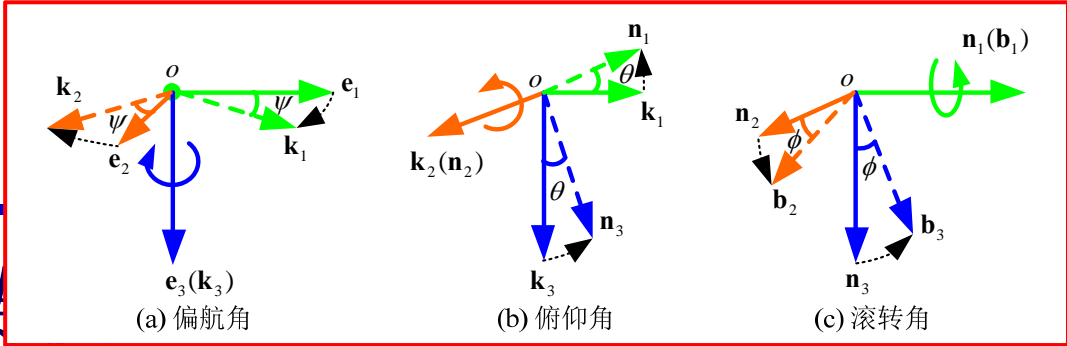
$$\Rightarrow \mathbf{e}_r = \mathbf{C}(\mathbf{q}_e^b) \mathbf{b}_r \quad \mathbf{C}(\mathbf{q}_e^b) = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{R}_b^e = \mathbf{C}(\mathbf{q}_e^b)$$



# 4. 四元数

## 四元数与欧拉角转



根据旋转欧拉角的顺序，可得

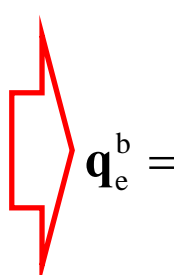
$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b}_r \end{bmatrix} &= (\mathbf{q}_e^b)^{-1} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{e}_r \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}_e^b \\
 &= (\mathbf{q}_z(\psi) \otimes \mathbf{q}_y(\theta) \otimes \mathbf{q}_x(\phi))^{-1} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{e}_r \end{bmatrix} \otimes (\mathbf{q}_z(\psi) \otimes \mathbf{q}_y(\theta) \otimes \mathbf{q}_x(\phi)) \\
 &= (\mathbf{q}_x(\phi))^{-1} \otimes \left( (\mathbf{q}_y(\theta))^{-1} \otimes \left( (\mathbf{q}_z(\psi))^{-1} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{e}_r \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}_z(\psi) \right) \otimes \mathbf{q}_y(\theta) \right) \otimes \mathbf{q}_x(\phi)
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{q}_e^b = \mathbf{q}_z(\psi) \otimes \mathbf{q}_y(\theta) \otimes \mathbf{q}_x(\phi)$$

$$\mathbf{q}_x(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\phi}{2} & \sin \frac{\phi}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{q}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & 0 & \sin \frac{\theta}{2} & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{q}_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\psi}{2} & 0 & 0 & \sin \frac{\psi}{2} \end{bmatrix}^T$$



$$\mathbf{q}_e^b = \begin{bmatrix} \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\ \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\ \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\ \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \end{bmatrix}$$



## 4. 四元数

### □ 四元数与欧拉角转换

根据坐标系旋转的四元数，可得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ {}^b \mathbf{r} \end{bmatrix} &= (\mathbf{q}_e^b)^{-1} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ {}^e \mathbf{r} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}_e^b \\ &= (\mathbf{q}_z(\psi) \otimes \mathbf{q}_y(\theta) \otimes \mathbf{q}_x(\phi))^{-1} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ {}^e \mathbf{r} \end{bmatrix} \otimes (\mathbf{q}_z(\psi) \otimes \mathbf{q}_y(\theta) \otimes \mathbf{q}_x(\phi)) \\ &= (\mathbf{q}_x(\phi))^{-1} \otimes \left( (\mathbf{q}_y(\theta))^{-1} \otimes \left( (\mathbf{q}_z(\psi))^{-1} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ {}^e \mathbf{r} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}_z(\psi) \right) \otimes \mathbf{q}_y(\theta) \right) \otimes \mathbf{q}_x(\phi) \end{aligned}$$

这与前文所定义的从地球系旋转得到机体系的顺序一致。



# 4. 四元数

## □ 四元数与欧拉角转换

$$\mathbf{q}_e^b = \begin{bmatrix} \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\ \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\ \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\ \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \end{bmatrix}$$

$$\tan(\phi) = \frac{2(q_0 q_1 + q_2 q_3)}{1 - 2(q_1^2 + q_2^2)}$$

$$\sin(\theta) = 2(q_0 q_2 - q_1 q_3)$$

$$\tan(\psi) = \frac{2(q_0 q_3 + q_1 q_2)}{1 - 2(q_2^2 + q_3^2)}$$

$$\phi = \arctan \frac{2(q_0 q_1 + q_2 q_3)}{1 - 2(q_1^2 + q_2^2)}$$

$$\theta = \arcsin(2(q_0 q_2 - q_1 q_3))$$

$$\psi = \arctan \left( \frac{2(q_0 q_3 + q_1 q_2)}{1 - 2(q_2^2 + q_3^2)} \right)$$

当  $\theta = \pm \pi/2$  时，发生奇异

$$\mathbf{q}_e^b = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\psi \mp \phi}{2}\right) \\ \mp \sin\left(\frac{\psi \mp \phi}{2}\right) \\ \pm \cos\left(\frac{\psi \mp \phi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\psi \mp \phi}{2}\right) \end{bmatrix}$$

无穷多种组合

在奇异情况下，人为设定  $\phi = 0$



## 4. 四元数

### □ 四元数变化率与机体角速度的关系

根据坐标系旋转的复合四元数得

$$\mathbf{q}_e^b(t + \Delta t) = \mathbf{q}_e^b(t) \otimes \Delta \mathbf{q}$$

摄动

其中

$$\Delta \mathbf{q} = \left[ \cos \frac{\theta}{2} \quad \mathbf{v}^T \sin \frac{\theta}{2} \right]^T, \theta = \|\mathbf{b} \boldsymbol{\omega}\| \Delta t, \mathbf{v} = \frac{\mathbf{b} \boldsymbol{\omega}}{\|\mathbf{b} \boldsymbol{\omega}\|}$$

机体角速度

忽略  $\Delta t$  的高阶无穷小可以得到

$$\Delta \mathbf{q} = \left[ 1 \quad \frac{1}{2} \mathbf{b} \boldsymbol{\omega}^T \Delta t \right]^T$$





## 4. 四元数

### □ 四元数变化率与机体角速度的关系

对  $\mathbf{q}_e^b(t)$  求导可得

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}_e^b(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{q}_e^b(t + \Delta t) - \mathbf{q}_e^b(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{q}_e^b(t) \otimes \Delta \mathbf{q} - \mathbf{q}_e^b(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{q}_e^b(t) \otimes \left[ 1 \quad \frac{1}{2} {}^b \boldsymbol{\omega} \Delta t \right]^T - \mathbf{q}_e^b(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left( \mathbf{I}_3 + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -{}^b \boldsymbol{\omega}^T \Delta t \\ {}^b \boldsymbol{\omega} \Delta t & -[{}^b \boldsymbol{\omega} \Delta t]_{\times} \end{bmatrix} \right) \mathbf{q}_e^b(t) - \mathbf{q}_e^b(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -{}^b \boldsymbol{\omega}^T \\ {}^b \boldsymbol{\omega} & -[{}^b \boldsymbol{\omega}]_{\times} \end{bmatrix} \mathbf{q}_e^b(t)\end{aligned}$$



## 4. 四元数

### □ 四元数变化率与机体角速度的关系

$$\dot{\mathbf{q}}_e^b(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -{}^b\boldsymbol{\omega}^T \\ {}^b\boldsymbol{\omega} & -[{}^b\boldsymbol{\omega}]_{\times} \end{bmatrix} \mathbf{q}_e^b(t)$$
$$\mathbf{q}_e^b = \begin{bmatrix} q_0 & \mathbf{q}_v^T \end{bmatrix}^T$$
$$\dot{q}_0 = -\frac{1}{2} \mathbf{q}_v^T \cdot {}^b\boldsymbol{\omega}$$
$$\dot{\mathbf{q}}_v = \frac{1}{2} (q_0 \mathbf{I}_3 + [\mathbf{q}_v]_{\times}) {}^b\boldsymbol{\omega}$$

在实际中， ${}^b\boldsymbol{\omega}$  可由三轴陀螺仪近似测得，此时以上微分方程为**线性的**！



## 5. 本讲小结

- 欧拉角与机体角速度的关系

$$\dot{\Theta} = \mathbf{W} \cdot {}^b \boldsymbol{\omega} \quad \text{奇异, 非线性}$$

- 旋转矩阵与机体角速度的关系

$$\frac{d\mathbf{R}_b^e}{dt} = \mathbf{R}_b^e \left[ {}^b \boldsymbol{\omega} \right]_{\times} \quad \text{不奇异, 维数高}$$

- 四元数与机体角速度的关系

$$\dot{\mathbf{q}}_e^b(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -{}^b \boldsymbol{\omega}^T \\ {}^b \boldsymbol{\omega} & -\left[ {}^b \boldsymbol{\omega} \right]_{\times} \end{bmatrix} \mathbf{q}_e^b(t)$$

不奇异, 维数适中  
多旋翼自驾仪基本用这种形式

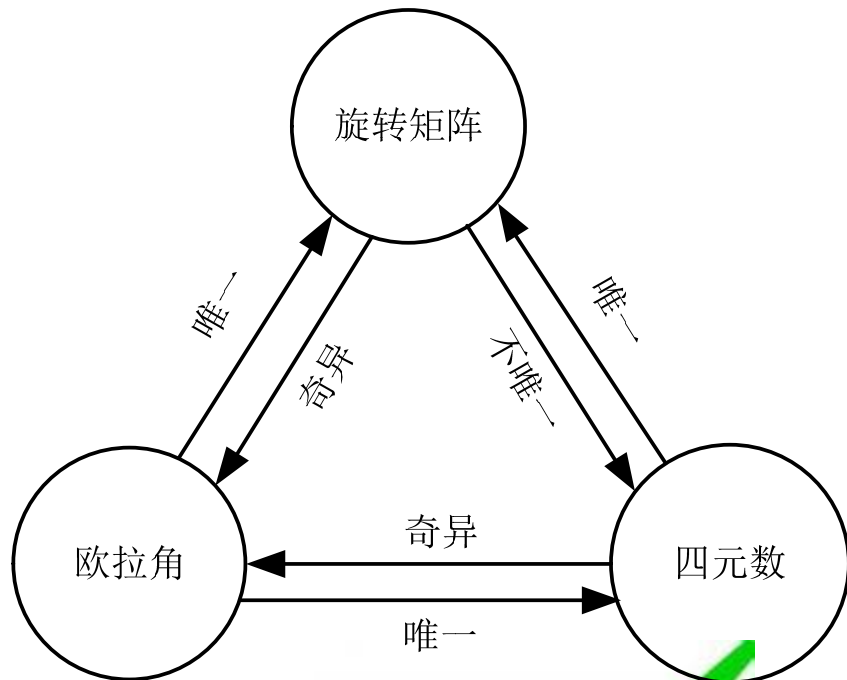


图 5.10 三种旋转表示法之间的相互转换



# 资源

---

(1) 可靠飞行控制研究组主页课程中心(全部课件下载)

<http://rfly.buaa.edu.cn/course>

(2) 关注可靠飞行控制研究组公众号 buaarfly(文章、资讯等)

(3) 多旋翼设计与控制交流QQ群:183613048

(4) 视频课程(MOOC)同步发布, 网易云课堂搜索 “多旋翼”

<http://study.163.com/course/introduction/1003715005.htm>

(5) 同名中文书本教材《多旋翼飞行器设计与控制》即将在电子工业出版社出版, 敬请期待

(6) 有疑问可联系课程总助教戴训华, 邮箱: [dai@buaa.edu.cn](mailto:dai@buaa.edu.cn)



# 致谢

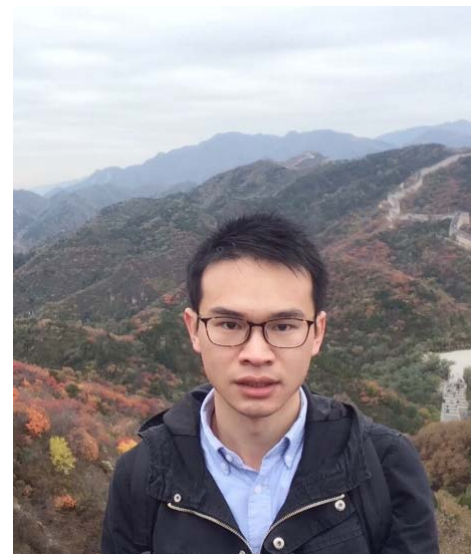
## 感谢控制组同学



马海彪



任锦瑞



戴训华

为本节课程准备作出的贡献。



---

# 谢谢！





---

# 多旋翼飞行器设计与控制

## 第六讲 动态模型和参数测量

全权 副教授

qq\_buaa@buaa.edu.cn

自动化科学与电气工程学院

北京航空航天大学



# 东方智慧



八卦图



# 核心问题

---

怎样建立多旋翼的动态模型以及模型参数如何测量?



# 大纲

---

1. 多旋翼控制模型
2. 多旋翼气动阻力模型
3. 多旋翼模型参数测量
4. 本讲小结



# 1. 多旋翼控制模型

## □ 总体描述

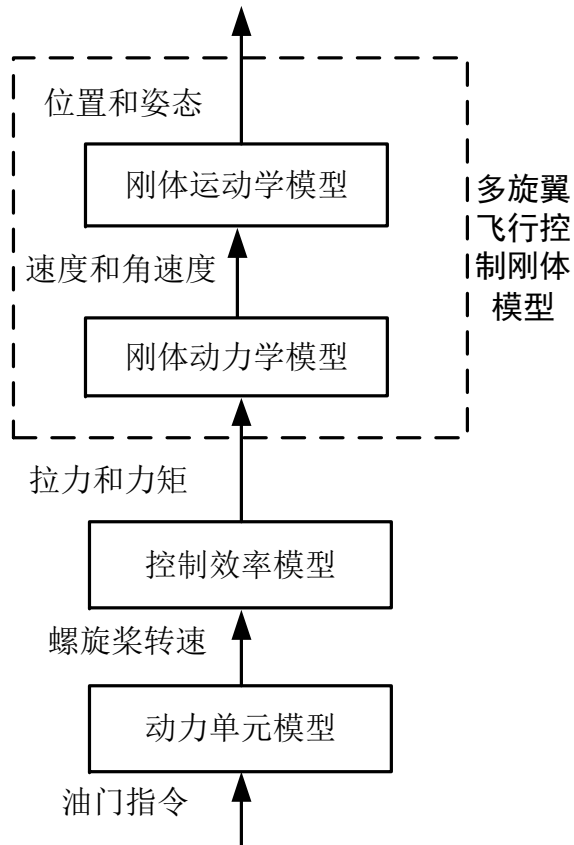


图6.1 多旋翼的建模流程图

(1) 刚体运动学模型。跟质量与受力无关，只研究位置、速度、姿态、角速度等参量，常以质点为模型。

(2) 刚体动力学模型。它与一般刚体动力学模型最大的不同是，**拉力方向始终与机体轴 $z_b$ 轴的负方向一致**。

(3) 控制效率模型。六旋翼和四旋翼的区别，就在这个控制效率模型上。

(4) 动力单元模型。以无刷直流电机、电调和螺旋桨为一组的整个动力机构。输入是0~1的电机油门指令，输出是螺旋桨转速。



# 1. 多旋翼控制模型

## □ 多旋翼飞行控制刚体模型

### (1) 假设和符号定义

假设1. 多旋翼是刚体;

假设2. 质量和转动惯量是不变的;

假设3. 多旋翼几何中心与重心一致;

假设4. 多旋翼只受重力和螺旋桨拉力, 其中螺旋桨拉力沿 $z_b$ 轴负方向, 而重力沿 $z_e$ 轴正方向;

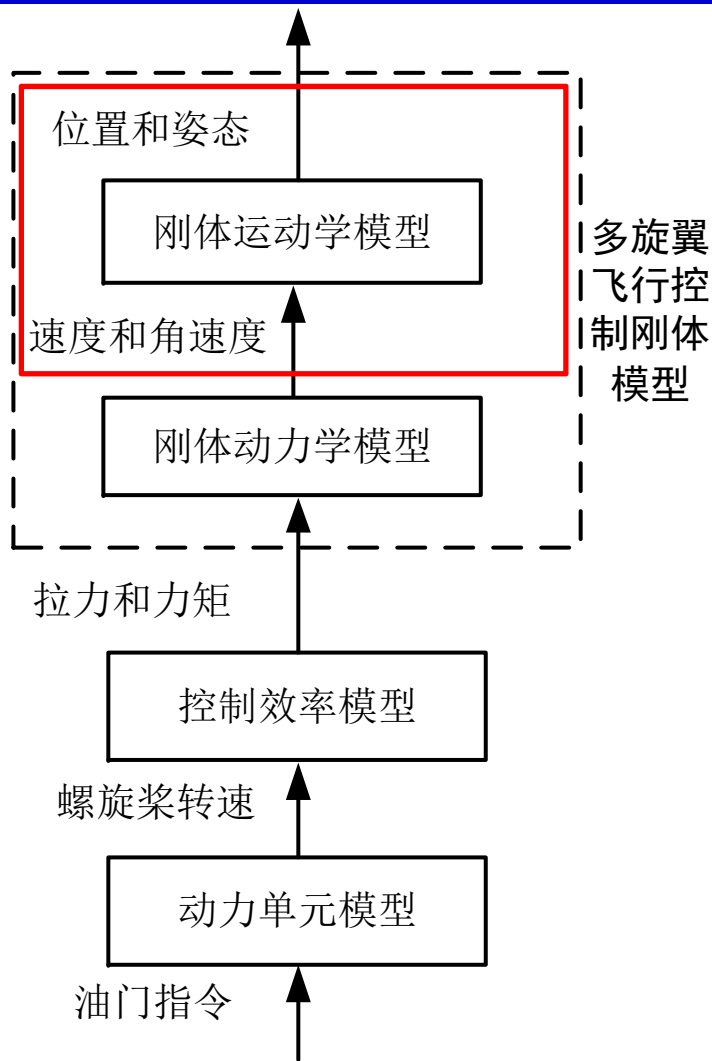
假设5. 奇数标号的螺旋桨逆时针转动, 偶数标号的螺旋桨顺时针转动。







# 1. 多旋翼控制模型





# 1. 多旋翼控制模型

## □ 多旋翼飞行控制刚体模型

### (2) 刚体运动学模型

#### 1) 基于欧拉角模型

$${}^e \dot{\mathbf{p}} = {}^e \mathbf{v}$$

$$\dot{\Theta} = \mathbf{W} \cdot {}^b \boldsymbol{\omega}$$

#### 2) 基于旋转矩阵模型

$${}^e \dot{\mathbf{p}} = {}^e \mathbf{v}$$

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \left[ {}^b \boldsymbol{\omega} \right]_{\times}$$

#### 3) 基于四元数模型

$${}^e \dot{\mathbf{p}} = {}^e \mathbf{v}$$

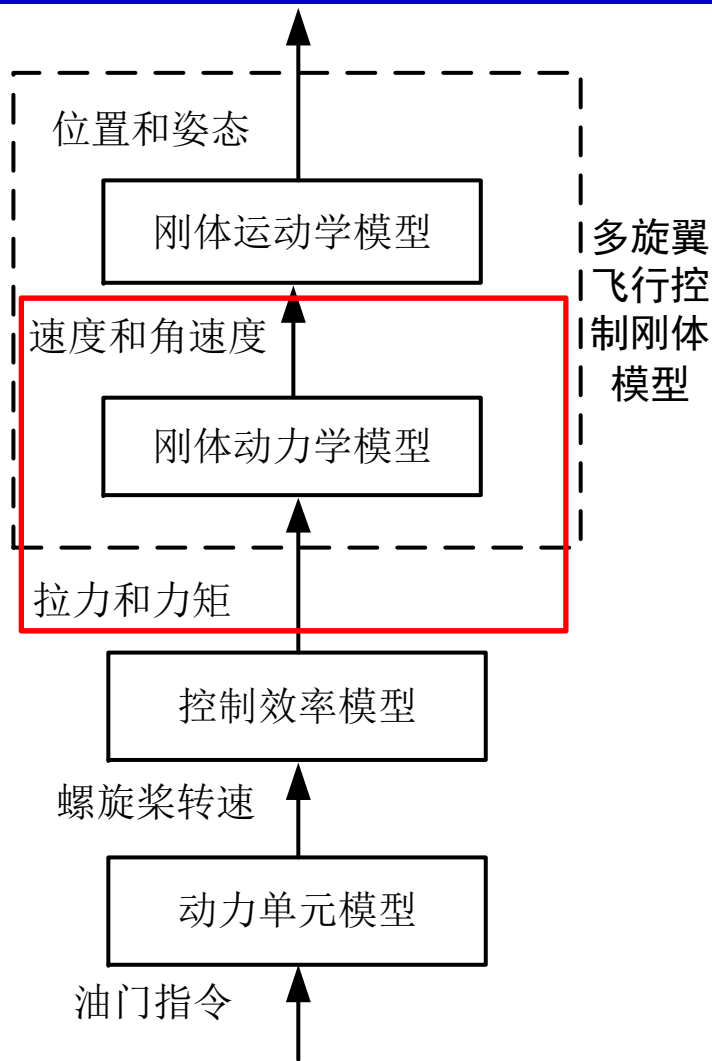
$$\dot{q}_0 = -\frac{1}{2} \mathbf{q}_v^T \cdot {}^b \boldsymbol{\omega}$$

$$\dot{\mathbf{q}}_v = \frac{1}{2} \left( q_0 \mathbf{I}_3 + [\mathbf{q}_v]_{\times} \right) {}^b \boldsymbol{\omega}$$

姿态表示见上一讲第五讲!



# 1. 多旋翼控制模型





# 1. 多旋翼控制模型

## □ 多旋翼飞行控制刚体模型

### (3) 动力学模型

- 地球系下的位置动力学模型

$${}^e \dot{\mathbf{v}} = g\mathbf{e}_3 - \frac{f}{m} {}^e \mathbf{b}_3$$

假设4. 多旋翼只受重力和螺旋桨拉力，其中螺旋桨拉力沿 $z_b$ 轴负方向，而重力沿 $z_e$ 轴正方向

- 机体系下的位置动力学模型

$${}^e \mathbf{v} = \mathbf{R} \cdot {}^b \mathbf{v}$$

所以两边求导可得

$${}^e \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{R} \cdot {}^b \dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{R}} \cdot {}^b \mathbf{v}$$

$$= \mathbf{R} \cdot {}^b \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{R} \left[ {}^b \boldsymbol{\omega} \right]_{\times} {}^b \mathbf{v}$$

$$\mathbf{R} \cdot {}^b \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{R} \left[ {}^b \boldsymbol{\omega} \right]_{\times} {}^b \mathbf{v}$$

$$= g\mathbf{e}_3 - \frac{f}{m} \mathbf{R}\mathbf{e}_3$$

$${}^b \dot{\mathbf{v}} = - \left[ {}^b \boldsymbol{\omega} \right]_{\times} {}^b \mathbf{v} + g\mathbf{R}^T \mathbf{e}_3 - \frac{f}{m} \mathbf{e}_3$$



# 1. 多旋翼控制模型

## □ 多旋翼飞行控制刚体模型

### (3) 动力学模型

- 姿态动力学模型

基于假设1-3，在机体坐标系建立多旋翼姿态动力学方程如下

$$\mathbf{J} \cdot {}^b \dot{\boldsymbol{\omega}} = - {}^b \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot {}^b \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{G}_a + \boldsymbol{\tau}$$

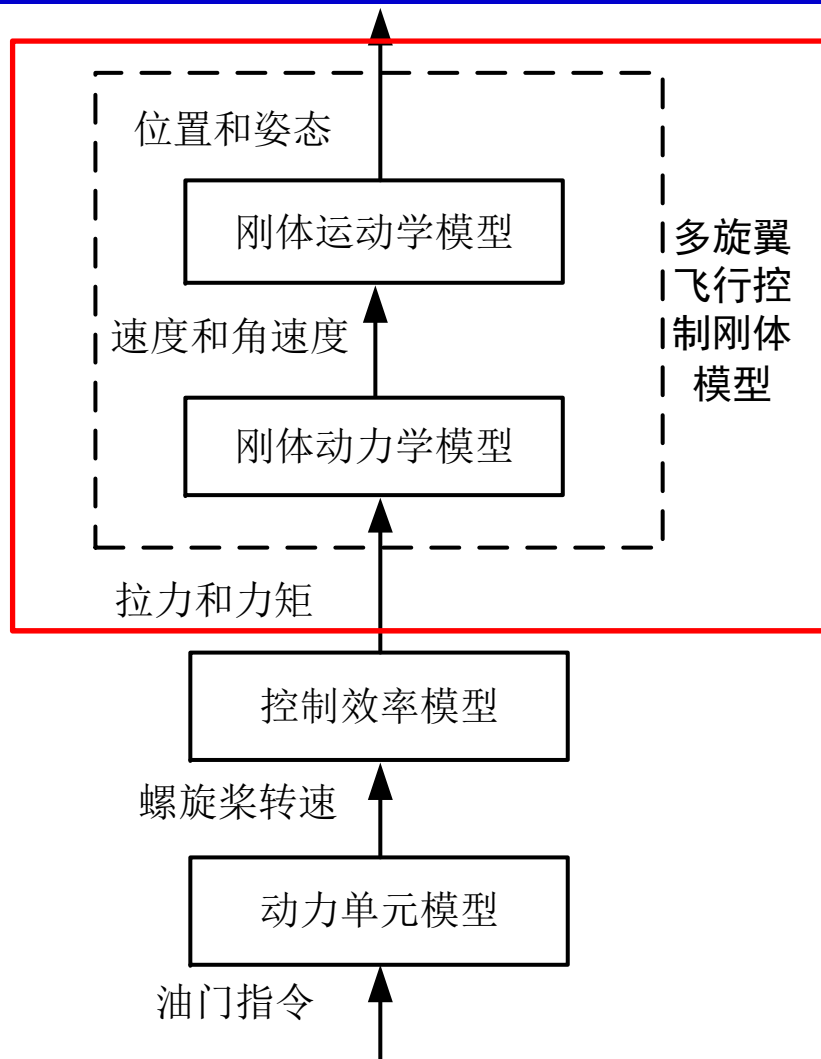
陀螺力矩  
力矩

其中  $\boldsymbol{\tau} \triangleq [\tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z]^T \in \mathbb{R}^3$  表示螺旋桨在机体轴上产生的力矩，

$\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  表示多旋翼的转动惯量。



# 1. 多旋翼控制模型







# 1. 多旋翼控制模型

## □ 多旋翼飞行控制刚体模型

### (4) 综合多旋翼飞行控制刚体模型

#### 模型1

$$\begin{cases} {}^e \dot{\mathbf{p}} = {}^e \mathbf{v} \\ {}^e \dot{\mathbf{v}} = g\mathbf{e}_3 - \frac{f}{m} \mathbf{R}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{\dot{R}} = \mathbf{R} \left[ {}^b \boldsymbol{\omega} \right]_{\times} \\ \mathbf{J} \cdot {}^b \dot{\boldsymbol{\omega}} = -{}^b \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot {}^b \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{G}_a + \boldsymbol{\tau} \end{cases}$$

#### 模型2

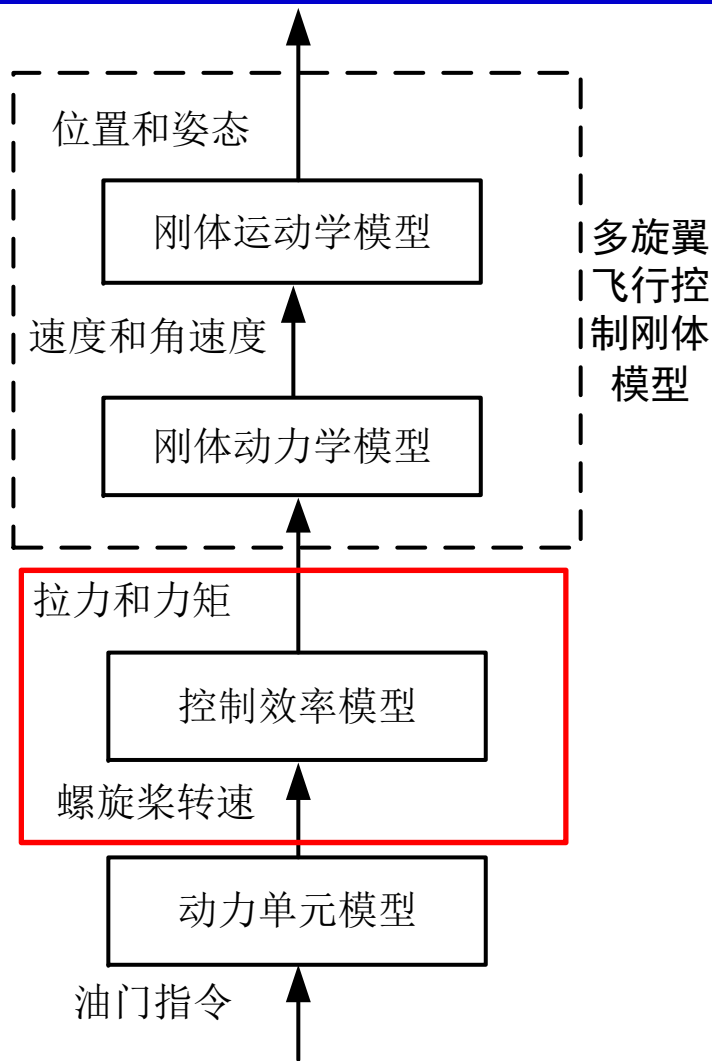
$$\begin{cases} {}^e \dot{\mathbf{p}} = {}^e \mathbf{v} \\ {}^e \dot{\mathbf{v}} = g\mathbf{e}_3 - \frac{f}{m} \mathbf{R}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{\dot{\Theta}} = \mathbf{W} \cdot {}^b \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{J} \cdot {}^b \dot{\boldsymbol{\omega}} = -{}^b \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot {}^b \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{G}_a + \boldsymbol{\tau} \end{cases}$$

#### 模型3

$$\begin{cases} {}^e \dot{\mathbf{p}} = {}^e \mathbf{v} \\ {}^e \dot{\mathbf{v}} = g\mathbf{e}_3 - \frac{f}{m} \mathbf{R}\mathbf{e}_3 \\ \dot{q}_0 = -\frac{1}{2} \mathbf{q}_v^T \cdot {}^b \boldsymbol{\omega} \\ \dot{\mathbf{q}}_v = \frac{1}{2} \left( q_0 \mathbf{I}_3 + [\mathbf{q}_v]_{\times} \right) {}^b \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{J} \cdot {}^b \dot{\boldsymbol{\omega}} = -{}^b \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot {}^b \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{G}_a + \boldsymbol{\tau} \end{cases}$$



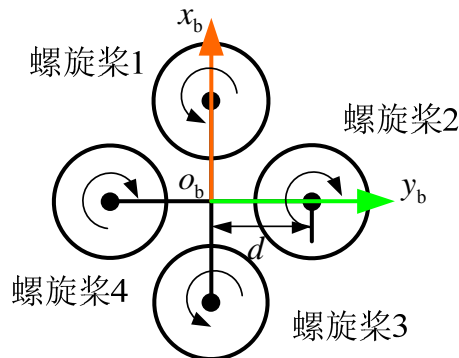
# 1. 多旋翼控制模型



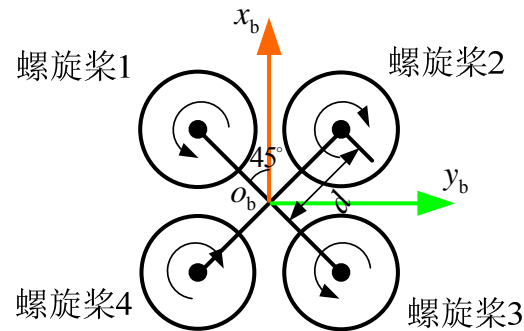


# 1. 多旋翼控制模型

## □ 控制效率模型



(a) +字型



(b) X字型

图6.2 四旋翼螺旋桨旋转方向示意图

多旋翼悬停时单个螺旋桨拉力可表示为

$$T_i = c_T \omega_i^2$$

其中  $c_T = \frac{1}{4\pi^2} \rho D_p^4 C_T \in \mathbb{R}^+$  为常数且可通过实验测得。

多旋翼悬停时单个螺旋桨在机身上产生的反扭矩可表示为

$$M_i = c_M \omega_i^2$$

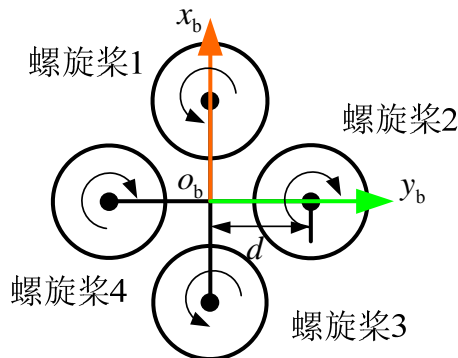
其中  $c_M = \frac{1}{4\pi^2} \rho D_p^5 C_M \in \mathbb{R}^+$  为常数且可通过实验测得。



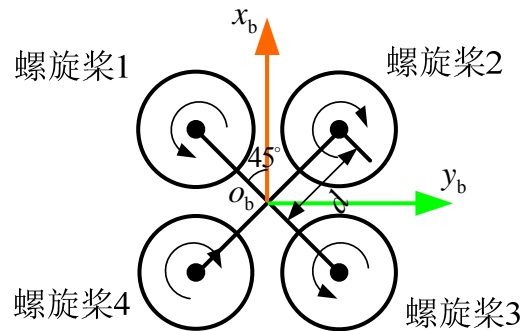
# 1. 多旋翼控制模型

## 控制效率模型

### (1) 标准四旋翼



(a) +字型



(b) X字型

图6.2 四旋翼螺旋桨旋转方向示意图

作用在机体上的总拉力为

$$f = \sum_{i=1}^4 T_i = c_T (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2)$$

对于+字型四旋翼，螺旋桨产生力矩为

$$\tau_x = dc_T (-\omega_2^2 + \omega_4^2)$$

$$\tau_y = dc_T (\omega_1^2 - \omega_3^2)$$

$$\tau_z = c_M (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2)$$

其中  $c_T = \frac{1}{4\pi^2} \rho D_p^4 C_T, c_M = \frac{1}{4\pi^2} \rho D_p^5 C_M$  (见第四讲)

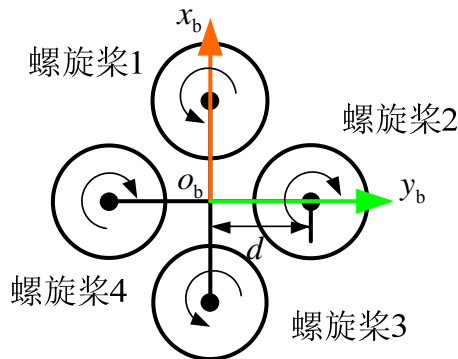
$$\begin{bmatrix} f \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_T & c_T & c_T & c_T \\ 0 & -dc_T & 0 & dc_T \\ dc_T & 0 & -dc_T & 0 \\ c_M & -c_M & c_M & -c_M \end{bmatrix}}_{M_4} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix}$$



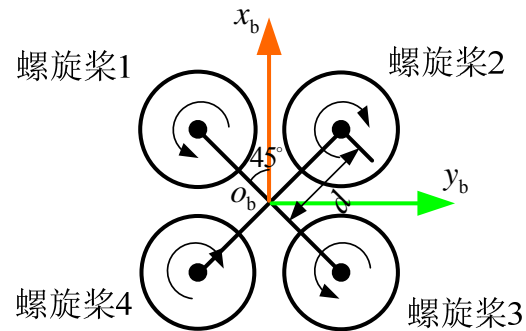
# 1. 多旋翼控制模型

## 控制效率模型

### (1) 标准四旋翼



(a) +字型



(b) X字型

图6.2 四旋翼螺旋桨旋转方向示意图

作用在机体上的总拉力为

$$f = \sum_{i=1}^4 T_i = c_T (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2)$$

对于X字型四旋翼，螺旋桨产生力矩为

$$\tau_x = dc_T \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_1^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_2^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_3^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_4^2 \right)$$

$$\tau_y = dc_T \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_1^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_2^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_3^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_4^2 \right)$$

$$\tau_z = c_M (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2)$$

$$\begin{bmatrix} f \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_T & c_T & c_T & c_T \\ \frac{\sqrt{2}}{2} dc_T & -\frac{\sqrt{2}}{2} dc_T & -\frac{\sqrt{2}}{2} dc_T & \frac{\sqrt{2}}{2} dc_T \\ \frac{\sqrt{2}}{2} dc_T & \frac{\sqrt{2}}{2} dc_T & -\frac{\sqrt{2}}{2} dc_T & -\frac{\sqrt{2}}{2} dc_T \\ c_M & -c_M & c_M & -c_M \end{bmatrix}}_{M_4} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix}$$



# 1. 多旋翼控制模型

## □ 控制效率模型

### (2) 多旋翼

模型

$$\begin{bmatrix} f \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_T & c_T & \cdots & c_T \\ -d_1 c_T \sin \varphi_1 & -d_2 c_T \sin \varphi_2 & \cdots & -d_{n_r} c_T \sin \varphi_{n_r} \\ d_1 c_T \cos \varphi_1 & d_2 c_T \cos \varphi_2 & \cdots & d_{n_r} c_T \cos \varphi_{n_r} \\ c_M \delta_1 & c_M \delta_2 & \cdots & c_M \delta_{n_r} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_{n_r}} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \vdots \\ \omega_{n_r}^2 \end{bmatrix}$$

其中  $\mathbf{M}_{n_r} \in \mathbb{R}^{4 \times n_r}$ ,  $\delta_i = (-1)^{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n_r$

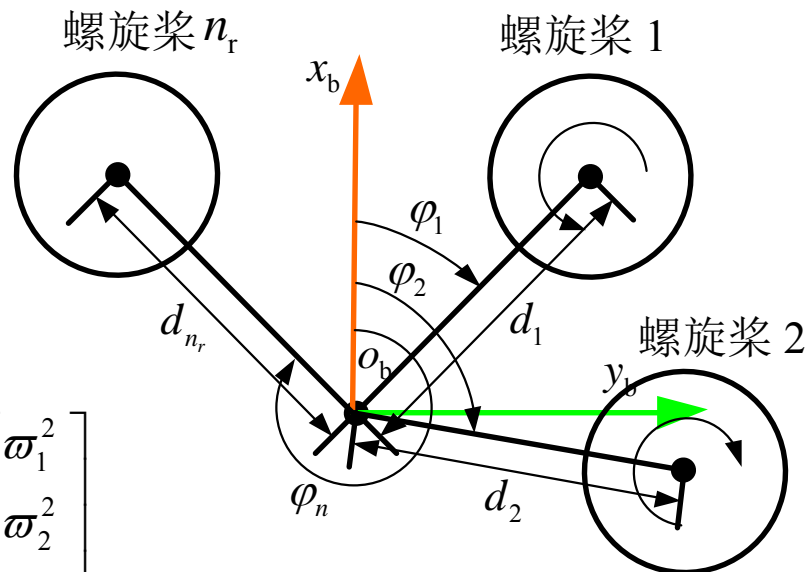


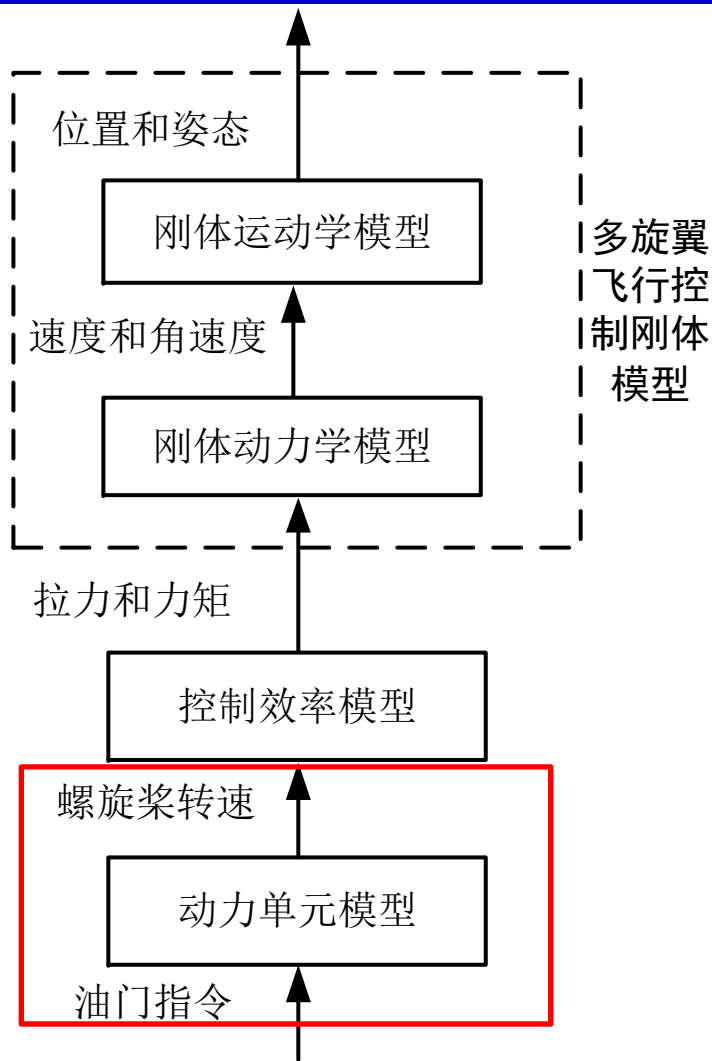
图 6.3 多旋翼系统几何定义

假设5. 奇数标号的螺旋桨逆时针转动，偶数标号的螺旋桨顺时针转动。





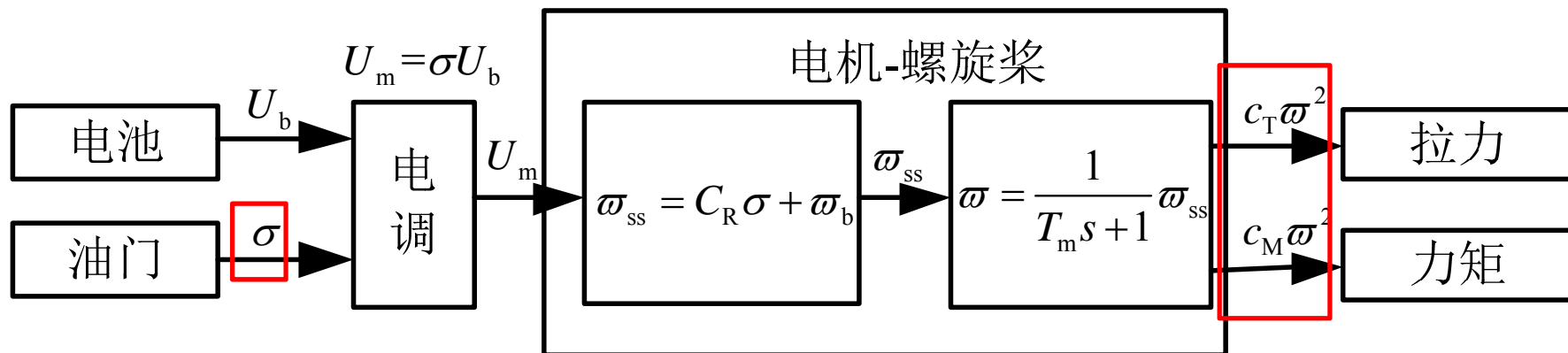
# 1. 多旋翼控制模型





# 1. 多旋翼控制模型

## □ 动力单元模型



模型

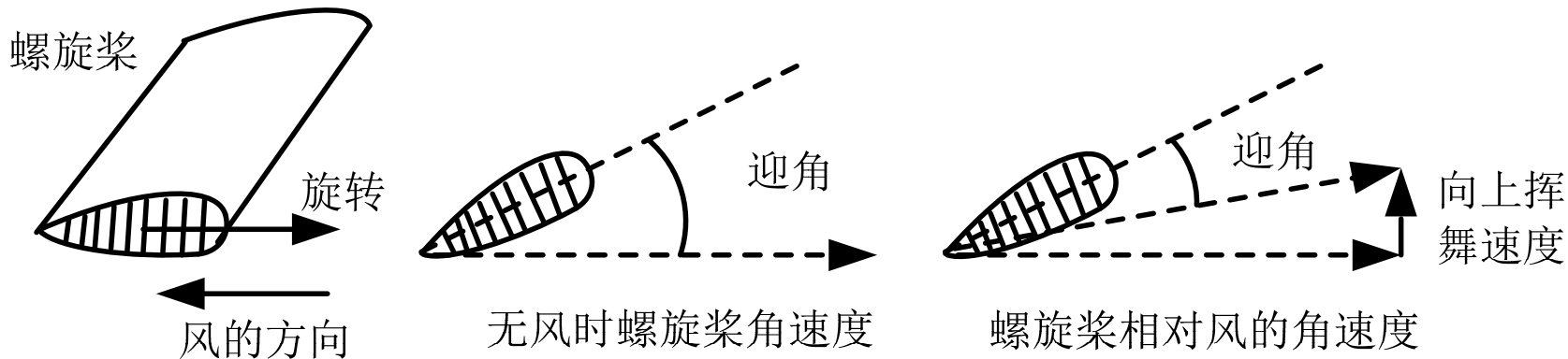
$$\omega = \frac{1}{T_m s + 1} (C_R \sigma + \omega_b)$$

其中电机油门  $\sigma$  为输入，电机转速  $\omega$  为输出， $T_m$  为电机的动态响应时间常数。



## 2. 多旋翼气动阻力模型

### □ 桨叶挥舞



(a) 螺旋桨剖面图 (b) 无风时螺旋桨角速度与迎角 (c) 螺旋桨相对风的角速度与迎角

图 6.5 螺旋桨速度与攻角变化关系

桨叶挥舞是桨叶的上下运动。如上图 (a) 所示，前行桨叶逆风前进，因此获得更大的相对速度。这时作用在螺旋桨的拉力增大，产生向上挥舞速度。如上图 (c)，螺旋桨的向上挥舞速度会减小迎角，进而减小拉力。



## 2. 多旋翼气动阻力模型

### □ 桨叶挥舞

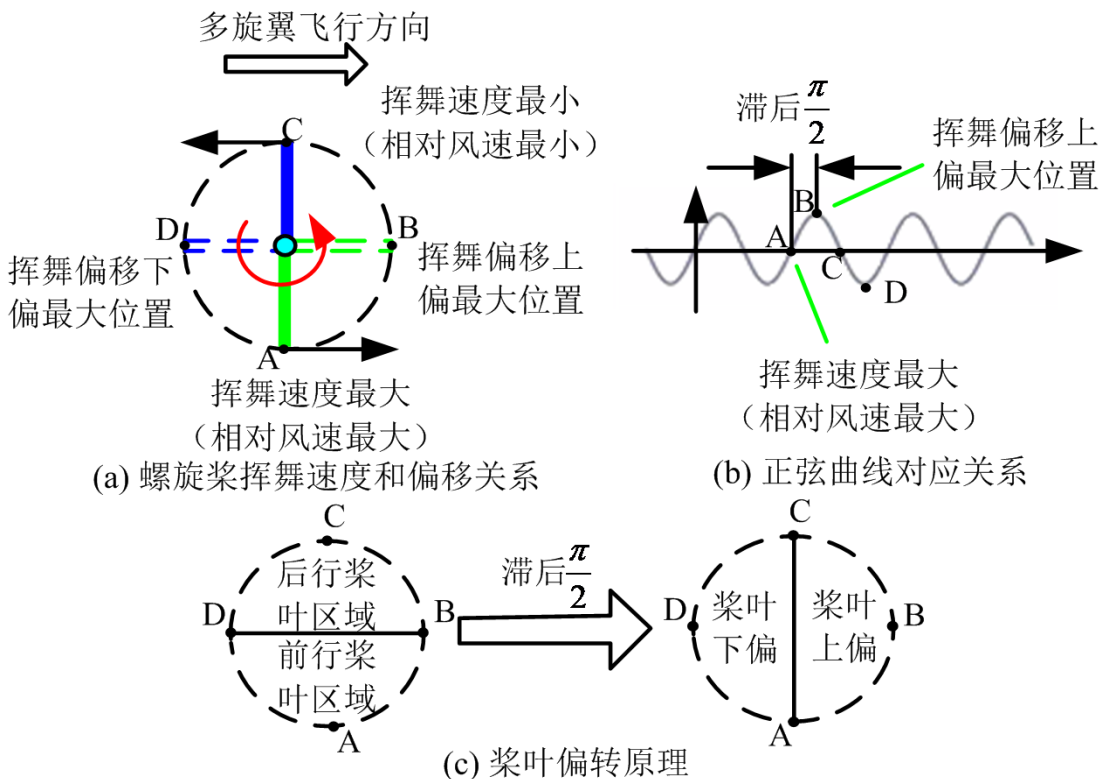


图 6.6 螺旋桨挥舞速度与偏移位置示意图

如左图 (a) 所示，多旋翼向右飞行，螺旋桨逆时针旋转。在 **A点** 处产生最大的相对速度。然而，螺旋桨最大的上偏位置出现在 **B点**，其中 A 点比 B 点滞后  $\pi/2$ 。这个道理如同正弦曲线运动规律一般 (如图 (b))。因此，如图 (c) 所示，螺旋桨桨盘下方是 **前行螺旋桨 (Advancing blade)** 区，上方是 **后行螺旋桨 (Retreating blade)** 区。因为位置滞后速度  $\pi/2$ ，因此，前面半区是桨叶上偏区，而后面半区是桨叶下偏区。





## 2. 多旋翼气动阻力模型

### □ 多旋翼气动阻力模型

回顾p. 12 “机体系下的位置动力学模型”

$${}^b \dot{\mathbf{v}} = -\left[ {}^b \boldsymbol{\omega} \right]_{\times} {}^b \mathbf{v} + g \mathbf{R}^T \mathbf{e}_3 - \frac{f}{m} \mathbf{e}_3$$

多旋翼在机体轴  $x_b, y_b$  上的速度为

$$\dot{v}_{x_b} = v_{y_b} \omega_{z_b} - v_{z_b} \omega_{y_b} - g \sin \theta$$

$$\dot{v}_{y_b} = v_{z_b} \omega_{x_b} - v_{x_b} \omega_{z_b} + g \cos \theta \sin \phi$$

阻力表示如下

$$f_{x_b} = -k_{\text{drag}} v_{x_b}$$

$$f_{y_b} = -k_{\text{drag}} v_{y_b}$$

其中  $f_{x_b}, f_{y_b} \in \mathbb{R}$  分别表示在机体轴  $x_b, y_b$  上的阻力，而  $k_{\text{drag}} \in \mathbb{R}_+$  表示阻力系数。





## 2. 多旋翼气动阻力模型

### □ 多旋翼气动阻力模型

多旋翼气动阻力模型如下

$$\begin{aligned}\dot{v}_{x_b} &= v_{y_b} \omega_{z_b} - v_{z_b} \omega_{y_b} - g \sin \theta - \frac{k_{\text{drag}}}{m} v_{x_b} \\ \dot{v}_{y_b} &= v_{z_b} \omega_{x_b} - v_{x_b} \omega_{z_b} + g \cos \theta \sin \phi - \frac{k_{\text{drag}}}{m} v_{y_b}\end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned}\dot{v}_{x_b} &= v_{y_b} \omega_{z_b} - v_{z_b} \omega_{y_b} - g \sin \theta - \frac{k_{\text{drag}}}{m} v_{x_b} \\ \dot{v}_{y_b} &= v_{z_b} \omega_{x_b} - v_{x_b} \omega_{z_b} + g \cos \theta \sin \phi - \frac{k_{\text{drag}}}{m} v_{y_b} \\ \dot{k}_{\text{drag}} &= 0\end{aligned}$$

$k_{\text{drag}}$  常数



### 3. 多旋翼模型参数测量

#### 重心位置

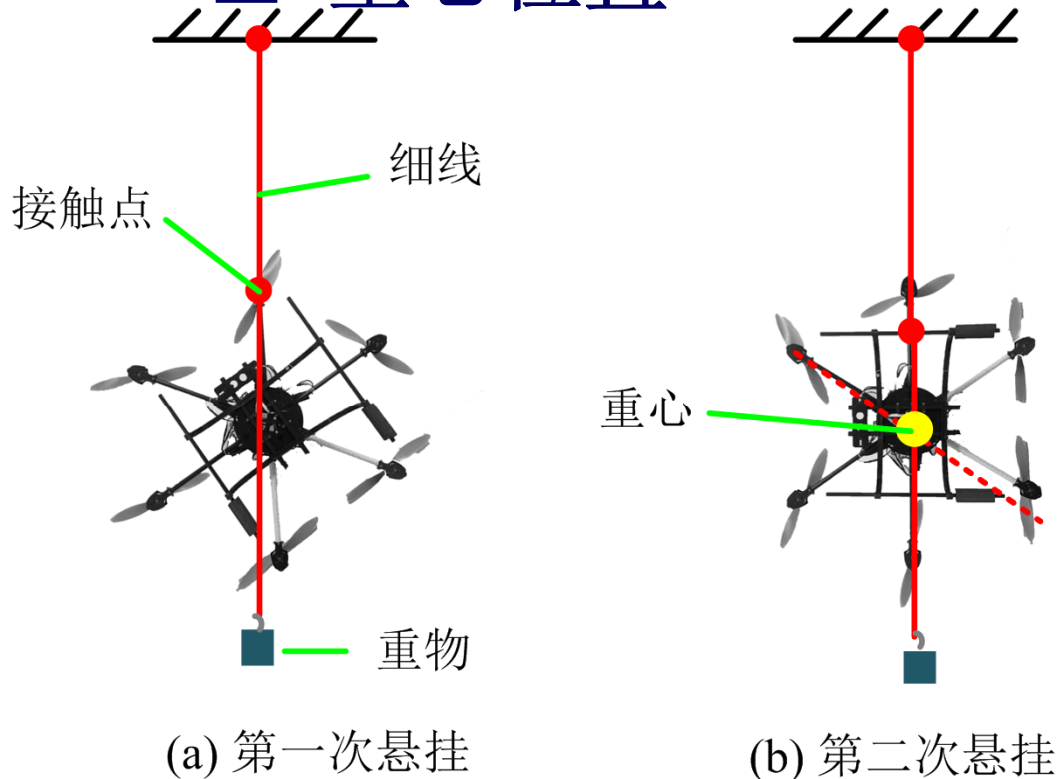


图 6.8 多旋翼质心的确定方式

步骤如下：

(1) 取一根细绳，末端绑上重物，将多旋翼某机臂的一头绑在细绳中间，然后提起细绳的另一头。记录悬线在多旋翼上的位置(图(a)中实线，(b)中虚线所示)。

(2) 同样的，将接触点放在另一个地方，提起多旋翼并记录悬线位置(图(b)中实线所示)。

(3) 如图(b)所示，取两次记录悬线的交点位置就是多旋翼重心所在位置。

(4) 通过多次同样的测量，可提高重心测量精度。



# 3. 多旋翼模型参数测量

## 转动惯量

### (1) 中心主转动惯量

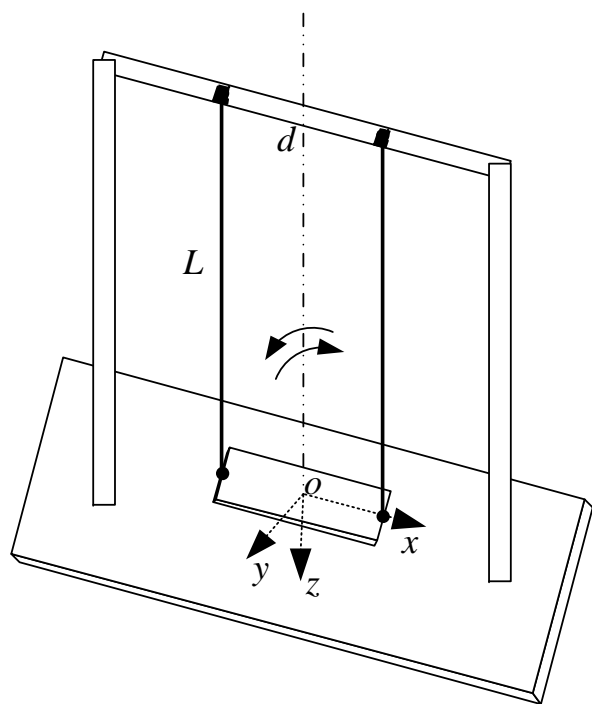


图 6.9 双线摆测量转动惯量示意图

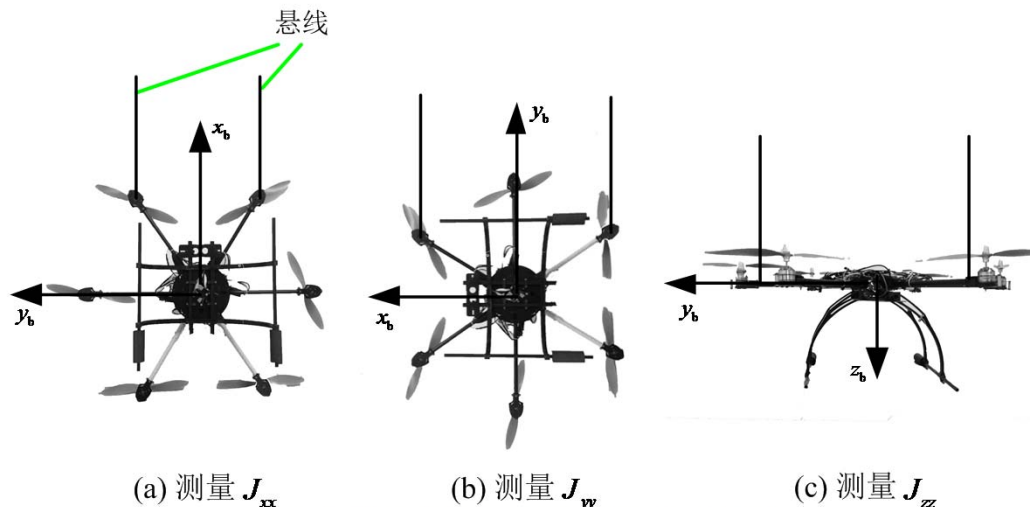


图 6.10 多旋翼主轴转动惯量测量

**原理：**以z轴为例，双线摆动的周期满足下列公式

$$T_0 = 4\pi \sqrt{\frac{J_{zz} L}{m_0 g d^2}}$$

从而有

$$J_{zz} = \frac{m_0 g d^2}{16\pi^2 L} T_0^2$$

问题：惯性积

$J_{xy}, J_{yz}, J_{xz}$

如何求？



### 3. 多旋翼模型参数测量

#### (2) 惯性积

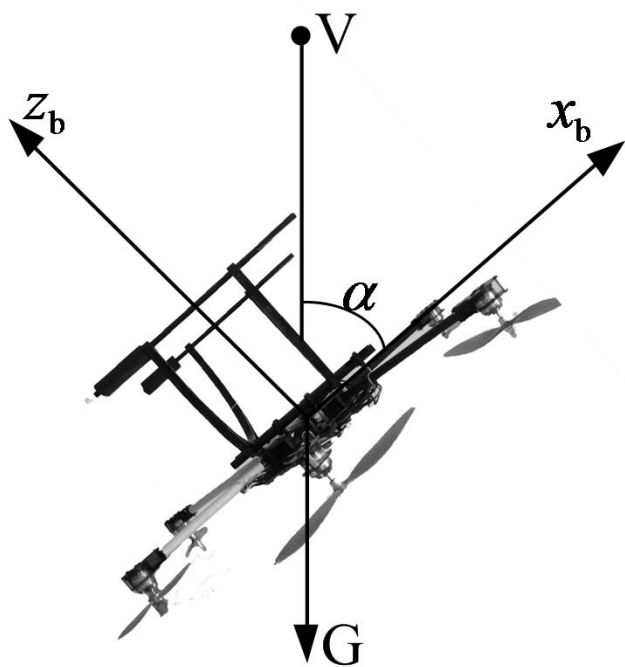


图 6.11 惯性积测量侧视图

$$J_{xz} = \frac{J_V - J_{xx} \cos^2 \alpha - J_{zz} \sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha}$$

其中  $J_V \in \mathbb{R}_+$  为多旋翼沿竖直旋转轴V的转动惯量。

步骤如下：

- (1) 测量得到主轴转动惯量  $J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}$ ；
- (2) 记录角度  $\alpha$ ，测量得到转动惯量  $J_V$ ；
- (3) 根据上式计算得到  $J_{xz}$ 。

步骤详情见“全权, 戴训华, 魏子博, 等. 一种测量小型飞行器转动惯量与惯性积的方法: CN, CN 103487211 A[P]. 2014.”



# 3. 多旋翼模型参数测量

## 动力单元模型参数测量

### (1) 基本原理

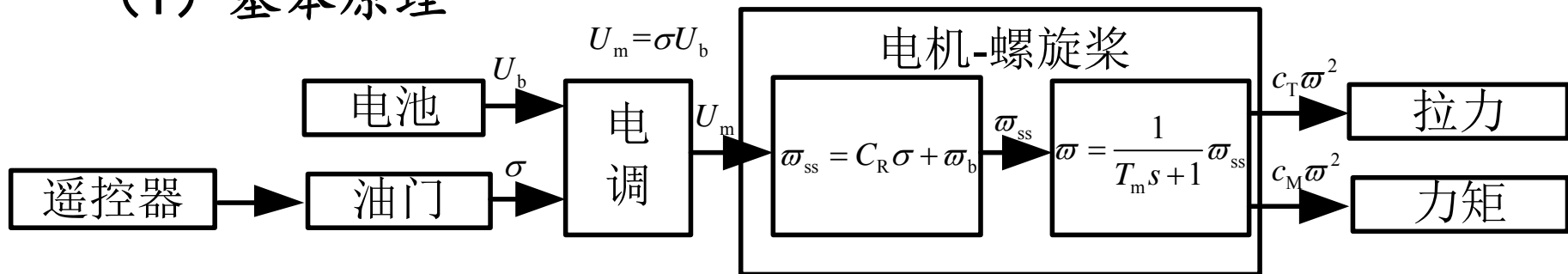


图 6.12 动力系统信号传递图

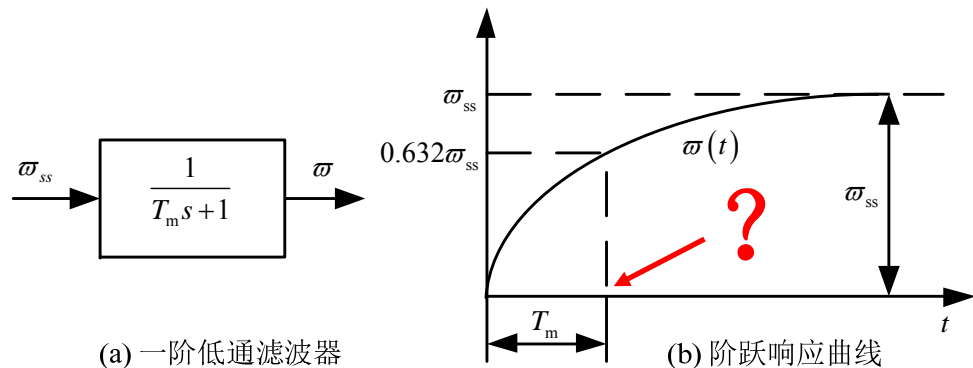


图 6.13 电机惯性环节方块图与阶跃响应曲线

$$\omega = \frac{1}{T_m s + 1} (C_R \sigma + \omega_b)$$

动态参数  $T_m$       静态参数  $C_R$  和  $\omega_b$

$$T = C_T \omega^2 \quad M = C_M \omega^2$$



### 3. 多旋翼模型参数测量

#### □ 动力单元模型参数测量

##### (2) 测量装置



图 6.14 网友DIY动力系统测量装置<sup>1</sup>



图 6.15 专业动力系统测量装置RCbenchmark-1580<sup>2</sup>

1. <http://bbs.5imx.com/forum.php?mod=viewthread&tid=871144>
2. <https://www.rcbenchmark.com/?from=singlemessage&isappinstalled=0>





### 3. 多旋翼模型参数测量

#### 动力单元模型参数测量

##### (2) 测量装置

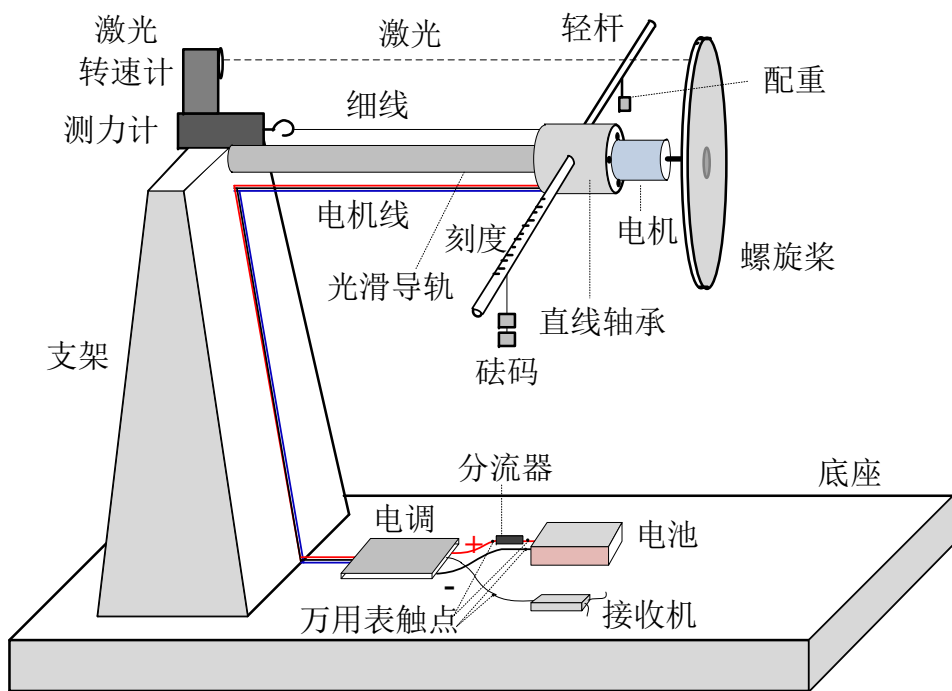


图 6.16 动力单元参数测量的装置示意图

如左图所示，桨的拉力通过测力计直接测量得到，转速通过非接触式的转速计直接测量得到，油门指令通过遥控器直接读取或通过万用表测量得到。力矩的具体测量步骤如下：

- (1) 在控制信号为0，螺旋桨静止时，调节配重与砝码的位置，使细杆保持水平平衡。记下此时砝码的初始位置  $p_1$ ；
- (2) 输入指定的油门指令使电机转动，转动平稳时电机的反扭矩会使细杆发生倾斜，细调砝码的位置使细杆再次水平，记下此时砝码的位置  $p_2$ ；
- (3) 假定砝码的质量为  $m_f$ ，那么动力单元产生的力矩可以用下面公式计算

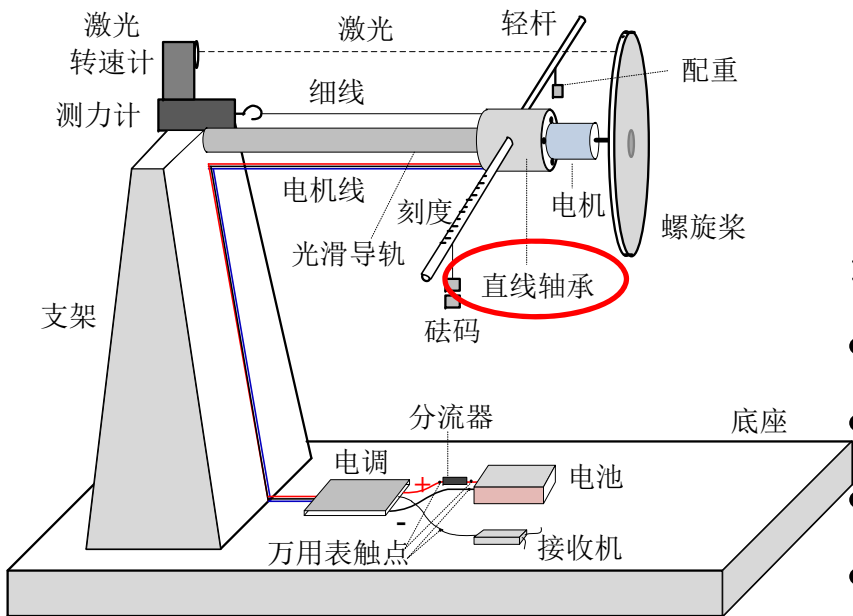
$$M = (p_2 - p_1) m_f g$$



# 3. 多旋翼模型参数测量

## 动力单元模型参数测量

### (2) 测量装置



之所以选用直线轴承，是因为它可以沿着导轨方向（测桨的拉力）和旋转方向（测转矩）光滑地移动与转动，同时产生的阻力与力矩非常小，可以忽略不计。实验证明该方案可以高精度地检测出微小力矩的变化。

测试所用的具体配件如下：

- 新西达2212电机，KV值为1000RPM/V
- 3S1P格氏电池
- 遥控器接收机系统为华科尔DEVO-10套件
- APC1047螺旋桨
- 好盈30A电调，已做好油门行程校准



# 3. 多旋翼模型参数测量

## 动力单元模型参数测量

### (3) 测量结果(稳态参数)

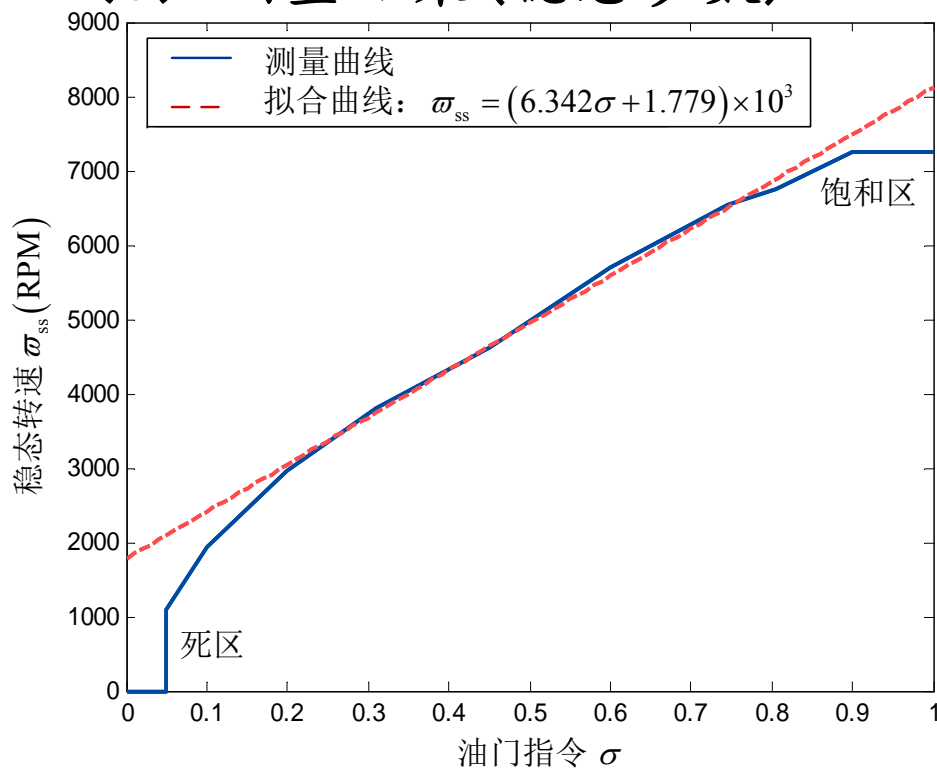


图 6.17 油门指令-稳态转速曲线

目标:

$$\omega = \frac{1}{T_m s + 1} (C_R \sigma + \omega_b)$$

静态参数

在多旋翼正常工作的区间

0.2 <  $\sigma$  < 0.8 内, 油门指令-稳态转速曲线呈近似线性, 对该曲线进行线性拟合可以得到:

$$\omega_{ss} = 6342\sigma + 1779$$



# 3. 多旋翼模型参数测量

## 动力单元模型参数测量

目标: 
$$\varpi = \frac{1}{T_m s + 1} (C_R \sigma + \varpi_b)$$

### (3) 测量结果

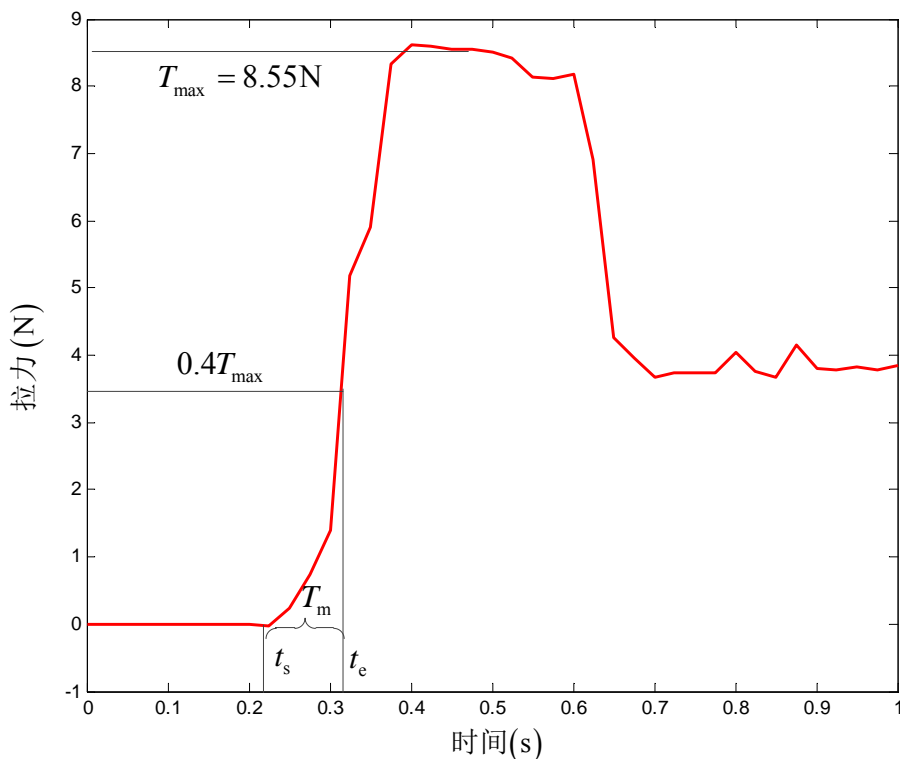


图 6.18 电机响应曲线

动态参数

将电调信号线接到遥控器的三段开关上（输出值在0，0.5，1之间跳变），然后快速改变开关位置，并用测力计记录拉力变化曲线。

将电机假设为一阶惯性环节，而一阶惯性环节的时间常数  $T_m$  决定了电机的阶跃响应，其值为电机转速从0增加到0.632倍稳态转速值所消耗的时间，即为拉力从0增加到  $0.632^2 \approx 0.4$  倍稳态拉力值所消耗的时间。

$$T_m = \Delta t = t_e - t_s = 0.098s$$



# 3. 多旋翼模型参数测量

## 动力单元模型参数测量

目标:

$$T = c_T \omega_{ss}^2 \quad M = c_M \omega_{ss}^2$$

静态参数

### (3) 测量结果

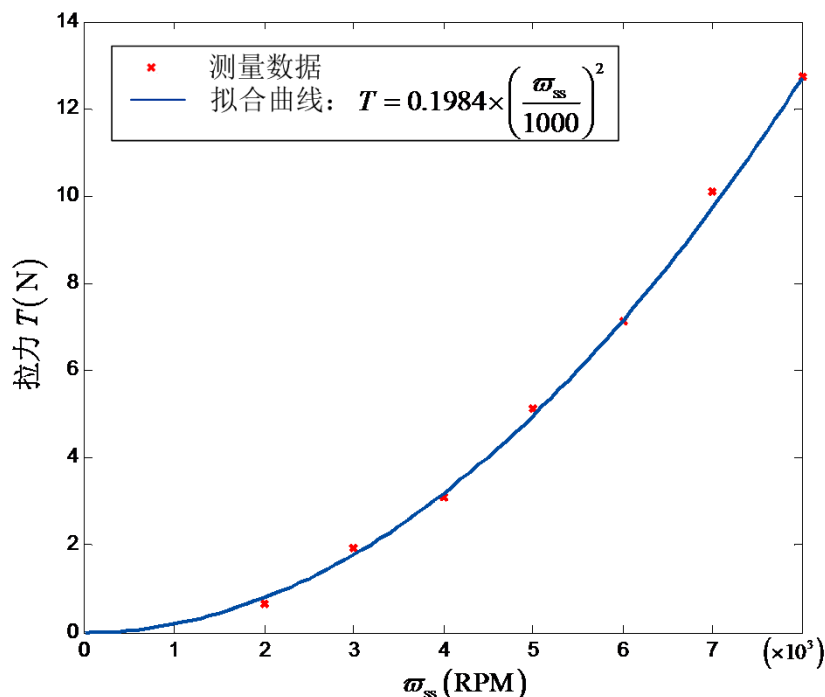


图 6.19 转速-拉力实验数据与拟合效果

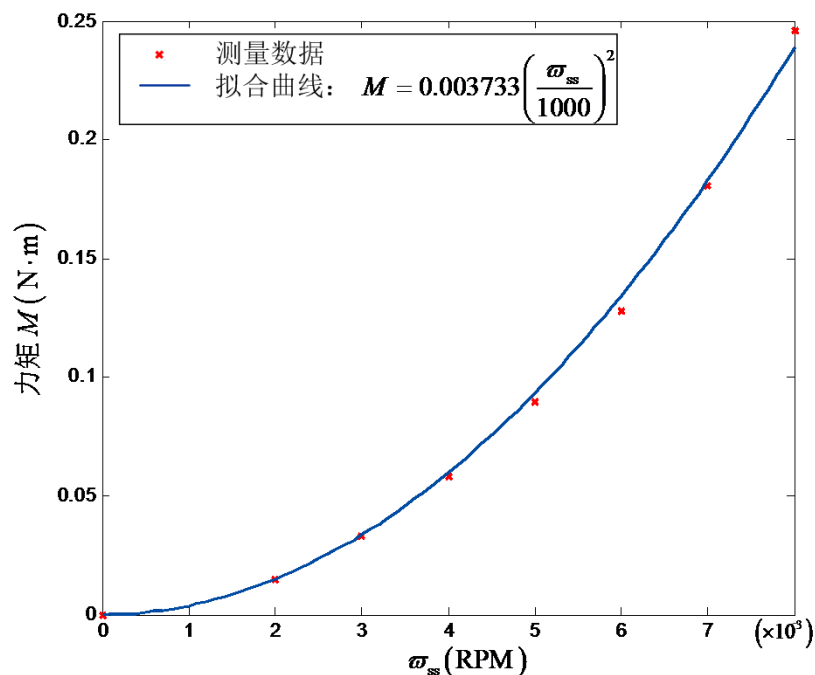


图 6.20 转速-转矩实验数据与拟合

$$T = 0.1984 \left(\frac{\omega_{ss}}{1000}\right)^2 \quad c_T = 1.984 \times 10^{-7} \text{ N/RPM}^2 \quad M = 0.003733 \left(\frac{\omega_{ss}}{1000}\right)^2 \quad c_M = 3.733 \times 10^{-9} \text{ N} \cdot \text{m/RPM}^2$$



## 4. 本讲小结

---

- 详细推导了多旋翼飞行控制刚体模型、控制效率模型以及动力单元模型。这三者合起来便是多旋翼控制模型。
- 解释了桨叶挥舞，建立了多旋翼气动阻力模型。
- 介绍了如何获取模型参数。
- 对于非常高精度的控制来说，需要更高精度的模型，比如风干扰或者地效作用下的动力学模型等。





# 资源

---

(1) 可靠飞行控制研究组主页课程中心(全部课件下载)

<http://rfly.buaa.edu.cn/course>

(2) 关注可靠飞行控制研究组公众号 buaarfly(文章、资讯等)

(3) 多旋翼设计与控制交流QQ群:183613048

(4) 视频课程(MOOC)同步发布, 网易云课堂搜索 “多旋翼”

<http://study.163.com/course/introduction/1003715005.htm>

(5) 同名中文书本教材《多旋翼飞行器设计与控制》即将在电子工业出版社出版, 敬请期待

(6) 有疑问可联系课程总助教戴训华, 邮箱: [dai@buaa.edu.cn](mailto:dai@buaa.edu.cn)



# 致谢

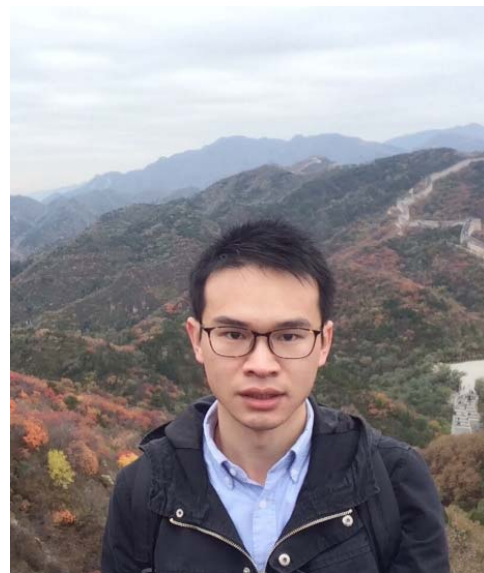
## 感谢控制组同学



蔡阳光



任锦瑞



戴训华

为本节课程准备作出的贡献。



---

# 谢谢!



---

# 多旋翼飞行器设计与控制

## 第七讲 传感器标定和测量模型

全权 副教授

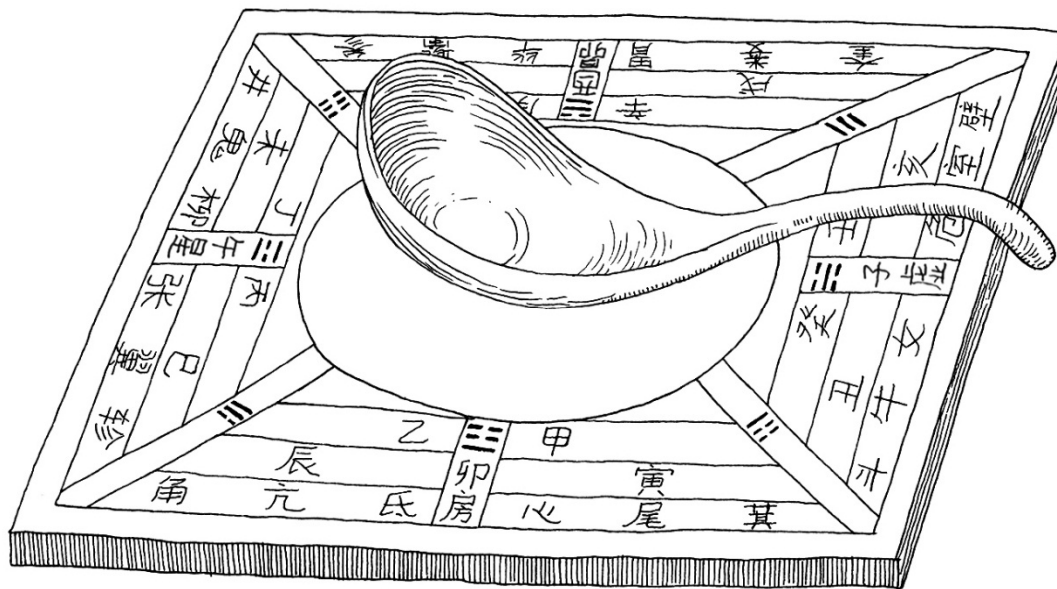
qq\_buaa@buaa.edu.cn

自动化科学与电气工程学院

北京航空航天大学



# 前言



## 司南



# 前言

---

如何进行传感器标定以及传感器以及传  
感器测量模型是什么？





# 大纲

---

1. 三轴加速度计
2. 三轴陀螺仪
3. 三轴磁力计
4. 超声波测距仪
5. 气压计
6. 二维激光测距雷达
7. 全球定位系统（GPS模块）
8. 摄像机
9. 本讲小结



# 1. 三轴加速度计

## □ 基本原理

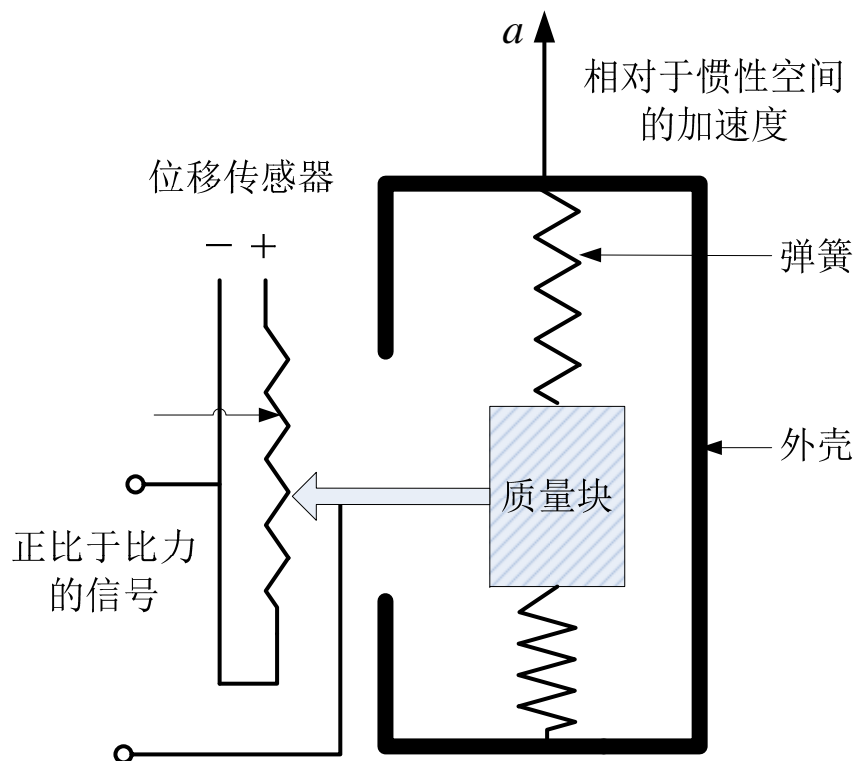


图7.1、测量比力的加速度计

三轴加速度计是一种惯性传感器，能够测量物体的比力，即去掉重力后的整体加速度或者单位质量上作用的非引力。当加速度计保持静止时，加速度计能够感知重力加速度，而整体加速度为零。在自由落体运动中，整体加速度就是重力加速度，但加速度计内部处于失重状态，而此时三轴加速度计输出为零。



# 1. 三轴加速度计

## □ 基本原理

三轴加速度计的原理能够用来测量角度。直观地，如图所示，弹簧压缩量由加速度计与地面的角度决定。比力能够通过弹簧压缩长度来测量。因此在没有外力作用的情况下，加速度计能够精确地测量俯仰角和滚转角，且没有累积误差。

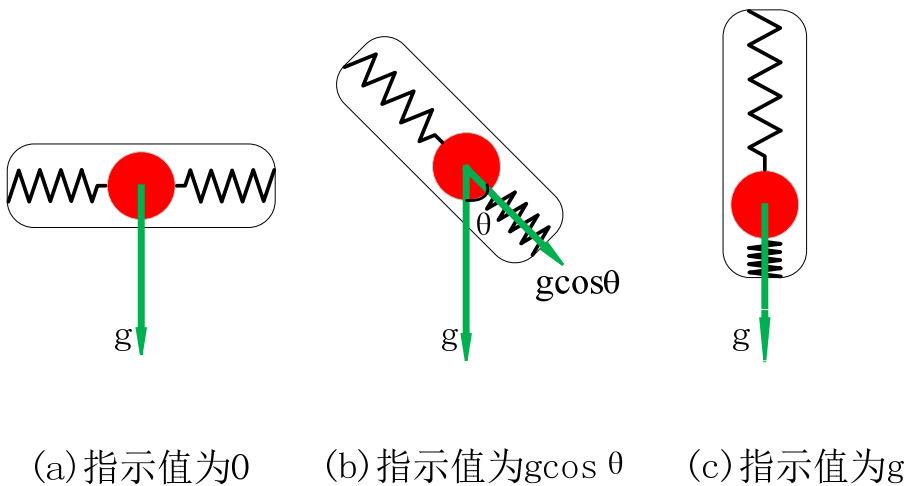
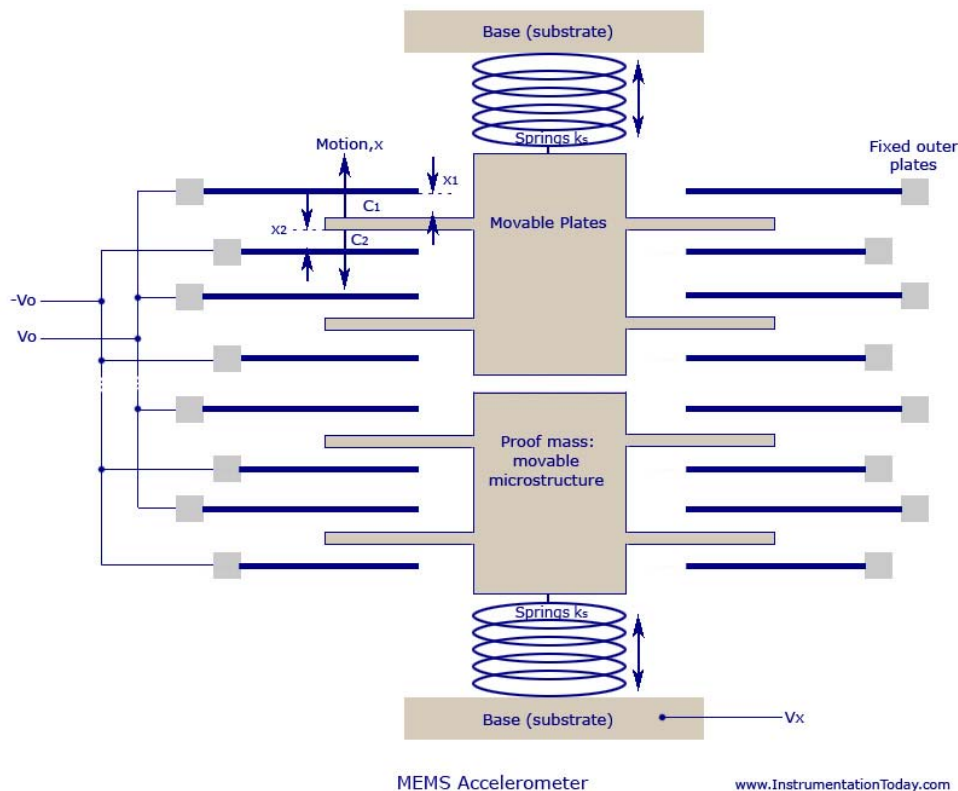
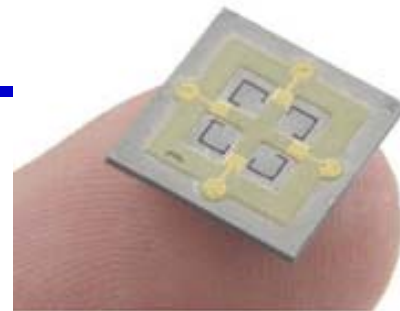


图7.2 加速度计测量原理



# 1. 三轴加速度计

## □ 基本原理



**MEMS三轴加速度计**是采用压阻式、压电式和电容式工作原理，产生的比力（**压力或者位移**）分别正比于**电阻、电压和电容的变化**。这些变化可以通过相应的放大和滤波电路进行采集。该传感器的缺点是受振动影响较大。

图7.3 MEMS加速度计测量原理



# 1. 三轴加速度计

## □ 校正

### (1) 校正

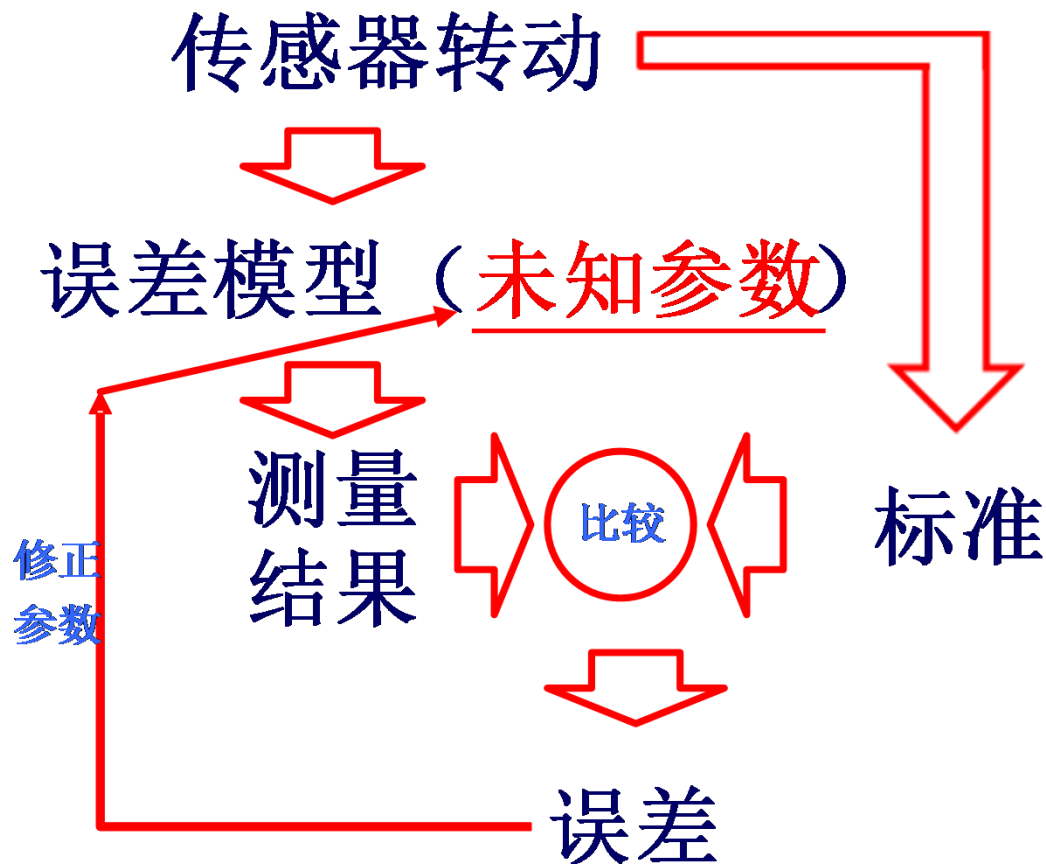


图7.4 加速度计校正原理

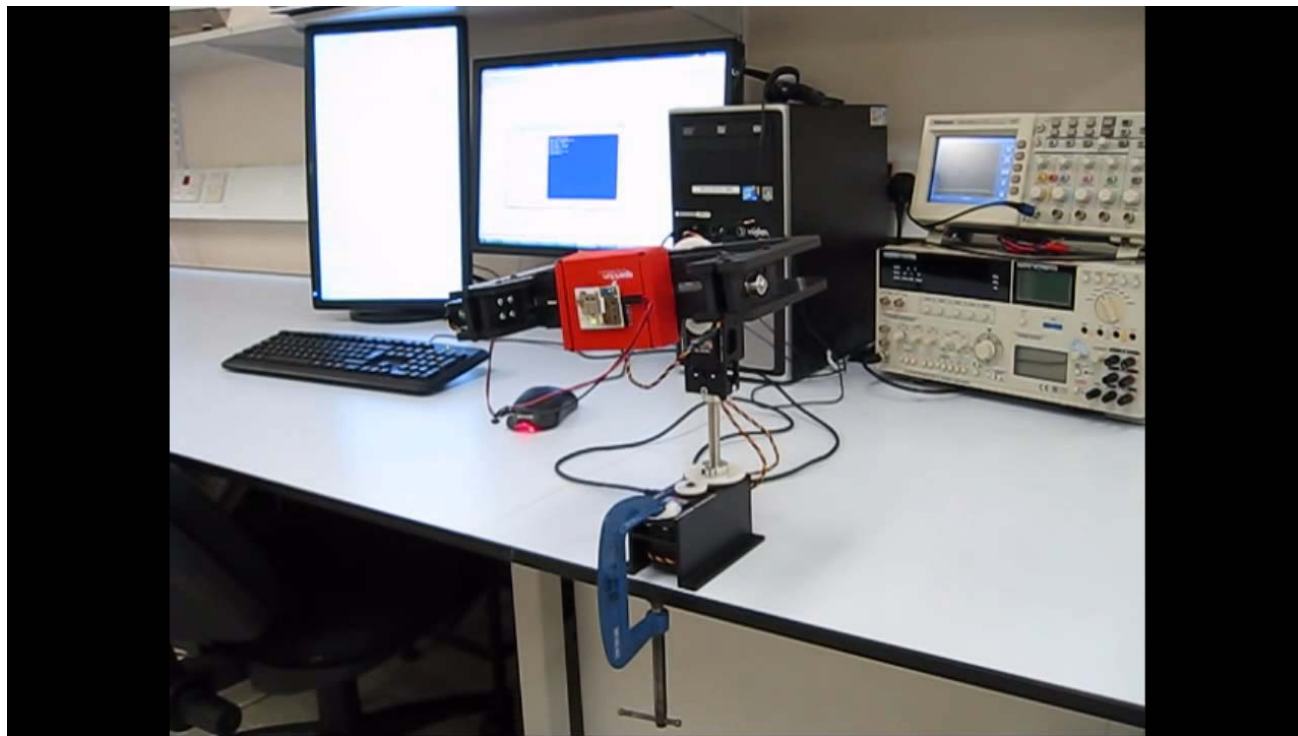


# 1. 三轴加速度计

## □ 校正

### (2) 自动校正

- 一般校正：需要外部标定设备，麻烦但精确
- 自动校正：不需要外部标定设备，简单，精度略微差



视频1 Accelerometer, magnetometer & gyroscope calibration  
<https://youtu.be/XqQCbkncVYI>





# 1. 三轴加速度计

## □ 自动校正

### (1) 误差模型

三轴加速度计在实际生产过程中和安装过程中，总会出现一些偏差。因此，需要建立标定前和标定后的三轴加速度的关系。误差模型如下

$${}^b \mathbf{a}_m = \mathbf{T}_a \mathbf{K}_a ({}^b \mathbf{a}'_m + \mathbf{b}'_a)$$

标定后三轴加速度值

$$\mathbf{T}_a = \begin{bmatrix} 1 & \Delta\psi_a & -\Delta\theta_a \\ -\Delta\psi_a & 1 & \Delta\phi_a \\ \Delta\theta_a & -\Delta\phi_a & 1 \end{bmatrix}$$

微小旋转

$$\mathbf{K}_a = \begin{bmatrix} s_{ax} & 0 & 0 \\ 0 & s_{ay} & 0 \\ 0 & 0 & s_{az} \end{bmatrix}$$

尺度因子

标定前三轴加速度值

$$\mathbf{b}'_a = \begin{bmatrix} b'_{ax} \\ b'_{ay} \\ b'_{az} \end{bmatrix}$$

偏移



# 1. 三轴加速度计

## □ 自动校正

### (2) 校正方法

为了校正加速度计的测量值，我们需要估计下列未知参数

$$\Theta_a = [\Delta\psi_a \quad \Delta\theta_a \quad \Delta\phi_a \quad s_{ax} \quad s_{ay} \quad s_{az} \quad b'_{ax} \quad b'_{ay} \quad b'_{az}]^T$$

定义了下面的函数

$${}^b \mathbf{a}_m = \mathbf{h}_a(\Theta_a, {}^b \mathbf{a}'_m) = \mathbf{T}_a \mathbf{K}_a ({}^b \mathbf{a}'_m + \mathbf{b}'_a)$$

原理：“无论加速度计放置的角度如何变化，其比力的模长始终是常值，即当地重力加速度”

根据这个原理，我们有

$$\Theta_a^* = \arg \min_{\Theta_a} \sum_{k=1}^M \left( \left\| \mathbf{h}_a(\Theta_a, {}^b \mathbf{a}'_{m,k}) \right\| - g \right)^2$$

$\arg \min \{ \}$  表示使目标函数取最小值时的变量值



# 1. 三轴加速度计

## □ 自动校正

### (3) 校正实验

数据来源：PIXHAWK飞控板的IMU,通过串口解析Mavlink协议采集数据

校正结果：

$$\mathbf{T}_a = \begin{bmatrix} 1 & 0.0093 & -0.0136 \\ -0.0093 & 1 & 0.0265 \\ 0.0136 & -0.0265 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_a = \begin{bmatrix} 1.0203 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0201 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0201 \end{bmatrix}, \mathbf{b}'_a = 10^{-5} \begin{bmatrix} -2.755 \\ 1.565 \\ -9.942 \end{bmatrix}$$

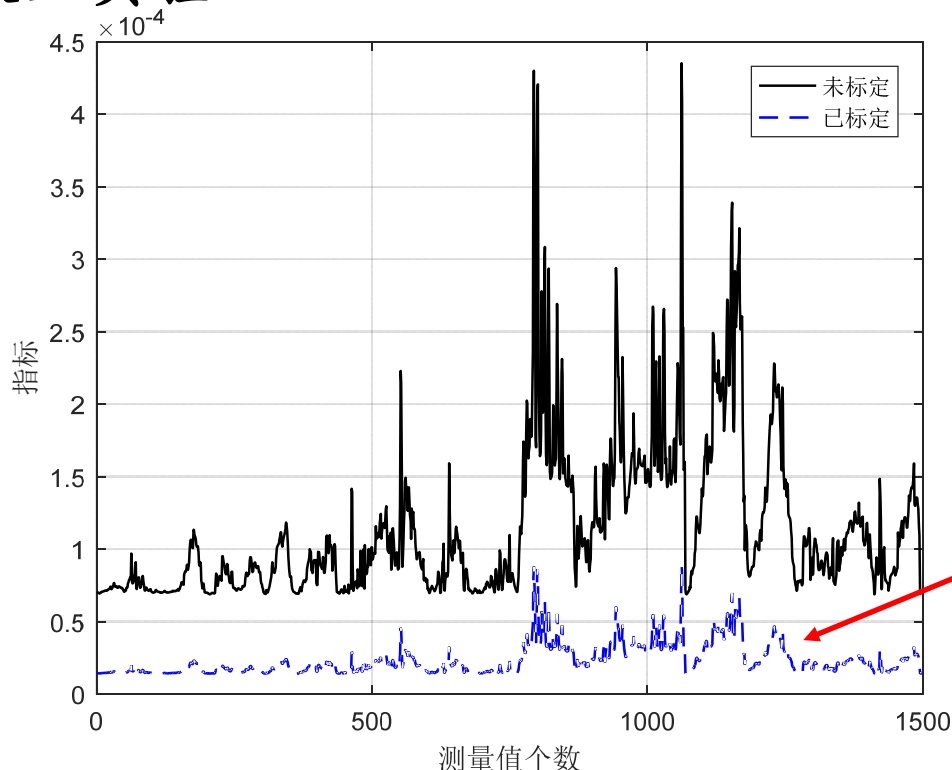


# 1. 三轴加速度计

## □ 自动校正

$$\text{Dist} = \left( \left\| \mathbf{h}_a \left( \Theta_a, {}^b \mathbf{a}'_{m,k} \right) \right\| - g \right)^2$$

### (3) 校正实验



校正后误差  
变小，达到目的

图7.5 加速度校正误差



# 1. 三轴加速度计

## □ 测量模型

加速度计固联在机体轴上，测量的是三个机体轴方向上的比力，因此记为  ${}^b \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^3$ 。它可以表示为

$${}^b \mathbf{a}_m = {}^b \mathbf{a} + \mathbf{b}_a + \mathbf{n}_a$$

↑                    ↑                    ↑                    ↑  
校正后            真实的            漂移            高斯  
测量的            加速度                                    白噪声  
比力

漂移量  $\mathbf{b}_a$  又可建模为如下的高斯随机游走过程

$$\dot{\mathbf{b}}_a = \mathbf{n}_{b_a}$$

其中  $\mathbf{n}_{b_a} \in \mathbb{R}^3$  表示为高斯白噪声。

由于大多数MEMS传感器均是以半导体材料作为基础加工的，而半导体对温度很敏感，再加上其他的一些安装，电路设计等影响因素，**零点漂移和温度漂移是不可避免。**



## 2. 三轴陀螺仪

### □ 基本原理

科里奥利力：

当一个质点相对于惯性系做直线运动时，因为质点自身惯性，它相对于旋转体系，其轨迹是一条曲线。立足于旋转体系，我们认为有一个力驱使质点运动轨迹形成曲线。科氏力就是对这种偏移的一种描述，表示为

$$\mathbf{F}_{\text{coriolis}} = -2m^b \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

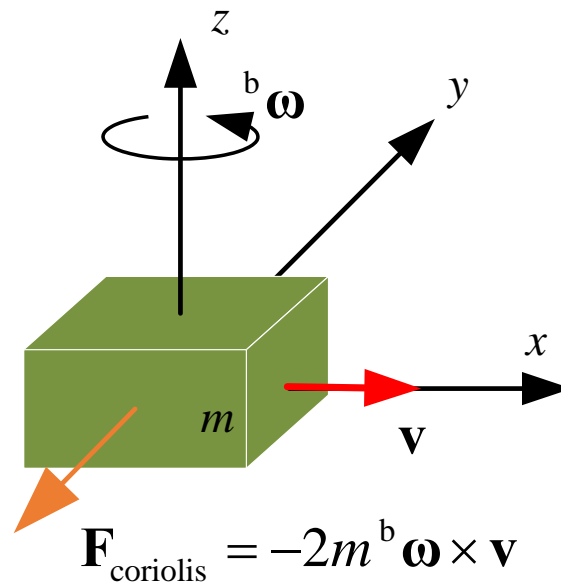
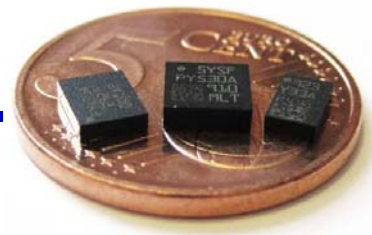


图7.6 科里奥利力示意图

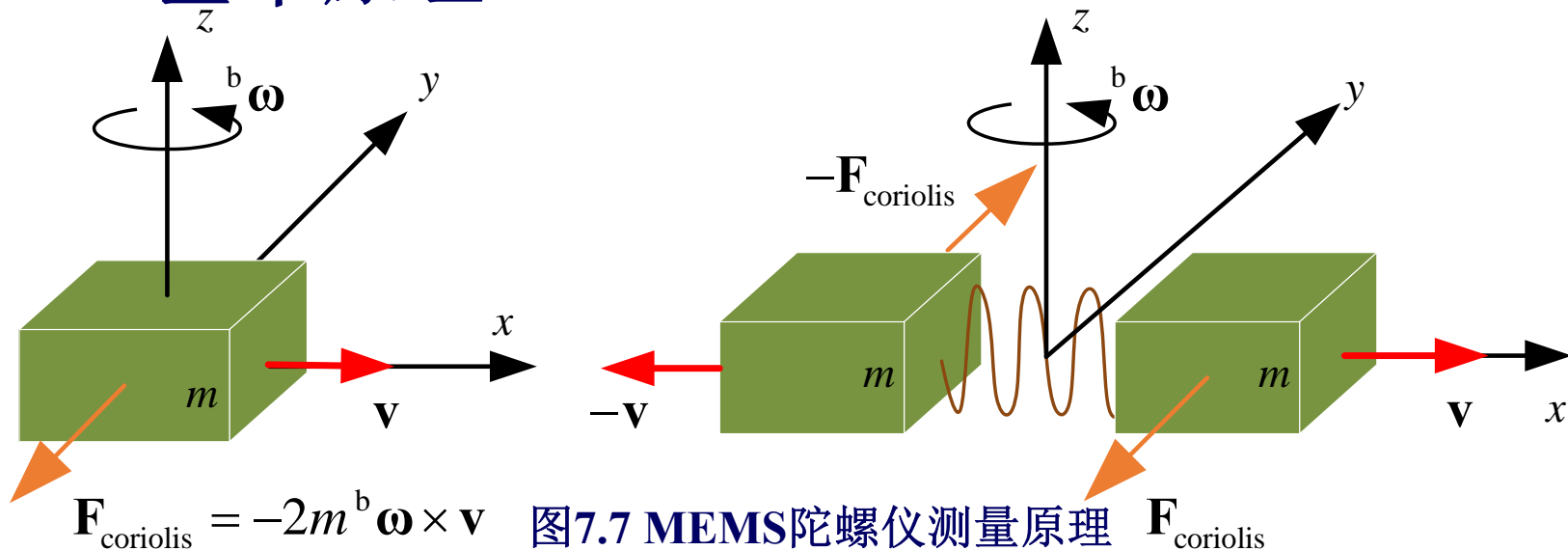




## 2. 三轴陀螺仪



### □ 基本原理



- 在陀螺仪中，两个质量块运动速度方向相反，而大小相同。它们产生的科氏力相反，从而压迫两块对应的电容板移动，产生电容差分变化。**电容的变化正比于旋转角速度**。这就是基本原理。
- 纯加速度并不能使陀螺仪产生读数。这是因为纯加速度变化只能导致两个质量块朝相同方向移动，不会带来电容的差分变化。



## 2. 三轴陀螺仪

### □ 自动校正

#### (1) 误差模型

三轴陀螺仪在实际生产过程中和安装过程中，总会出现一些偏差。因此，需要建立标定前和标定后的三轴角速度的关系。误差模型如下

$${}^b \boldsymbol{\omega}_m = \mathbf{T}_g \mathbf{K}_g ({}^b \boldsymbol{\omega}'_m + \mathbf{b}'_g)$$

标定后三轴角速度

$$\mathbf{T}_g = \begin{bmatrix} 1 & \Delta\psi_g & -\Delta\theta_g \\ -\Delta\psi_g & 1 & \Delta\phi_g \\ \Delta\theta_g & -\Delta\phi_g & 1 \end{bmatrix}$$

微小旋转

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} s_{gx} & 0 & 0 \\ 0 & s_{gy} & 0 \\ 0 & 0 & s_{gz} \end{bmatrix}$$

尺度因子

标定前三轴角速度

$$\mathbf{b}'_g = \begin{bmatrix} b'_{gx} \\ b'_{gy} \\ b'_{gz} \end{bmatrix}$$

偏移



## 2. 三轴陀螺仪

### □ 自动校正

#### (2) 校正方法

原理：“角速度积分得到的角度与标定过的加速度计估计得到的角度进行比较，来标定未知参数”

为了校正陀螺仪测量量，我们定义了一个操作 $\Psi$ ，如下

$$\mathbf{q}'_{a,k+1} = \Psi \left( \Theta_g, \omega'_{m,k:k+1}, \mathbf{q}_{a,k} \right)$$

递推后得到的四元数

陀螺仪未知参数

陀螺仪读数序列

校正加速度计求得的四元数，偏航角假设为0

第五讲“四元数变化率与机体角速度的关系”+龙格库塔法

其中

$$\Theta_g = \left[ \Delta\psi_g \quad \Delta\theta_g \quad \Delta\phi_g \quad s_{gx} \quad s_{gy} \quad s_{gz} \quad b'_{gx} \quad b'_{gy} \quad b'_{gz} \right]^T$$



## 2. 三轴陀螺仪

### □ 自动校正

这个实现可以利用四元数变化率与机体角速度的关系模型

$$\dot{\mathbf{q}}_e^b(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -{}^b\boldsymbol{\omega}^T \\ {}^b\boldsymbol{\omega} & -[{}^b\boldsymbol{\omega}]_{\times} \end{bmatrix} \mathbf{q}_e^b(t)$$

并用龙格库塔法积分实现，得到递推后得到的加速度

$$\mathbf{q}'_{a,k} \xrightarrow{\text{递推后得到的加速度}} \mathbf{a}'_{k+1} = \begin{bmatrix} a'_{x_b,k+1} \\ a'_{y_b,k+1} \\ a'_{z_b,k+1} \end{bmatrix} = g \begin{bmatrix} -\sin \theta' \\ \cos \theta' \sin \phi' \\ \cos \theta' \cos \phi' \end{bmatrix}$$



## 2. 三轴陀螺仪

### □ 自动校正

#### (2) 校正方法

原理：我们希望通过积分得到的角度与加速度测量的角度尽量相同

$$\mathbf{a}'_k = \mathbf{h}_g \left( \Theta_g, {}^b\omega'_{m,k-1:k}, {}^b\mathbf{a}_{m,k-1} \right)$$

其中函数 $\mathbf{h}_g$ 的作用是根据上一次的比力和角速度信息来估计当前比力。其标定原理进一步表示为：期望估计值 $\mathbf{a}'_k$ 尽可能地与标定后的加速度计测量值 ${}^b\mathbf{a}_{m,k}$ 接近。根据这个原理，给出以下优化问题

$$\Theta_g^* = \arg \min_{\Theta_g} \sum_{k=1}^M \left( \mathbf{h}_g \left( \Theta_g, {}^b\omega'_{m,k-1:k}, {}^b\mathbf{a}_{m,k-1} \right) - {}^b\mathbf{a}_{m,k} \right)^2$$

递推后得到  
的加速度函数



## 2. 三轴陀螺仪

### □ 自动校正

#### (3) 校正实验

数据来源：PIXHAWK飞控板的IMU, 通过串口解析Mavlink协议采集数据, 还有经过校正的加速度数据

校正结果:

$$\mathbf{T}_g = \begin{bmatrix} 1 & 0.1001 & -0.1090 \\ -0.1001 & 1 & 0.1002 \\ 0.1090 & -0.1002 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}'_g = \begin{bmatrix} 0.2001 \\ 0.2002 \\ 0.2004 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$



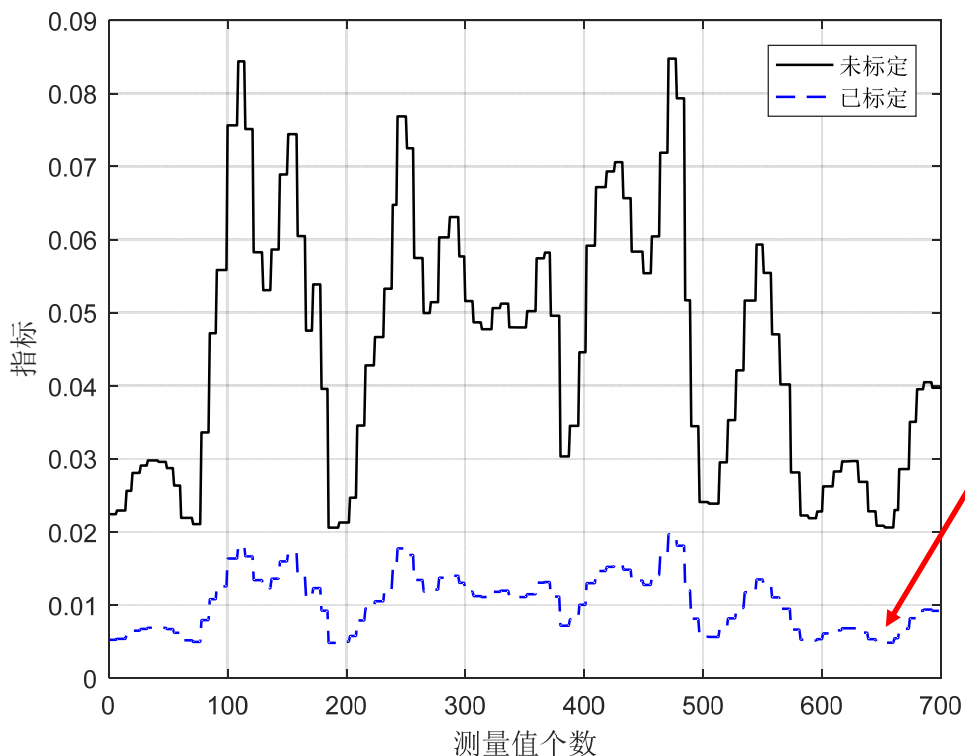


## 2. 三轴陀螺仪

### □ 自动校正

$$\text{Dist}_g \triangleq \left( \mathbf{h}_g \left( \Theta_g, {}^b \omega'_{m,k-1:k}, {}^b \mathbf{a}_{m,k-1} \right) - {}^b \mathbf{a}_{m,k} \right)^2$$

### (3) 校正实验



校正后误差  
变小，达到目的

图7.8 陀螺仪校正误差



## 2. 三轴陀螺仪

### □ 测量模型

陀螺仪也是固联在机体轴上，测量的是三个机体轴方向上的角速度，因此记为 ${}^b\boldsymbol{\omega}_m \in \mathbb{R}^3$ 。它可以表示为

$${}^b\boldsymbol{\omega}_m = {}^b\boldsymbol{\omega} + \mathbf{b}_g + \mathbf{n}_g$$

↑            ↑            ↑            ↑  
校正后    真实的    漂移    白噪声  
测量的    角速度  
角速度

进一步，漂移量又可建模为如下的高斯随机游走过程

$$\dot{\mathbf{b}}_g = \mathbf{n}_{b_g}$$

其中 $\mathbf{n}_g \in \mathbb{R}^3$ 表示为高斯白噪声。



## 3. 三轴磁力计

### □ 基本原理

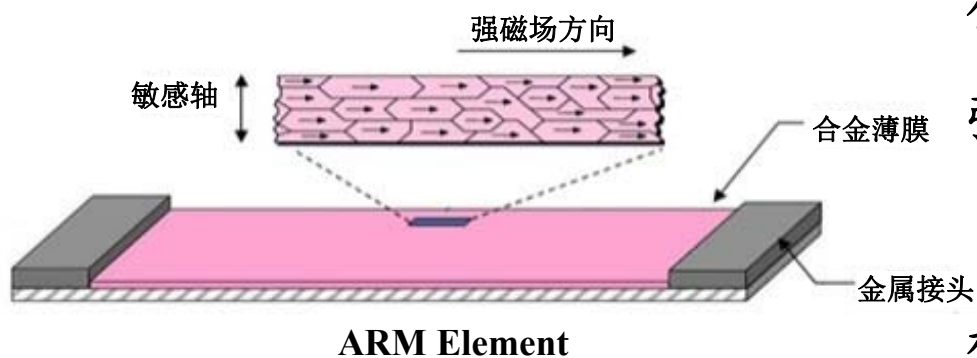


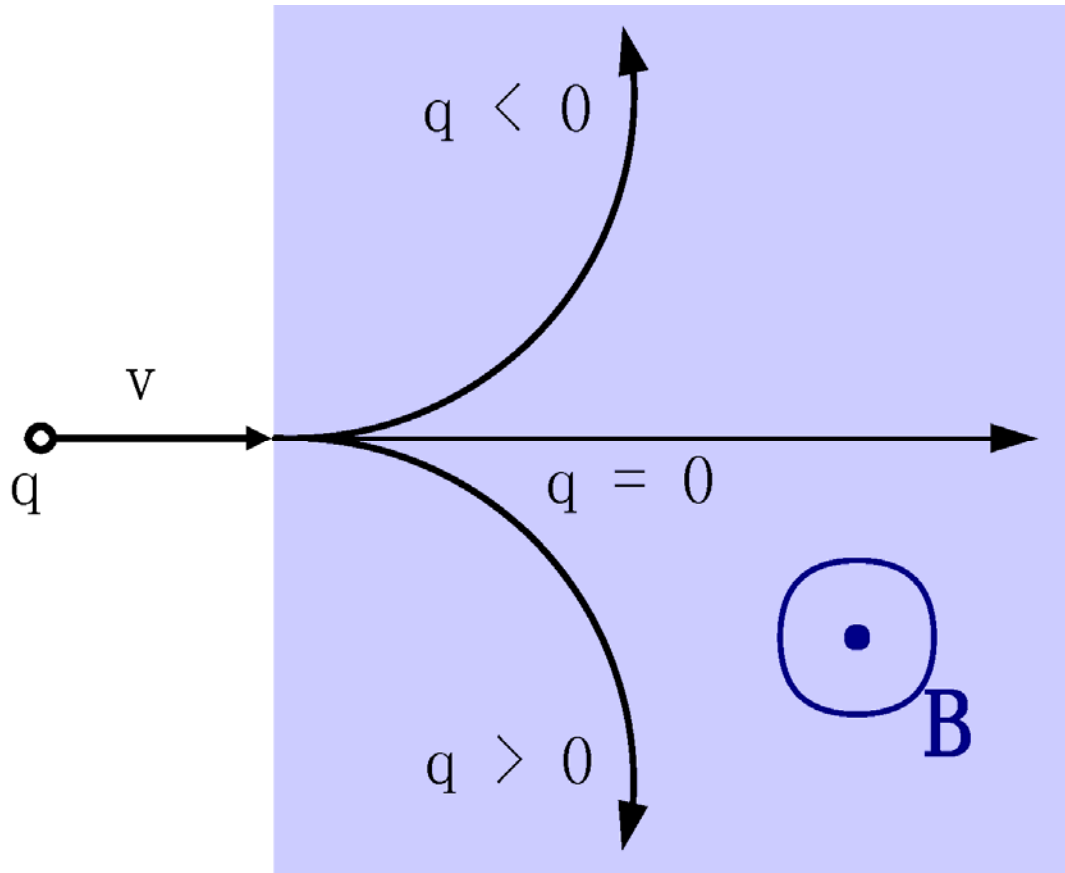
图7.9 磁阻传感器电阻值

该磁力仪是采用三个互相垂直的磁阻传感器，每个轴向上的传感器检测在该方向上的地磁场强度。

一种方式是采用具有晶体结构的合金材料。它们对外界的磁场很敏感，磁场的强弱变化会导致磁阻传感器电阻值发生变化。



### 3. 三轴磁力计



- 另外三轴磁力计还可以采用洛伦兹力原理，电流流过磁场产生力，从而驱动电容等变化。

图7.10 洛伦兹力原理

磁场方向**B**表示由屏幕内指向外，**q**表示带电粒子



# 3. 三轴磁力计

## □ 自动校正

### (1) 误差模型

三轴磁力计在实际生产过程中和安装过程中，总会出现一些偏差，不仅如此周边的原件（飞控芯片，供电电路，电机）也会对其产生影响。误差模型如下

$${}^b \mathbf{m}_m = \mathbf{T}_m \mathbf{K}_m ({}^b \mathbf{m}'_m + \mathbf{b}'_m)$$

标定后  
三轴磁感  
应强度值

$$\mathbf{T}_m = \begin{bmatrix} 1 & \Delta\psi_m & -\Delta\theta_m \\ -\Delta\psi_m & 1 & \Delta\phi_m \\ \Delta\theta_m & -\Delta\phi_m & 1 \end{bmatrix}$$

微小旋转

$$\mathbf{K}_m = \begin{bmatrix} s_{mx} & 0 & 0 \\ 0 & s_{my} & 0 \\ 0 & 0 & s_{mz} \end{bmatrix}$$

尺度因子

标定前  
三轴磁感  
应强度值

$$\mathbf{b}'_m = \begin{bmatrix} b'_{mx} \\ b'_{my} \\ b'_{mz} \end{bmatrix}$$

偏移



# 3. 三轴磁力计

## □ 自动校正

### (2) 校正方法

原理: 在一个地点, 无论磁力计位置如何放置, 它的真实的磁场的感应场的大小是常量, 即  $\|{}^b \mathbf{m}_{m,k}\|^2 = 1, k = 1, 2, \dots, M$ 。

为了校正三维磁力计模型, 我们需要估计下列未知参数

$$\Theta_m \triangleq \left[ \Delta\psi_m \quad \Delta\theta_m \quad \Delta\phi_m \quad s_{mx} \quad s_{my} \quad s_{mz} \quad b'_{mx} \quad b'_{my} \quad b'_{mz} \right]^T$$

我们定义了下面的函数:

$$\mathbf{h}_m \left( \Theta_m, {}^b \mathbf{m}'_m \right) \triangleq \mathbf{T}_m \mathbf{K}_m \left( {}^b \mathbf{m}'_m + \mathbf{b}'_m \right)$$

根据这个原理, 我们有

$$\Theta_m^* = \arg \min_{\Theta_m} \sum_{k=1}^M \left( \left\| \mathbf{h}_m \left( \Theta_m, {}^b \mathbf{m}'_{m,k} \right) \right\| - 1 \right)^2$$





## 3. 三轴磁力计

### □ 自动校正

#### (3) 校正实验

校正结果:

数据来源:

PIXHAWK飞控板的

IMU,通过串口解析

Mavlink协议采集数据

$$\mathbf{T}_m = \begin{bmatrix} 1 & -0.0026 & 0.0516 \\ 0.0026 & 1 & -0.0156 \\ -0.0516 & 0.0156 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_m = \begin{bmatrix} 0.9999 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9999 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}'_m = \begin{bmatrix} -0.3223 \\ -0.1280 \\ 0.1589 \end{bmatrix} \times 10^{-5}$$

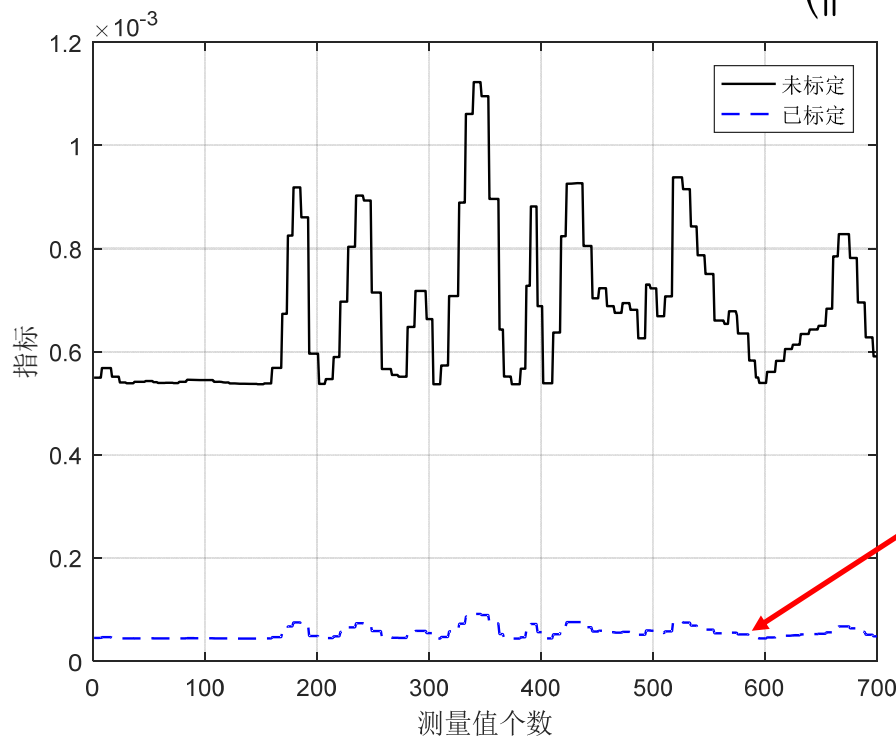


# 3. 三轴磁力计

## □ 自动校正

### (3) 校正实验

$$\text{Dist}_m \triangleq \left( \left\| \mathbf{h}_m \left( \Theta_m, {}^b \mathbf{m}'_{m,k} \right) \right\| - 1 \right)^2$$



校正后误差  
变小，达到目的

图7.11 磁力计校正误差



## 3. 三轴磁力计

### □ 测量模型

三维磁力计固联在机体轴上，测量的是机体坐标系的三个方向上的磁场矢量，记为 ${}^b\mathbf{m}_m \in \mathbb{R}^3$ 。它们可以表示为

$${}^b\mathbf{m}_m = \mathbf{R}_e^b \cdot {}^e\mathbf{m} + \mathbf{b}_m + \mathbf{n}_m$$

↑            ↑            ↑            ↑            ↓  
校正后测量   旋转   真实的   漂移   白噪声  
的磁场矢量   矩阵   磁场矢量

进一步，漂移量 $\mathbf{b}_m \in \mathbb{R}^3$ 又可建模为如下的高斯随机游走过程

$$\dot{\mathbf{b}}_m = \mathbf{n}_{b_m}$$

其中 $\mathbf{n}_{b_m} \in \mathbb{R}^3$ 表示为高斯白噪声。



## 4. 超声波测距仪

### □ 基本原理

超声波是指振动频率大于20kHz的声波，其每秒的振动次数很高，超出了人耳听觉的上限，被称为超声波。它方向性好，穿透能力强，广泛应用于测距和测速等方面。因此，要计算超声波发生器与被测物体的距离  $d$ ，只要计算出从发出超声波信号到接收到返回信号的时间  $\Delta t$ ，声速为  $v$ ，则  $d = v\Delta t/2$ ，可以得出超声波发生器与被测物体的距离。





## 4. 超声波测距仪

### □ 基本原理

超声波测距仪也存在一些不足。首先，它的测量范围小。其次，如图所示，柔软的物体或者与传感器处于特定角度的物体可能反射的声波较少，甚至没有反射波。

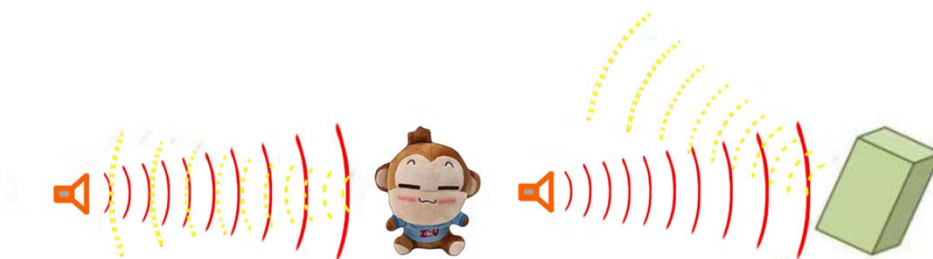


图7.13 超声波测距失效情形



## 4. 超声波测距仪

### □ 校正

这些量是位置控制需要的观测值，它们微小偏差不会对飞行器造成很大的性能下降。因此，这些传感器所产生的偏差可以通过多旋翼飞行在线进行校正。

### □ 测量模型

超声波传感器一般用于测相对高度，位于多旋翼正下方。如果传感器测得距离为  $d_{\text{SONAR}} \in \mathbb{R}_+$ ，那么飞行器离地高为

$$d_{\text{SONAR}} = -\frac{1}{\cos\theta \cos\phi} p_{z_e} + n_{d_{\text{SONAR}}}$$

其中： $\theta, \phi \in \mathbb{R}$  表示俯仰角和滚转角， $n_{d_{\text{SONAR}}} \in \mathbb{R}$  表示高斯白噪声。如果采用的超声波传感器也含有漂移，也可以将模型如前面传感器模型一样进行扩展。





# 5. 气压计

## □ 基本原理

多旋翼多采用压电式气压计，气压计也是一种压力传感器，新一代的气压计既可以测量气压和高度，又可以测量温度。大气压随高度的增加而减小，气压计正是通过测量大气压来估计高度。因为大气压分布不是均匀的而且气压计对气流的影响很敏感（**有风情况测量不准**），因此气压计只能得到飞行高度的近似值。

## □ 校正

这些量是位置控制需要的观测值，它们微小偏差不会对飞行器造成很大的性能下降。因此，这些传感器所产生的偏差可以通过多旋翼飞行在线进行校正。



# 5. 气压计

## □ 测量模型

气压计用于测绝对高度，进一步得到相对高度

$$d_{\text{BARO}} = -p_{z_e} + b_{d_{\text{BARO}}} + n_{d_{\text{BARO}}}$$

↑            ↑            ↑            ↑

测量的      真实          漂移      白噪声  
高度          高度

进一步，漂移量  $b_{d_{\text{BARO}}} \in \mathbb{R}$  又可建模为如下的高斯随机游走过程

$$\dot{b}_{d_{\text{BARO}}} = n_{b_{d_{\text{BARO}}}}$$

其中  $n_{b_{d_{\text{BARO}}}} \in \mathbb{R}$  表示为高斯白噪声。



## 6. 二维激光测距仪

### □ 基本原理

二维激光测距仪是利用时间飞行原理来测量距离的一种仪器，激光扫描测量系统基于激光测距原理。通过旋转的光学部件发射形成二维的扫描面，以实现区域扫描及轮廓测量功能。二维激光测距仪可以实现360度一定范围内的激光测距扫描，产生所在空间的平面点云地图信息用于地图测绘、机器人定位导航、物体/环境建模等应用。

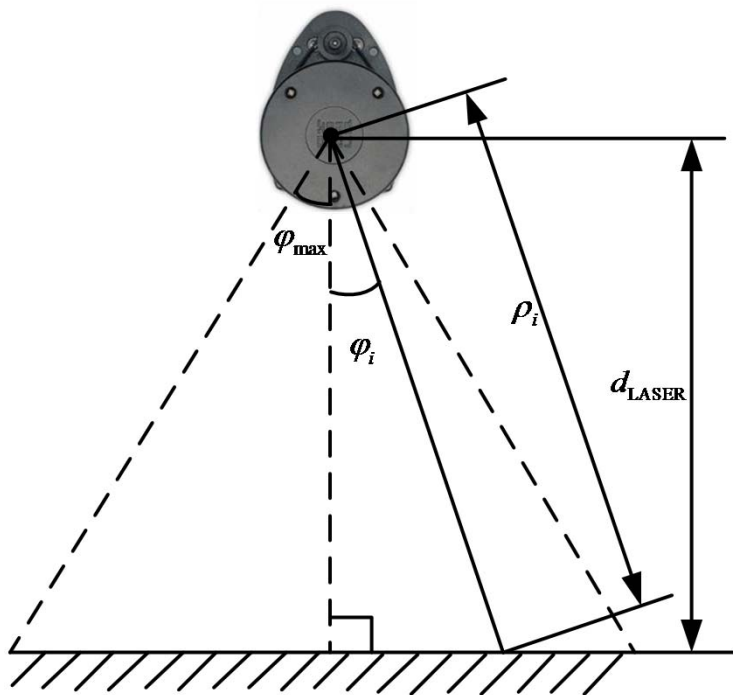
### □ 校正

因为激光扫描测距仪一般用于测高或者避障，它们微小偏差不会对飞行器造成很大的性能下降。因此，一般可以认为出产的传感器已经足够精确。



## 6. 二维激光测距仪

### □ 测量模型



激光扫描测距雷达到平面的高度模型如下

$$d_{\text{laser}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \rho_i \cos \varphi_i = \frac{-1}{\cos \theta \cos \phi} p_{z_e} + n_{d_{\text{laser}}}$$

其中： $\rho_i \in \mathbb{R}$  和  $\varphi_i \in [-\varphi_{\max}, \varphi_{\max}]$  为测距仪测得的距离值和当前扫描时刻的角度值， $M$  为采样点个数， $\theta, \phi$  表示俯仰角和滚转角， $n_{d_{\text{laser}}} \in \mathbb{R}$  表示高斯白噪声。

图7.14 激光扫描测距雷达工作原理



## 6. 二维激光测距仪

### □ 补充知识（LiDAR）

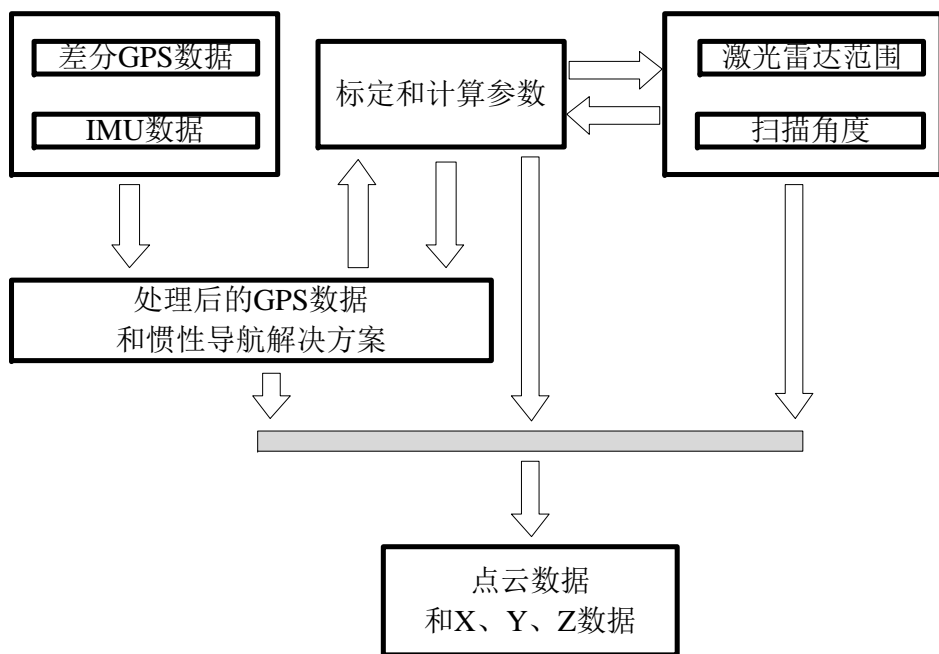


图7.15 LiDAR生成点云原理图

集LiDAR、GPS和IMU为一体的设备可以生成点云图。点云图数据中含有空间三维信息和激光强度信息。应用分类技术在这些原始数字表面模型中移除建筑物、人造物、覆盖植物等测点，即可获得数字高程模型，并同时得到地面覆盖物的高度。



## 6. 二维激光测距仪

### □ 补充知识（LiDAR）



图7.16 Velodyne公司的LiDAR及  
装载LIDAR系统的多旋翼

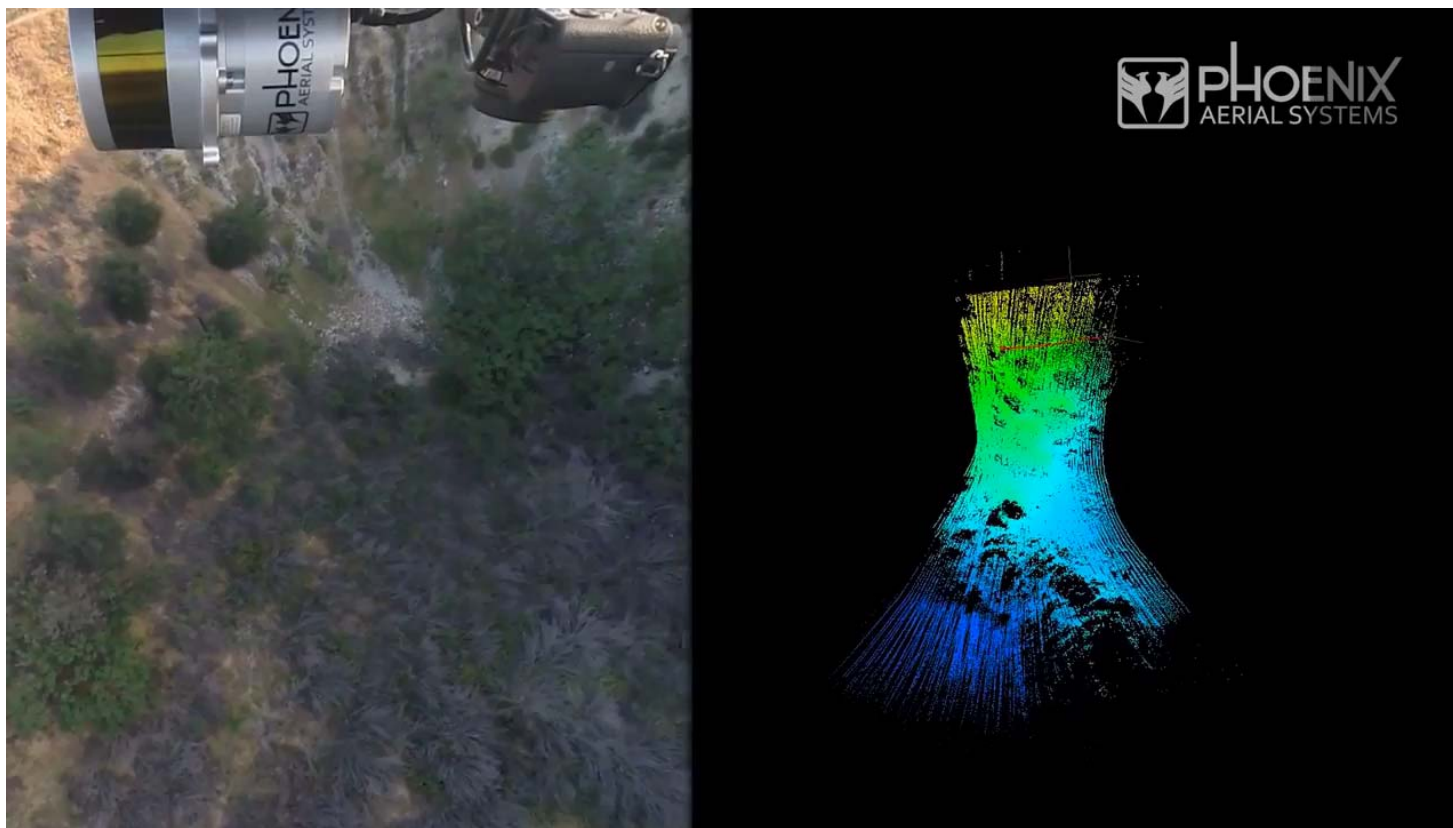
LiDAR的性能指标包括：重量、范围、功率、水平视场角、垂直视场角、每秒扫描点数，扫描频率、辨识精度、通道数（一个激光发射器和一个激光接收器为一个通道）。以Velodyne公司的VLP-16为例，它重0.83kg，扫描范围100m、8W、水平扫描角度是 $360^\circ$ 、垂直方向为 $\pm 15^\circ$ 、每秒扫描点数300000点，扫描频率5-20Hz、辨识精度 $\pm 3\text{cm}$ 、16个通道数。由于LiDAR的小型化，使其得以在多旋翼上施展拳脚，如左图所示。





## 6. 二维激光测距仪

### □ 补充知识（LiDAR）



视频2 Phoenix Aerial AL3-16 UAV LiDAR Mapping System Overview, [https://youtu.be/BhHro\\_rcgHo](https://youtu.be/BhHro_rcgHo)



## 7. 全球定位系统（GPS）

- 全球定位系统由许多卫星组成，位置已知。基本原理是测GPS接收机到卫星的距离，然后通过解方程确定GPS接收机的位置。
- 对C/A码测得的伪距称为C/A码伪距，精度约为20米左右，对P码测得的伪距称为P码伪距，精度约为2米左右。考虑电离层、对流层和钟差影响，伪距定位基本观测方程为

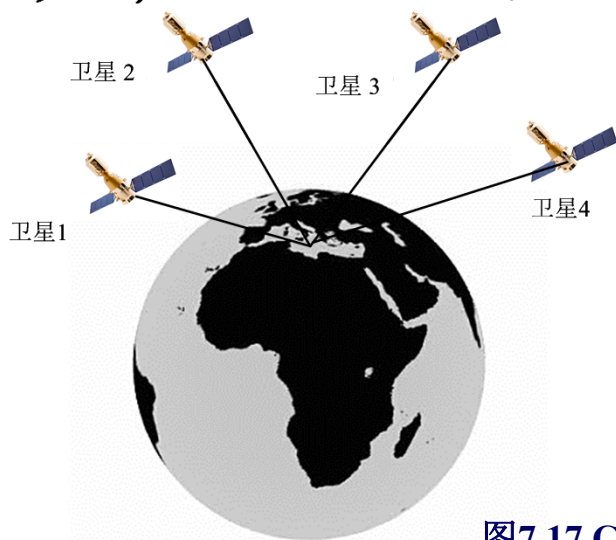


图7.17 GPS卫星示意图



# 7. 全球定位系统 (GPS)

## □ 基本原理

$$\rho = \rho' + c(\delta_t + \delta_T) + \delta_I$$

Diagram illustrating the GPS pseudorange equation with labels for each term:

- $\rho$ : 真实距离 (True Distance)
- $\rho'$ : 伪距 (Pseudorange)
- $c$ : 光速 (Speed of Light)
- $\delta_t$ : 卫星钟误差改正数 (Satellite Clock Error Correction)
- $\delta_T$ : 接收机时钟相对于GPS时间的误差改正数 (Receiver Clock Error Correction relative to GPS time)
- $\delta_I$ : 延迟改正数 (Ionospheric Delay Correction)

接收机钟差是未知数，其产生是因为GPS接收机一般采用高精度的石英钟，接收机的钟面时与GPS标准时之间的差异称为接收机钟差。



# 7. 全球定位系统 (GPS)

## □ 基本原理

令卫星的坐标为  $\mathbf{p}_{s,k} \in \mathbb{R}^3, k = 1, \dots, n_s$  而用户接收机的位置坐标为  $\mathbf{p}_r \in \mathbb{R}^3$ 。可以得到

$$\|\mathbf{p}_{s,k} - \mathbf{p}_r\| - \delta_I = \rho'_k + c(\delta_{t,k} + \delta_T), k = 1, \dots, n_s$$

共4个未知数。因此，最少需要4颗卫星，才能够对用户接收机进行定位。



## 7. 全球定位系统 (GPS)

### □ 差分GPS基本原理

差分GPS(DGPS)主要是通过消除误差公共项来改善定位性能。DGPS系统由**基准站**、**数据链**和**用户**三部分构成，它要求有高质量的GPS基准接收机放在已知坐标的基准站上，基准站估算每个卫星的**测距误差分量**，并对每颗卫星可视范围内的卫星形成**校正值**，将该校正值或者原始观测值，通过数据链发送给所有的DGPS用户。



# 7. 全球定位系统 (GPS)

## □ 测量模型

GPS接收机放在多旋翼飞行器上，用于测量在地球固连坐标系的位置  ${}^e \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ 。它可以表示为

$${}^e \mathbf{p}_{\text{GPS}} = {}^e \mathbf{p} + \mathbf{b}_p + \mathbf{n}_p$$

↑            ↑    ↑    ↑  
测量到的位置信号    真实位置信号    漂移    噪声

进一步，漂移量  $\mathbf{b}_p$  又可建模为如下的高斯随机游走过程

$$\dot{\mathbf{b}}_p = \mathbf{n}_{b_p}$$

其中  $\mathbf{n}_{b_p} \in \mathbb{R}^3$  表示为高斯白噪声。一般的GPS和差分GPS都可以采用上面的模型，不同的是它们的精度不同，体现在漂移和噪声参数上，还有它们的频率不同。





# 8. 摄像机

## □ 基本原理

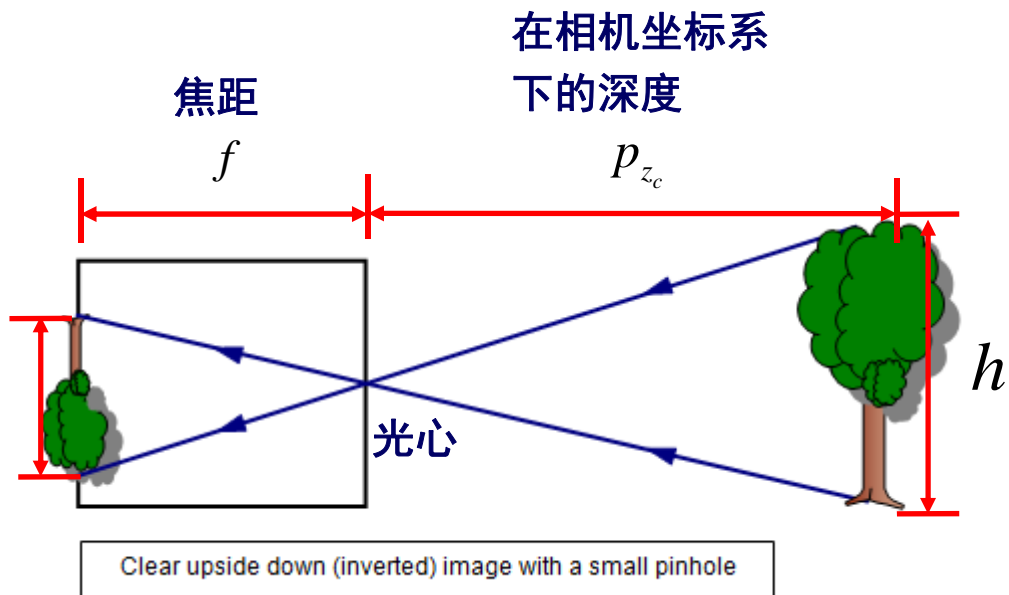
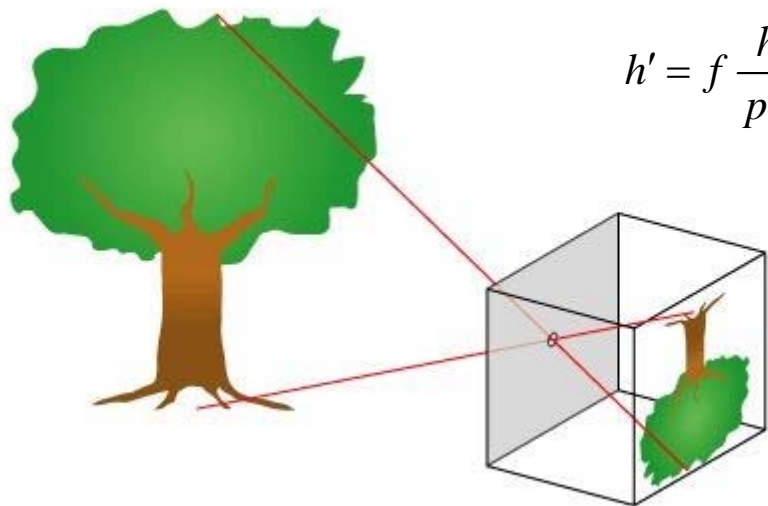


图7.18 针孔摄像机成像模型示意图



## 8. 摄像机

### □ 基本原理

在机器视觉中，摄像机通过成像透镜将三维场景投影到二维像平面的投影关系即为成像模型，摄像机成像模型将三维空间中的点与图像平面中的点对应起来。为了研究的方便，空间中任一点 $P$ 在图像中的成像位置可以用**针孔成像模型**近似表示，这种关系也称为**中心摄影或透视投影模型**。



# 8. 摄像机

## □ 基本原理

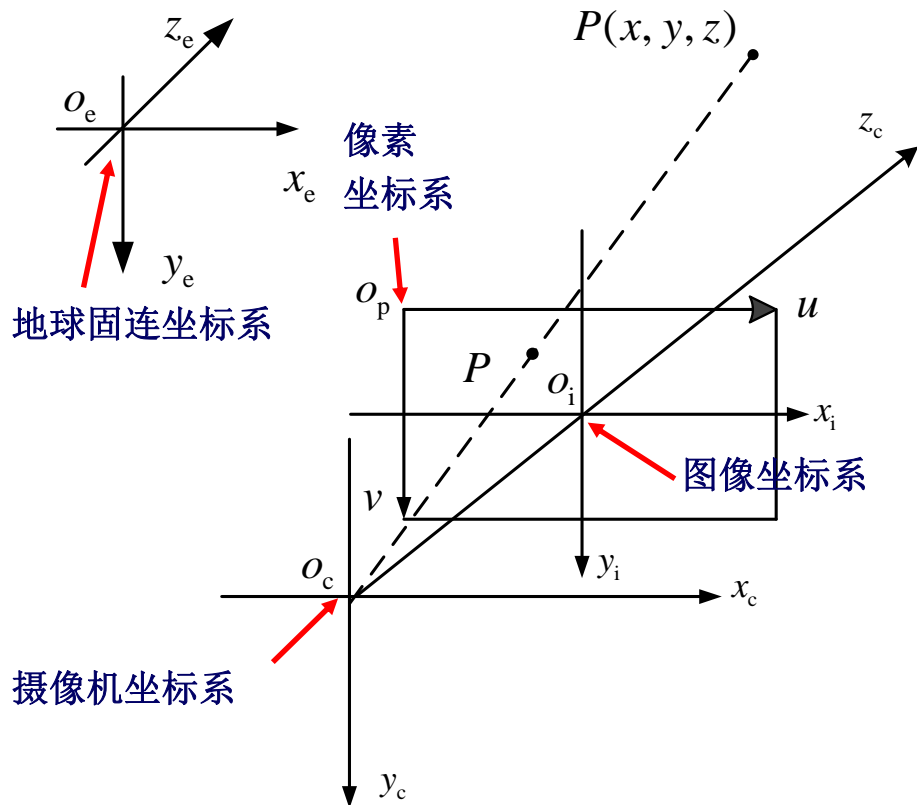


图7.19 摄像机成像模型



## 8. 摄像机

### □ 测量模型

#### (1) 地球固连坐标系到摄像机坐标系的变换

$$\begin{bmatrix} P_{x_c} \\ P_{y_c} \\ P_{z_c} \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}_e^c & \mathbf{T} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_2} \begin{bmatrix} P_{x_e} \\ P_{y_e} \\ P_{z_e} \\ 1 \end{bmatrix}$$

旋转矩阵  $\downarrow$   $\mathbf{R}_e^c$

三维平移向量  $\downarrow$   $\mathbf{T}$



# 8. 摄像机

## □ 测量模型

### (2) 摄像机坐标系到图像坐标系的变换

$$\begin{cases} P_{x_i} = \frac{fP_{x_c}}{P_{z_c}} \\ P_{y_i} = \frac{fP_{y_c}}{P_{z_c}} \end{cases} \Rightarrow s \begin{bmatrix} P_{x_i} \\ P_{y_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_P \begin{bmatrix} P_{x_c} \\ P_{y_c} \\ P_{z_c} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{P_{x_i}}{dX} + u_0 \\ v = \frac{P_{y_i}}{dY} + v_0 \end{cases}$$

毫米 像素



# 8. 摄像机

## □ 测量模型 (3) 综合

$$s \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{dX} & 0 & u_0 \\ 0 & \frac{1}{dY} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_e^c & \mathbf{T} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{x_e} \\ P_{y_e} \\ P_{z_e} \\ 1 \end{bmatrix}$$

像素坐标

地球固连坐标系坐标

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_x & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & \alpha_y & v_0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_1} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_e^c & \mathbf{T} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{x_e} \\ P_{y_e} \\ P_{z_e} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \mathbf{X}_e = \mathbf{M} \mathbf{X}_e$$

$\mathbf{M}_1$ 为内参数矩阵  
 $\mathbf{M}_2$ 为外参数矩阵

其中  $\alpha_x = \frac{f}{dX}$  为  $u$  轴上的尺度因子，或称为  $u$  轴上归一化焦距；  
 $\alpha_y = \frac{f}{dY}$  为  $v$  轴上尺度因子，或称为  $v$  轴上归一化焦距





## 8. 摄像机

### □ 内部参数校正工具箱

工具箱	描述	网址
Computer Vision System Toolbox	Matlab R2012a以及更高版本自带的工具箱自带工具箱。采用棋盘格作为靶标，可以对一般相机进行标定。	<a href="http://cn.mathworks.com/help/vision/index.html">http://cn.mathworks.com/help/vision/index.html</a>
Camera Calibration Toolbox for Matlab	采用棋盘格作为靶标，可以对传统相机进行标定。	<a href="http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib_doc/">http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib_doc/</a>
Camera Calibration Toolbox for Generic Lenses	可以对传统相机和全方位相机，比如：鱼眼相机和折反射相机，进行标定。采用平面靶标。	<a href="http://www.ee.oulu.fi/~jkannala/calibration/calibration.html">http://www.ee.oulu.fi/~jkannala/calibration/calibration.html</a>
The DLR Camera Calibration Toolbox	标定过程全自动，可以处理标定物不完全在图像内的情况。采用平面靶标，亚像素提取精度。	<a href="http://dlr.de/rmc/rm/en/desktopdefault.aspx/tabid-3925/6084_read-9201/">http://dlr.de/rmc/rm/en/desktopdefault.aspx/tabid-3925/6084_read-9201/</a>
Fully automatic camera and hand to eye calibration	二合一的工具箱。一部分为全自动标定，第二部分是机器人手眼标定（Hand-Eye Calibration）	<a href="http://www.vision.ee.ethz.ch/software/calibration_toolbox//calibration_toolbox.php">http://www.vision.ee.ethz.ch/software/calibration_toolbox//calibration_toolbox.php</a>
Camera Calibration Tools	相机可以直接连到电脑进行标定	<a href="http://www0.cs.ucl.ac.uk/staff/Dan.Stoyanov/calib/">http://www0.cs.ucl.ac.uk/staff/Dan.Stoyanov/calib/</a>
Omnidirectional Calibration Toolbox	可以用于标定双曲（Hyperbolic），抛物线（Parabolic），折叠镜（Folded Mirror），球面（Spherical）和大广角（Wide-angle）相机。	<a href="http://www.robots.ox.ac.uk/~cmey/Toolbox.html">http://www.robots.ox.ac.uk/~cmey/Toolbox.html</a>
Camera Calibration Toolbox for Generic Multiple Cameras	采用一维标定杆，可以对传统、大广角和鱼眼相机进行内外参标定	<a href="http://quanquan.buaa.edu.cn/CalibrationToolbox.html">http://quanquan.buaa.edu.cn/CalibrationToolbox.html</a>



## 9. 本讲小结

- 本节课主要给出了三轴加速度计，三轴陀螺仪和三轴磁力计的自动标定的原理和方法。因为无需额外的设备，因此这些方法也**比较实用**。
- 本节课的校正方法属于传感器内部参数标定，还有传感器外部参数标定可以进一步研究。这是因为我们认为传感器的坐标系原点就是多旋翼的机体系原点，坐标系的轴也是与多旋翼的机体系轴一致的。然而，**由于安装的问题，不可能将传感器都置于多旋翼的中心或重心**。



# 资源

---

(1) 可靠飞行控制研究组主页课程中心(全部课件下载)

<http://rfly.buaa.edu.cn/course>

(2) 关注可靠飞行控制研究组公众号 buaarfly(文章、资讯等)

(3) 多旋翼设计与控制交流QQ群:183613048

(4) 视频课程(MOOC)同步发布, 网易云课堂搜索 “多旋翼”

<http://study.163.com/course/introduction/1003715005.htm>

(5) 同名中文书本教材《多旋翼飞行器设计与控制》即将在电子工业出版社出版, 敬请期待

(6) 有疑问可联系课程总助教戴训华, 邮箱: [dai@buaa.edu.cn](mailto:dai@buaa.edu.cn)



# 致谢

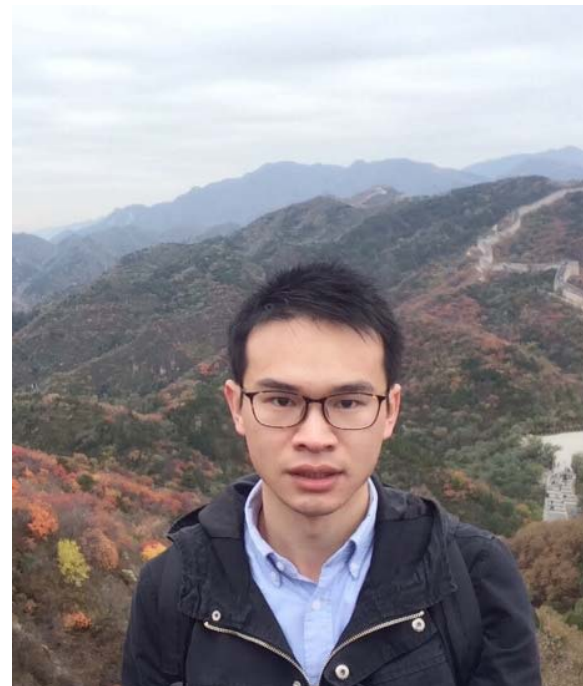
## 感谢控制组同学



傅嘉宁



邓恒



戴训华

为本节课程准备作出的贡献。



---

# 谢谢！



# 多旋翼飞行器设计与控制

## 第八讲 可观性和卡尔曼滤波器

全权 副教授

qq\_buaa@buaa.edu.cn

自动化科学与电气工程学院

北京航空航天大学





# 东方智慧



## 盲人摸象







# 核心问题

---

什么是可观性？ 如何设计卡尔曼滤波器？



# 大纲

---

1. 可观性
2. 卡尔曼滤波
3. 多速率采样卡尔曼滤波
4. 扩展卡尔曼滤波
5. 本讲小结



# 可观性

可观性就是回答“**状态的变化能否由输出反映出来**”

中医“望闻问切”  
是否能瞧病？



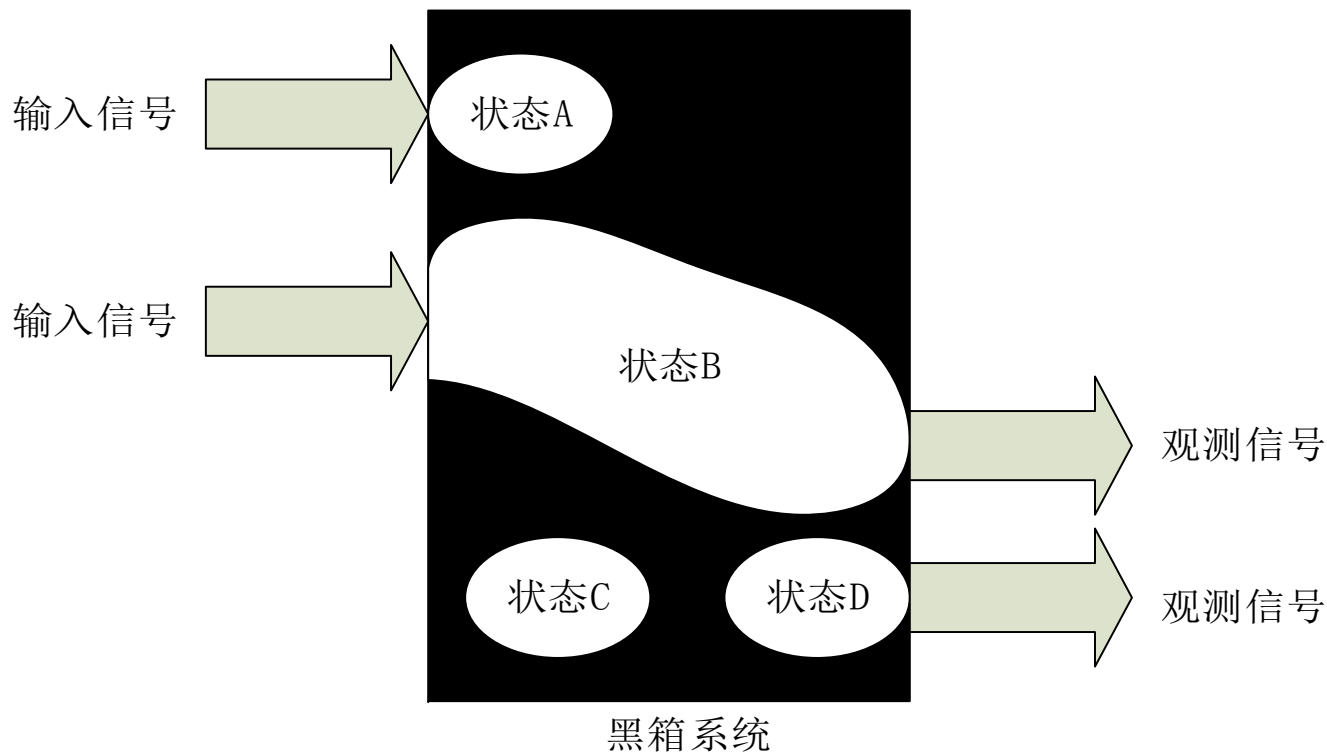
网络大数据作为输出，能否观测  
更有价值信息？



三个关键词：**动态系统、状态、输出**



# 可观性



直观地，状态A和状态C是不可观的



# 可观性

## □ 连续线性系统

### (1) 定义

考虑如下连续线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}^T \mathbf{x}$$

其中  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times m}$

定义1. 如果在有限时间间隔  $t_0 \leq t \leq t_f$  内, 根据输出值  $\mathbf{y}(t)$  和输入值  $\mathbf{u}(t)$ , 能够确定系统的初始状态  $\mathbf{x}(t_0)$  的每一个分量, 那么称此系统是完全可观的, 简称可观测。

三个关键词: 动态系统、状态、输出



# 可观性

## □ 连续线性系统

### (2) 直观解释

由系统方程可知

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}^T \mathbf{x}$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{C}^T \mathbf{B} \mathbf{u} \Rightarrow \dot{\mathbf{y}} - \mathbf{C}^T \mathbf{B} \mathbf{u} = \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

$$\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{C}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{x} + \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{B}} \mathbf{u} \Rightarrow \ddot{\mathbf{y}} - \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{u} - \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{B}} \mathbf{u} = \mathbf{C}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{x}$$

⋮

$$\mathbf{y}^{(n-1)} - \sum_{k=0}^{n-2} \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{n-2-k} \mathbf{B} \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{x}$$



$$\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} - \mathbf{C}^T \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-1)} - \sum_{k=0}^{n-2} \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{n-2-k} \mathbf{B} \mathbf{u}^{(k)} \end{bmatrix} = \mathbf{O}_v \mathbf{x} \quad \text{其中} \quad \mathbf{O}_v = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

为什么不多求  
几阶导数？如：

$$\mathbf{O}'_v = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_v \\ \mathbf{C}^T \mathbf{A}^n \end{bmatrix}$$



# 可观性

## □ 连续线性系统

为什么不多求几阶导数？如：
$$\mathbf{O}'_v = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_v \\ \mathbf{C}^T \mathbf{A}^n \end{bmatrix}$$

根据凯利-哈密尔顿定理

$$\mathbf{C}^T \mathbf{A}^n = \alpha_0 \mathbf{C}^T + \alpha_1 \mathbf{C}^T \mathbf{A} + \cdots + \alpha_n \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{n-1}$$

因此可观性矩阵的秩并不会增加

所以只求到 (n-1) 阶导数





# 可观性

## □ 连续线性系统

### (3) 定理

进一步

利用此方程可以通过历史观测值 $y$ 逆向唯一求解出状态 $x$

$$\text{rank } \mathbf{O}_v = n \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{O}_v^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} - \mathbf{C}^T \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-1)} - \sum_{k=0}^{n-2} \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{n-2-k} \mathbf{B} \mathbf{u}^{(k)} \end{bmatrix}$$

定理1. 系统  $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}^T \mathbf{x} \end{cases}$  可观测的充分必要条件  $\text{rank } \mathbf{O}_v = n$ 。



# 可观性

## □ 连续线性系统

### (4) 例子

例1. 给出两个传感器**GPS**和**加速度计**，那么哪一个能够稳定地估计出一维运动小车的速度？

- **GPS**。为了简化起见，我们用GPS观测位置，一般用如下模型

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} p \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix}$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C^T} \begin{bmatrix} p \\ v \end{bmatrix}$$

$y=x$ ，故位置状态 $x$ 可通过输出 $y$ 直接求导得到，需要估计的是速度状态 $v$

$$O_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可观！  
能够稳定地  
估计小车的速度

其中  $x, v \in \mathbb{R}$  分别表示位置和速度,  $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}$  表示已知统计特性的噪声。



# 可观性

## □ 连续线性系统

### (4) 例子

- **加速度计**。为了简化起见，用加速度计估计速度，一般用如下模型

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{a} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} v \\ a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}^T} \begin{bmatrix} v \\ a \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{O}_v = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

不可观！  
不能够稳定地  
估计小车的速度

其中  $v, a \in \mathbb{R}$  分别表示速度和加速度， $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}$  表示已知统计特性的噪声。

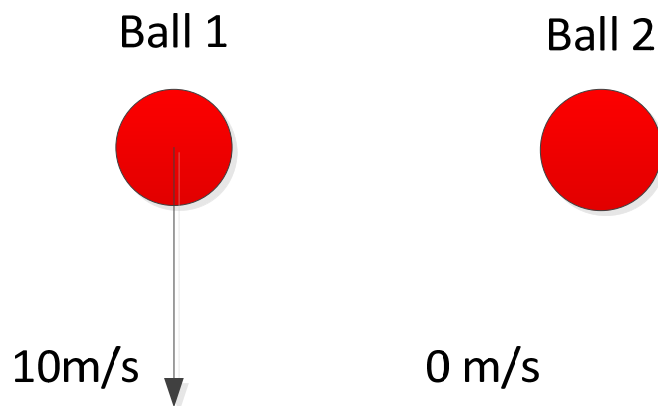


# 可观性

## □ 连续线性系统

### (4) 例子

- 加速度计。



两个自由落体的小球  
加速度一样，但是初  
始速度不一样。无法从  
输出（加速度），观测出  
小球初始速度（状态）。  
不可观。



# 可观性

## □ 离散线性系统

### (1) 定义

对于连续线性系统，可以通过采样周期  $T_s$  精确地将连续系统转化成离散系统。将连续系统模型转换成如下离散采样线性系统

$$\mathbf{x}_k = \Phi \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_{k-1}$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}^T \mathbf{x}_k$$

其中  $\Phi = e^{A T_s}$ ,  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}'_{k-1}$ ,  $t \in [(k-1)T_s, kT_s]$ ,  $\mathbf{u}_{k-1} = \int_0^{T_s} e^{A s} \mathbf{B} ds \cdot \mathbf{u}'_{k-1}$

定义2. 如果在有限时间间隔  $NT_s$  内，根据输出值  $\mathbf{y}_k$  和外界输入值  $\mathbf{u}_k$ ，能够确定系统的初始状态  $\mathbf{x}_0$  的每一个分量，那么称此系统是完全可观的，简称**可观测**。



# 可观性

## □ 离散线性系统

### (2) 直观解释

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_0 &= \mathbf{C}^T \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}_1 &= \mathbf{C}^T \mathbf{x}_1 = \mathbf{C}^T \Phi \mathbf{x}_0 + \mathbf{C}^T \mathbf{u}_0 \Rightarrow \mathbf{y}_1 - \mathbf{C}^T \mathbf{u}_0 = \mathbf{C}^T \Phi \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}_2 &= \mathbf{C}^T \mathbf{x}_2 = \mathbf{C}^T \Phi \mathbf{x}_1 + \mathbf{C}^T \mathbf{u}_1 \Rightarrow \mathbf{y}_2 - \mathbf{C}^T \mathbf{u}_1 - \mathbf{C}^T \Phi \mathbf{u}_0 = \mathbf{C}^T \Phi^2 \mathbf{x}_0 \\ &\vdots \\ \mathbf{y}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{C}^T \Phi^{n-1-k} \mathbf{u}_k &= \mathbf{C}^T \Phi^n \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$



$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2} \mathbf{C}^T \Phi^{n-2-k} \mathbf{u}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C}^T \Phi \\ \vdots \\ \mathbf{C}^T \Phi^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}_0$$

### (3) 定理

定理2. 系统

$$\mathbf{x}_k = \Phi \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_{k-1}$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}^T \mathbf{x}_k$$

可观测的充分必要条件是

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C}^T \Phi \\ \vdots \\ \mathbf{C}^T \Phi^{n-1} \end{bmatrix} = n$$



# 卡尔曼滤波器

## □ 概述

卡尔曼滤波器是一种递推线性最小方差估计算法。它的最优估计需满足以下三个条件：

1) 无偏性：即估计值的期望等于状态的真值；

若  $E(\hat{g}) = g$ ，那么意味着  $\hat{g}$  是参数  $g$  的无偏估计，否则为有偏估计，其中  $E(\cdot)$  表示期望。

2) 估计的方差最小；

若  $D(\hat{g}) = E\left(\left(\hat{g} - g\right)^2\right)$ ，如果对于任意一个估计  $\tilde{g}$ ，我们有  $D(\hat{g}) \leq D(\tilde{g})$ ，那么称  $\hat{g}$  为最小方差估计，其中  $D(\cdot)$  表示方差。

3) 实时性。





# 卡尔曼滤波器

## □ 模型描述

假设线性离散系统模型如下：

$$\mathbf{x}_k = \Phi_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_{k-1} + \Gamma_{k-1} \mathbf{w}_{k-1}$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

式中，过程噪声  $\mathbf{w}_{k-1}$  和观测噪声  $\mathbf{v}_k$  的统计特性为

自相关系数  $\mathbf{R}_{\mathbf{w}\mathbf{w}}$

互相关系数  $\mathbf{R}_{\mathbf{w}\mathbf{v}}$

系统噪声方差阵  $\mathbf{Q}_k \geq 0$

观测噪声方差阵  $\mathbf{R}_k > 0$

克罗内克  $\delta$  函数

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$$

$$E(\mathbf{w}_{k-1}) = \mathbf{0}, E(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0}, \mathbf{R}_{\mathbf{w}\mathbf{v}}(k, j) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{w}\mathbf{w}}(k, j) = E(\mathbf{w}_k \mathbf{w}_j^T) = \mathbf{Q}_k \delta_{kj} = \begin{cases} \mathbf{Q}_k, & k = j \\ \mathbf{0}, & k \neq j \end{cases}$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}(k, j) = E(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_j^T) = \mathbf{R}_k \delta_{kj} = \begin{cases} \mathbf{R}_k, & k = j \\ \mathbf{0}, & k \neq j \end{cases}$$

独立不相关



# 卡尔曼滤波器

## □ 模型描述

初始状态  $\mathbf{x}_0$  的统计特性为

$$E(\mathbf{x}_0) = \hat{\mathbf{x}}_0, \text{cov}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{P}_0 \quad \text{其中, cov}(\cdot) \text{表示协方差}$$

还假设状态的初始值  $\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_k$  与  $\mathbf{w}_{k-1}, \mathbf{v}_k, k \geq 1$ , 均不相关, 并且噪声向量  $\mathbf{w}_{k-1}$  与  $\mathbf{v}_k$  也不相关, 即有:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xw}}(0, k) = E(\mathbf{x}_0 \mathbf{w}_k^T) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xv}}(0, k) = E(\mathbf{x}_0 \mathbf{v}_k^T) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{uw}}(k, j) = E(\mathbf{u}_k \mathbf{w}_j^T) = \mathbf{0}$$

独立不相关



# 卡尔曼滤波器

## □ 卡尔曼滤波器推导思路

目的：假设滤波器形式

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \mathbf{K}'_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{K}_k \mathbf{z}_k + \mathbf{K}''_k \mathbf{u}_{k-1}$$

其中  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$  是  $\mathbf{x}_{k-1}$  的最优线性估计（**最小方差无偏估计**）。求

$$\mathbf{K}'_k, \mathbf{K}_k, \mathbf{K}''_k$$

使得  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$  是  $\mathbf{x}_k$  的最优线性估计。



# 卡尔曼滤波器

## 卡尔曼滤波器推导思路

第一步：求  $\mathbf{K}'_k, \mathbf{K}''_k$  使得  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$  是  $\mathbf{x}_k$  的无偏估计

因为  $\tilde{\mathbf{x}}_{k|k} = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{k|k} &= \underbrace{(\Phi_{k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \Phi_{k-1} - \mathbf{K}'_k)}_{\text{red underline}} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{K}'_k (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}) \\ &+ (\Gamma_{k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \Gamma_{k-1}) \mathbf{w}_{k-1} + \underbrace{(\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k - \mathbf{K}''_k)}_{\text{red underline}} \mathbf{u}_{k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k \end{aligned}$$

又因为要求  $E(\tilde{\mathbf{x}}_{k|k}) = \mathbf{0}$ ，又已知  $E(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}) = \mathbf{0}, E(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0}, E(\mathbf{w}_{k-1}) = \mathbf{0}$

不能要求  $E(\mathbf{x}_{k-1}) = \mathbf{0}, E(\mathbf{u}_{k-1}) = \mathbf{0}$ ，那么只能让

$$\Phi_{k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \Phi_{k-1} - \mathbf{K}'_k = \mathbf{0}_{n \times n}$$

$$\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k - \mathbf{K}''_k = \mathbf{0}_{n \times n}$$

$$\mathbf{K}'_k = \Phi_{k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \Phi_{k-1}$$

$$\mathbf{K}''_k = \mathbf{I}_n - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k$$



# 卡尔曼滤波器

## 卡尔曼滤波器推导思路

第一步：求  $K'_k, K''_k$  使得  $\hat{x}_{k|k}$  是  $x_k$  的无偏估计

$$\begin{aligned} \Phi_{k-1} - K_k H_k \Phi_{k-1} - K'_k &= \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{I}_n - K_k H_k - K''_k &= \mathbf{0}_{n \times n} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} K'_k &= \Phi_{k-1} - K_k H_k \Phi_{k-1} \\ K''_k &= \mathbf{I}_n - K_k H_k \end{aligned}$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (z_k - \hat{z}_{k|k-1})$$



$$\begin{bmatrix} \text{状态} \\ \text{更新值} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{状态} \\ \text{预测值} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{卡尔曼} \\ \text{增益} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{新息} \\ \text{矢量} \end{bmatrix}$$

物理意义?

其中

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k-1} &= \Phi_{k-1} \hat{x}_{k-1|k-1} + \mathbf{u}_{k-1} \\ \hat{z}_{k|k-1} &= \mathbf{H}_k \hat{x}_{k|k-1} \end{aligned}$$



# 卡尔曼滤波器

## □ 卡尔曼滤波器推导思路

第二步：求  $\mathbf{K}_k$  使得  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$  是  $\mathbf{x}_k$  的**最小方差估计**

也就是求解优化问题

$$\min_{\mathbf{K}_k} \text{tr} \mathbf{P}_{k|k} = \min_{\mathbf{K}_k} \text{E} \left( \text{tr} \left( \tilde{\mathbf{x}}_{k|k} \tilde{\mathbf{x}}_{k|k}^T \right) \right)$$

这里  $\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1} (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T$

其中  $\mathbf{P}_{k|k-1} = \text{E} \left( \tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1} \tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}^T \right)$

进一步可以得到 **当作已知**

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{\Phi}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{\Phi}_{k-1}^T + \mathbf{\Gamma}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{\Gamma}_{k-1}^T$$



# 卡尔曼滤波器

## 卡尔曼滤波器推导思路

第二步：求  $\mathbf{K}_k$  使得  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$  是  $\mathbf{x}_k$  的最小方差估计  
也就是求解优化问题

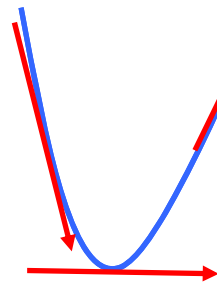
$$\min_{\mathbf{K}_k} \text{tr} \mathbf{P}_{k|k} = \min_{\mathbf{K}_k} \text{E} \left( \text{tr} \left( \tilde{\mathbf{x}}_{k|k} \tilde{\mathbf{x}}_{k|k}^T \right) \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \mathbf{K}_k} \text{tr} \left( \mathbf{P}_{k|k} \right) = -2\mathbf{P}_{k|k-1}^T \mathbf{H}_k^T + 2\mathbf{K}_k \left( \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \right) = \mathbf{0}_{n \times m}$$

$$\Rightarrow \mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \left( \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \right)^{-1} \quad \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \text{ 正定矩阵}$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}_{k|k} = \left( \mathbf{I}_n - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \right) \mathbf{P}_{k|k-1}$$

一般极值在导数为零处求得



$$\frac{d}{d\mathbf{A}} \text{tr} \left( \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{A}^T \right) = 2\mathbf{A} \mathbf{B}$$

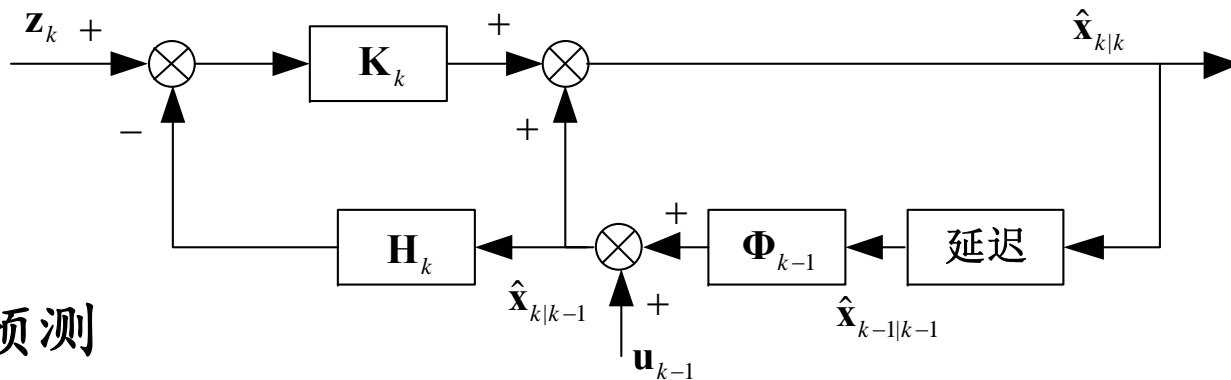
其中  $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T$ ,  $\mathbf{B}$  是对称阵.





# 卡尔曼滤波器

## 卡尔曼滤波器算法总结



### 1. 状态预测

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \Phi_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{u}_{k-1}$$

### 2. 误差协方差预测

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \Phi_{k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \Phi_{k-1}^T + \Gamma_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \Gamma_{k-1}^T$$

### 3. 卡尔曼滤波器增益

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \left( \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \right)^{-1}$$

### 4. 状态估计校正

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \left( \mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} \right)$$

$$\text{其中 } \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} = \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$$

### 5. 误差协方差估计校正

$$\mathbf{P}_{k|k} = \left( \mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \right) \mathbf{P}_{k|k-1}$$



# 卡尔曼滤波器

## □ 其他说明

(1) 一般来说，采样周期合理情况下，连续系统可观，离散化的系统也会可观。然而有时候采样周期选择不当，系统可能失去可控性及可观性。

(2) 卡尔曼滤波器是一种最优的观测器，观测增益  $\mathbf{K}_k$  是时变的。

(3)  $\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k$  需要是非奇异的，否则  $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}$  无法实现。

(4) 如果  $(\Phi_{k-1}, \mathbf{H}_k)$  不可观，那么卡尔曼滤波器仍然可以运行，只不过不可观的模态没有进行修正，只是递推罢了。极端情况  $\mathbf{H}_k = \mathbf{0}$ ，那么  $\mathbf{K}_k = \mathbf{0}$

整个系统完全不可观，那么

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \Phi_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{u}_{k-1}$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \Phi_{k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \Phi_{k-1}^T + \Gamma_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \Gamma_{k-1}^T$$



# 多速率卡尔曼滤波器

## □ 模型

考虑一类多速率采样的线性离散系统：

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= \mathbf{\Phi}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{\Gamma}_{k-1} \mathbf{w}_{k-1} \\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k\end{aligned}$$

其中：状态和噪声的定义与前面相同，不同在于传感器观测。假设系统基本采样周期为  $T_0$ ，两种不同传感器的采样周期分别为  $T_i (i=1,2)$ ，且  $T_i (i=1,2)$  为  $T_0$  的整数倍，即  $T_i = n_i T_0, n_i \in \mathbb{N}$ 。它们测量矩阵为  $\mathbf{H}_{ik} \in \mathbb{R}^{m_i \times n}$ ，噪声方差阵  $\mathbf{R}_{ik} \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$ （非奇异）， $i=1,2$ 。令  $\alpha T_0$  表示各观测数据的采样周期的最小公倍数。当没有观测量时，我们认为  $\mathbf{H}_k = \mathbf{0}$ ，为了保证算法不发生奇异问题，方差阵设置为单位阵（只要不是0的常数阵都可以）。



# 多速率卡尔曼滤波器

## □ 模型改进

最终，观测阵 $\mathbf{H}_k$ 以及观测噪声方差阵 $\mathbf{R}_k$ 均以 $\alpha T_0$ 为周期变化，即

$$\mathbf{H}_k = \begin{cases} \mathbf{H}_{ik}, & \text{if } \text{mod}(k, n_i) = 0 \ \& \ \text{mod}(k, \alpha) \neq 0 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1k} \\ \mathbf{H}_{2k} \end{bmatrix}, & \text{if } \text{mod}(k, \alpha) = 0 \\ \mathbf{0}, & \text{else} \end{cases} \quad \mathbf{R}_k = \begin{cases} \mathbf{R}_{ik}, & \text{if } \text{mod}(k, n_i) = 0 \ \& \ \text{mod}(k, \alpha) \neq 0 \\ \text{diag}(\mathbf{R}_{1k}, \mathbf{R}_{2k}), & \text{if } \text{mod}(k, \alpha) = 0 \\ \mathbf{I}, & \text{else} \end{cases}$$

其中，表达式 $\text{mod}(a, b)$ 是求余数操作，即 $a$ 除以 $b$ 之后的余数

在整个过程中，观测阵 $\mathbf{H}_k$ 、观测噪声方差阵 $\mathbf{R}_k$ 和观测量 $\mathbf{z}_k$ 的维数在不断的变化，而 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ 和 $\mathbf{P}_{k|k}$ 会根据每一步的信息更新而更新。它的推导过程就与经典的卡尔曼滤波器就相同了。



# 扩展卡尔曼滤波器

## □ 模型描述

假设非线性离散系统模型如下：

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}) \\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k)\end{aligned}$$

将非线性函数  $\mathbf{f}(\cdot)$  围绕  $(k-1)$  次滤波值  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$  展开成 Taylor 级数的形式，并忽略二次以上的高阶项，得到

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}) &= \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{0}) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{w}=\mathbf{0}} (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}) \\ &\quad + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{w}=\mathbf{0}} \mathbf{w}_{k-1}\end{aligned}$$



# 扩展卡尔曼滤波器

## □ 模型描述

类似地，非线性函数  $\mathbf{h}(\cdot)$  在  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$  处的线性化值为

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{0}) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{v}=\mathbf{0}} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{v}=\mathbf{0}} \mathbf{v}_k$$



# 扩展卡尔曼滤波器

## □ 模型描述

$$\mathbf{x}_k = \Phi_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}'_{k-1} + \Gamma_{k-1} \mathbf{w}_{k-1}$$

$$\mathbf{z}'_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}'_k$$

其中  $\mathbf{v}'_k$  的统计特性为  $E(\mathbf{v}'_k) = \mathbf{0}$ ,

$$\mathbf{R}_{\mathbf{v}'\mathbf{v}'}(k, j) = E(\mathbf{v}'_k \mathbf{v}'_j{}^T) = \begin{cases} \mathbf{R}'_k, & k = j \\ \mathbf{0}, & k \neq j \end{cases}$$

$$\mathbf{R}'_k = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{v}=\mathbf{0}} \mathbf{R}_k \left( \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{v}=\mathbf{0}} \right)^T$$

其中：

$$\Phi_{k-1} \triangleq \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{w}=\mathbf{0}_{n \times 1}}$$
$$\mathbf{H}_k \triangleq \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{v}=\mathbf{0}_{m \times 1}}$$
$$\Gamma_{k-1} \triangleq \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{w}=\mathbf{0}_{n \times 1}}$$
$$\mathbf{u}'_k \triangleq \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{0}_{n \times 1}) - \Phi_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$$
$$\mathbf{z}'_k \triangleq \mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{0}_{m \times 1}) + \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$$
$$\mathbf{v}'_k \triangleq \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{v}=\mathbf{0}_{m \times 1}} \mathbf{v}_k$$





# 本讲小结

---

- 实际中我们如何选取传感器和如何布置传感器等大部分是靠经验，没有实际的理论来支持。从理论上可以进行可观度（Degree of Observability）的研究，即可观测的程度方面的研究。
- 在Kalman滤波方面的研究可以考虑更加实际的情况，比如：对于维数较高的模型减少计算量，减少对噪声特性的依赖，减少延迟等等。



# 资源

---

(1) 可靠飞行控制研究组主页课程中心(全部课件下载)

<http://rfly.buaa.edu.cn/course>

(2) 关注可靠飞行控制研究组公众号 buaarfly(文章、资讯等)

(3) 多旋翼设计与控制交流QQ群:183613048

(4) 视频课程(MOOC)同步发布, 网易云课堂搜索 “多旋翼”

<http://study.163.com/course/introduction/1003715005.htm>

(5) 同名中文书本教材《多旋翼飞行器设计与控制》即将在电子工业出版社出版, 敬请期待

(6) 有疑问可联系课程总助教戴训华, 邮箱: [dai@buaa.edu.cn](mailto:dai@buaa.edu.cn)



# 致谢

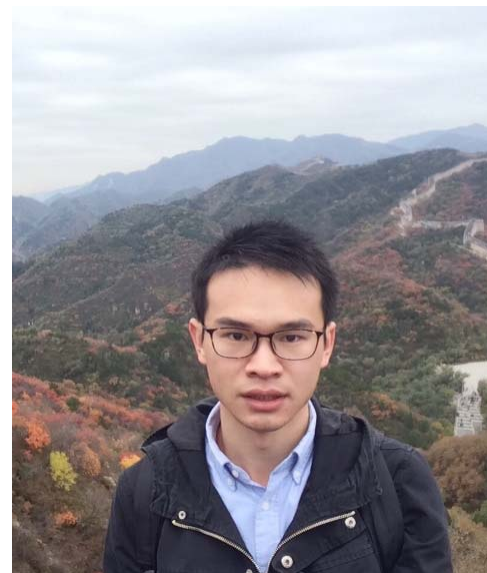
## 感谢控制组同学



郭正龙



邓恒



戴训华

为本节课程准备作出的贡献。



---

# 谢谢！



---

# 多旋翼飞行器设计与控制

## 第九讲 状态估计

全权 副教授

qq\_buaa@buaa.edu.cn

自动化科学与电气工程学院

北京航空航天大学



# 东方智慧



兼听则明



# 前言

---

如何对多传感器信息进行融合?





# 大纲

---

1. 姿态估计
2. 位置估计
3. 速度估计
4. 障碍估计
5. 本讲小结



# 1. 姿态估计

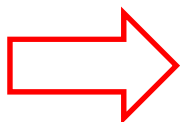
## □ 测量原理

### (1) 俯仰角和滚转角测量原理

根据第六讲气动阻力模型，忽略速度与角速度的交叉项，比力<sup>b</sup>  $\mathbf{a}_m$  满足

$$\begin{bmatrix} a_{x_b,m} \\ a_{y_b,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v}_{x_b} + g \sin \theta \\ \dot{v}_{y_b} - g \sin \phi \cos \theta \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -\frac{k_{\text{drag}}}{m} v_{x_b} \\ -\frac{k_{\text{drag}}}{m} v_{y_b} \end{bmatrix}$$

其中  ${}^b \mathbf{a}_m = [a_{x_b,m} \quad a_{y_b,m} \quad a_{z_b,m}]^T$  是加速度计测量值。当系统处于稳定状态，比如匀速运动或者静止，即  $\dot{v}_{x_b} = \dot{v}_{y_b} = 0$



$$\begin{bmatrix} a_{x_b,m} \\ a_{y_b,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \sin \theta \\ -g \sin \phi \cos \theta \end{bmatrix}$$



# 1. 姿态估计

## □ 测量原理

### (1) 俯仰角和滚转角测量原理

因此，**低频**的俯仰角和滚转角信号观测量可以由加速度计读数近似获得，表示如下

$$\theta_m = \arcsin\left(\frac{a_{x_b m}}{g}\right)$$

$$\phi_m = -\arcsin\left(\frac{a_{y_b m}}{g \cos \theta_m}\right)$$

其中  ${}^b \mathbf{a}_m = [a_{x_b m} \quad a_{y_b m} \quad a_{z_b m}]^T$  是加速度计测量值。

注：如果**机体振动很大**，那么  $a_{x_b m}, a_{y_b m}$  将被噪声**严重污染**，这样将进一步影响角度  $\theta_m, \phi_m$  的估计。因此，机体的**减振**很重要。



# 1. 姿态估计

## □ 测量原理

### (2) 偏航角测量原理

磁轴和地轴不是重合的。磁场在地球表面的水平投影**不是严格指向地轴**。

**磁偏角**是磁场强度矢量的水平投影与正北方向之间的夹角，即磁子午线与地理子午线之间的夹角。如果磁场强度矢量的指向偏向正北方向以东称**东偏**，偏向正北方向以西称**西偏**。各个地方的磁偏角不同，而且由于磁极也处在运动之中，某一地点磁偏角会随时间而改变。因此，要精确找到**正北方向**，需要经过两步。

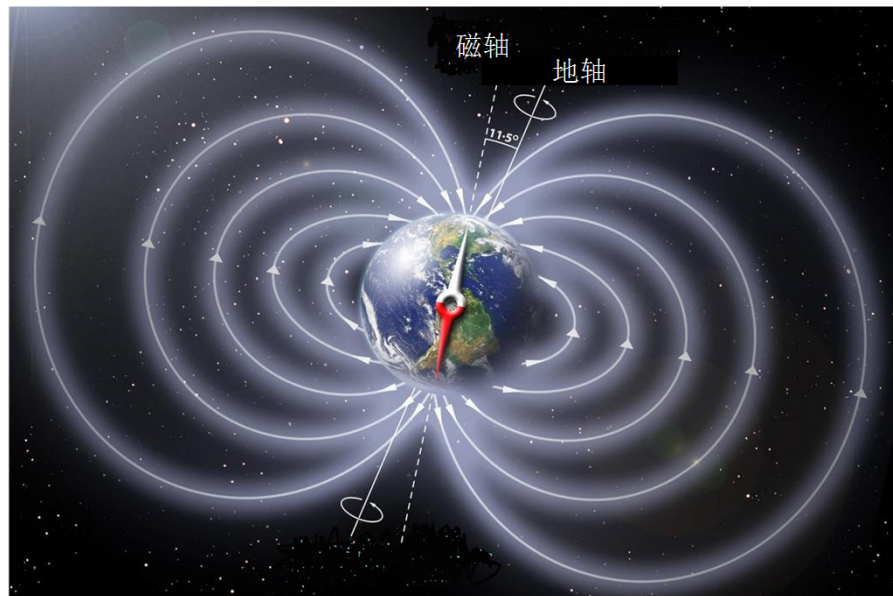


图9.1 地磁场示意图（感谢爱丁堡大学Peter Reid提供的图片）



# 1. 姿态估计

## □ 测量原理

### (2) 偏航角测量原理

1) 第一步，确定磁场方向在水平面的向量，求出方位角。

磁力计的读数为  ${}^b \mathbf{m}_m = [m_{x_b} \quad m_{y_b} \quad m_{z_b}]^T$ 。考虑到磁力计可能不是水平放置，所以需要利用两轴倾角传感器测量的角度  $(\theta_m, \phi_m)$  将磁力计的测量值投影到水平面。因此，先做如下变换[1]

$$\bar{m}_{x_e} = m_{x_b} \cos \theta_m + m_{y_b} \sin \phi_m \sin \theta_m + m_{z_b} \cos \phi_m \sin \theta_m$$

$$\bar{m}_{y_e} = m_{y_b} \cos \phi_m - m_{z_b} \sin \phi_m$$

其中  $\bar{m}_{x_e}, \bar{m}_{y_e}$  表示磁力计读数在水平面的投影。

[1] Caruso M J. Applications of magnetoresistive sensors in navigation systems[R]. SAE Technical Paper, 1997.



# 1. 姿态估计

## □ 测量原理

### (2) 偏航角测量原理

1) 第一步，确定磁场方向在水平面的向量，求出方位角。

定义  $\psi_{\text{mag}} \in [0, 2\pi]$ ，那么可以表示为： | 定义  $\psi_{\text{mag}} \in [-\pi, \pi]$ ，那么可以表示为：

$$\psi_{\text{mag}} = \begin{cases} \pi - \tan^{-1}(\bar{m}_y / \bar{m}_x) & \text{if } \bar{m}_x < 0, \\ 2\pi - \tan^{-1}(\bar{m}_y / \bar{m}_x) & \text{if } \bar{m}_x > 0, \bar{m}_y > 0, \\ -\tan^{-1}(\bar{m}_y / \bar{m}_x) & \text{if } \bar{m}_x > 0, \bar{m}_y < 0, \\ \pi/2 & \text{if } \bar{m}_x = 0, \bar{m}_y < 0, \\ 3\pi/2 & \text{if } \bar{m}_x = 0, \bar{m}_y > 0, \end{cases}$$

$$\psi_{\text{mag}} = \arctan 2(\bar{m}_{y_e}, \bar{m}_{x_e})$$

机头顺时针方向转动，偏航角为正。



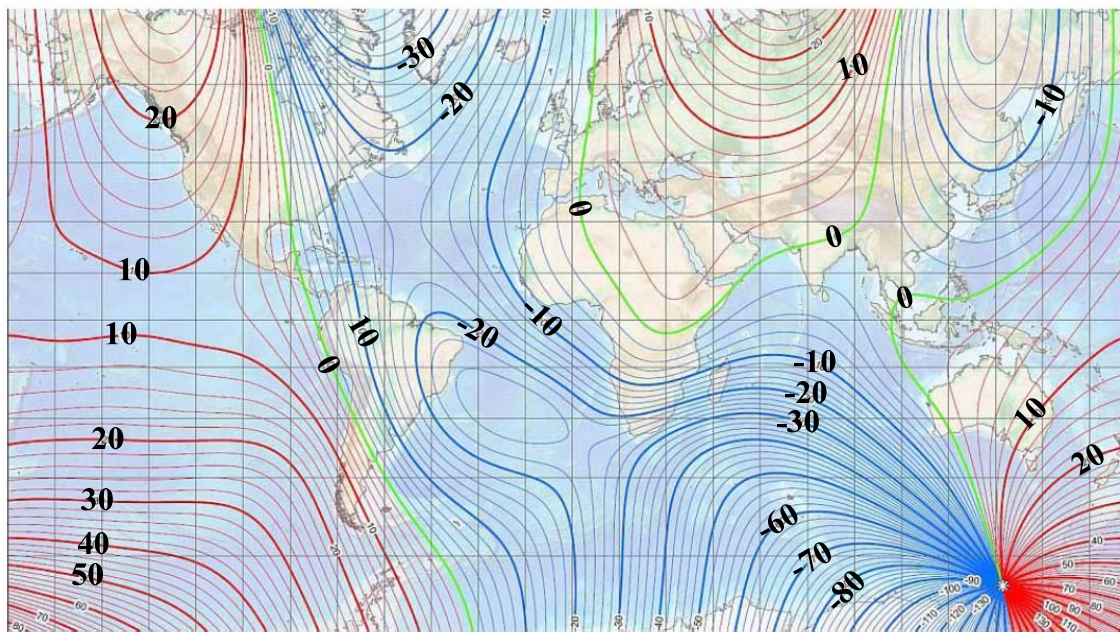


# 1. 姿态估计

## □ 测量原理

### (2) 偏航角测量原理

2) 第二步，加上或减去磁偏角修正到正北方向。



北京磁偏角约为 $6^\circ$  偏西。  
因此，在北京磁场方向上  
加上 $6^\circ$  的磁偏角，能找到  
正北方。

图9.2 2015年世界磁偏角分布图（图片源自<http://www.ngdc.noaa.gov/geomag/WMM/image.shtml>）



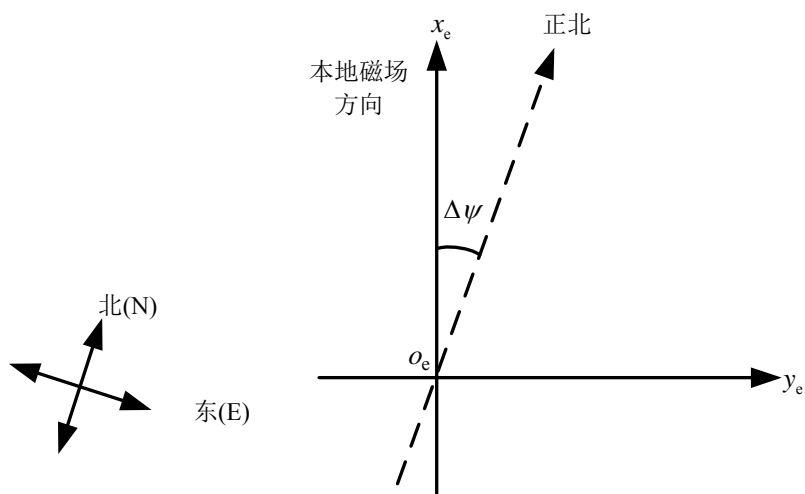


# 1. 姿态估计

## □ 测量原理

### (2) 偏航角测量原理

2) 第二步，加上或减去磁偏角修正到正北方向。



**半自主飞行**时，我们可以将地球固连坐标系 $o_e x_e$ 轴指向本地磁场方向，如左图所示。从图中看出，本地磁场偏西。当作**全自主飞行**时，因为**需要**与地球的经纬度一致，我们可以将地球固连坐标系 $o_e x_e$ 轴指向正北方向。

图9.3 本地磁场和正北方向



# 1. 姿态估计

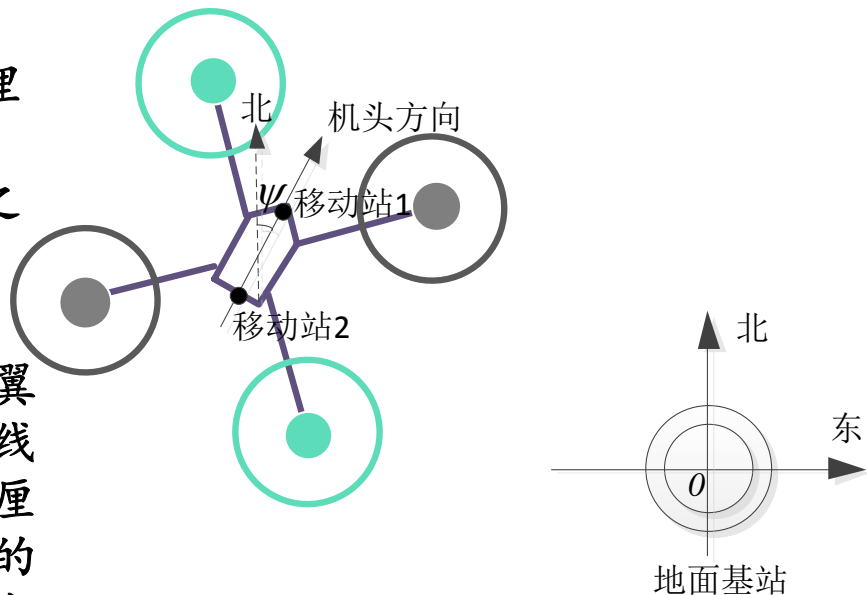
## □ 测量原理

### (2) 偏航角测量原理

对于体型较大的飞行器，可以分别在机头和机尾安装GPS天线。通过测量它们的地理位置，来确定飞行器的偏航角。然而，对于小型多旋翼来说，安装空间很小，多个GPS之间基线很短，较难准确测定偏航角，除非利用高精度差分GPS。

如右图为差分GPS测向的原理。在多旋翼机头机尾装上两个差分GPS移动站（或双天线GPS），可以获取它们在地球固连坐标系下厘米级的定位精度，根据两点确定一条直线的方法，可以较简单地获取多旋翼的机头朝向。

**注：**两移动站分的越开，精度越高，距离越短精度越低，一般需要大于30cm。



差分GPS测向原理



# 1. 姿态估计

## □ 线性互补滤波器

姿态角变化率  $\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}$  和陀螺仪的角速度  ${}^b\omega = [\omega_{x_b} \quad \omega_{y_b} \quad \omega_{z_b}]^T$  有如下关系

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan \theta \sin \phi & \tan \theta \cos \phi \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi / \cos \theta & \cos \phi / \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{x_b} \\ \omega_{y_b} \\ \omega_{z_b} \end{bmatrix}$$

因为认为多旋翼工作过程中  $\theta \approx 0, \phi \approx 0$ ，所以上式近似为

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \omega_{x_b} \\ \omega_{y_b} \\ \omega_{z_b} \end{bmatrix}$$

姿态角可以由加速度计和电子罗盘测量得到，漂移小，但噪声大。另一方面，姿态角也可以通过陀螺仪测得的角速度积分得到，该方法噪声小，但漂移大。互补滤波器的基本思想是利用它们各自的优势，**在频域上特征互补，得到更精确的姿态角。**



# 1. 姿态估计

## □ 线性互补滤波器

### (1) 俯仰角

下面我们着重以俯仰角为例，详细推导线性互补滤波器。俯仰角  $\theta$  的拉氏变换可以表示为

$$\theta(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \theta(s) + \left(1 - \frac{1}{\tau s + 1}\right) \theta(s)$$

低通滤波器,  $\tau \in \mathbb{R}_+$   
表示时间常数

高通滤波器

$$\frac{\tau s}{\tau s + 1} = 1 - \frac{1}{\tau s + 1}$$

为了估计俯仰角，以上式子的  $\theta$  需要用传感器信息替代。

1) **加速度计**测量的俯仰角无漂移但噪声大，为了简便，俯仰角测量值建模为

$$\theta_m = \theta + n_\theta$$

其中  $n_\theta$  表示高频噪声， $\theta$  表示真值。

2) **陀螺仪**的角速度测量会有漂移但噪声小，可以建模为

$$\frac{\omega_{y_b m}(s)}{s} = \theta(s) + c \frac{1}{s}$$

角速率积分的拉氏变换

常值漂移的拉氏变换



# 1. 姿态估计

## □ 线性互补滤波器

### (1) 俯仰角

下面我们着重以俯仰角为例，详细推导线性互补滤波器。俯仰角  $\theta$  的拉氏变换可以表示为

$$\theta(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \theta(s) + \left(1 - \frac{1}{\tau s + 1}\right) \theta(s)$$

低通滤波器,  $\tau \in \mathbb{R}_+$   
表示时间常数

高通滤波器  
 $\frac{\tau s}{\tau s + 1} = 1 - \frac{1}{\tau s + 1}$

为了估计俯仰角，以上式子的  $\theta$  需要用传感器信息替代。

线性互补滤波器的标准形式以传递函数方式表示为

$$\hat{\theta}(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \theta_m(s) + \frac{\tau s}{\tau s + 1} \left( \frac{1}{s} \omega_{y_b m}(s) \right)$$

加速度计测量的俯仰角

陀螺仪的角速度积分



# 1. 姿态估计

## □ 线性互补滤波器

### (1) 俯仰角

下面我们着重以俯仰角为例，详细推导线性互补滤波器。俯仰角  $\theta$  的拉氏变换可以表示为

$$\theta(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \theta(s) + \left(1 - \frac{1}{\tau s + 1}\right) \theta(s)$$

低通滤波器,  $\tau \in \mathbb{R}_+$   
表示时间常数

高通滤波器  
 $\frac{\tau s}{\tau s + 1} = 1 - \frac{1}{\tau s + 1}$

为了估计俯仰角，以上式子的  $\theta$  需要用传感器信息替代。

线性互补滤波器的标准形式以传递函数方式表示为

$$\hat{\theta}(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \theta_m(s) + \frac{\tau s}{\tau s + 1} \left( \frac{1}{s} \omega_{y_b m}(s) \right)$$

加速度计测量的俯仰角

陀螺仪的角速度积分

$$\hat{\theta}(s) = \theta(s) + \left[ \frac{1}{\tau s + 1} n_\theta(s) + \frac{\tau s}{\tau s + 1} c \frac{1}{s} \right] \hat{\theta}(s) \approx \theta(s)$$

衰减为零



# 1. 姿态估计

## □ 线性互补滤波器

### (1) 俯仰角

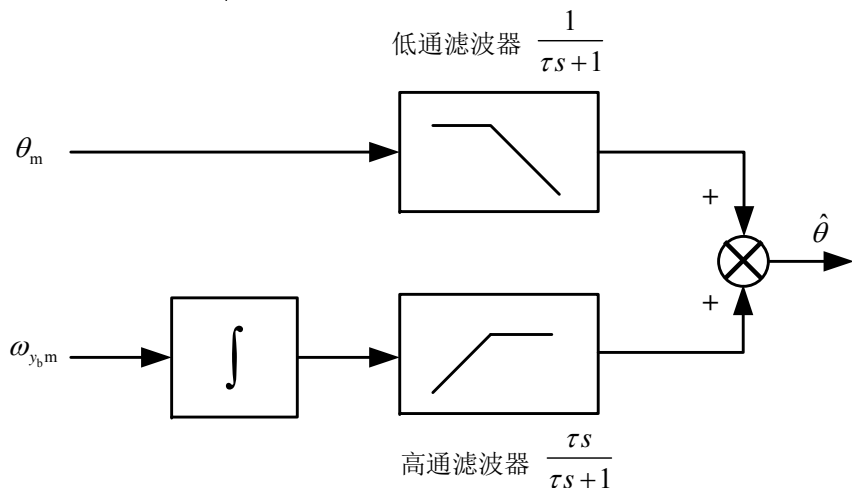


图9.4 互补滤波器估计俯仰角流程图

为了计算机算法实现，需要对其进行离散化

$$\hat{\theta}(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \theta_m(s) + \frac{\tau s}{\tau s + 1} \left( \frac{1}{s} \omega_{y_b m}(s) \right)$$

通过一阶向后差分法，将  $s$  表示为 [2]

$$s = (1 - z^{-1}) / T_s \quad T_s \in \mathbb{R}_+ \text{ 表示采样周期}$$

进一步表示为

$$\hat{\theta}(z) = \frac{1}{\tau \frac{1-z^{-1}}{T_s} + 1} \theta_m(z) + \frac{\tau}{\tau \frac{1-z^{-1}}{T_s} + 1} \omega_{y_b m}(z)$$

再把上式转化为差分形式得到

$$\hat{\theta}(k) = \frac{\tau}{\tau + T_s} \left( \hat{\theta}(k-1) + T_s p_{b_m}(k) \right) + \frac{T_s}{\tau + T_s} \theta_m(k)$$

[2]. Perdikaris G A. *Computer Controlled Systems*. Berlin: Springer-Netherlands, 1991.

低通滤波器将  $\theta_m$  无漂移的优势保留下来，而高通滤波器将  $\omega_{y_b m}(s)/s$  噪声小的优势保留下来





# 1. 姿态估计

## □ 线性互补滤波器

### (1) 俯仰角

如果  $\tau/(\tau + T_s) = 0.95$ ，那么  $T_s/(\tau + T_s) = 0.05$ 。

这样以上的互补滤波算法可以写为

$$\hat{\theta}(k) = 0.95(\hat{\theta}(k-1) + T_s \omega_{y_b m}(k)) + 0.05 \theta_m(k)$$

我们利用Pixhawk自驾仪传感器实时传回的数据进行一阶向后差分法估计俯仰角，效果如右图所示。从结果不难看出通过互补滤波器，可以得到平滑的俯仰角估计值，而对陀螺仪直接进行积分，结果是发散的。滚转角估计方法类似。

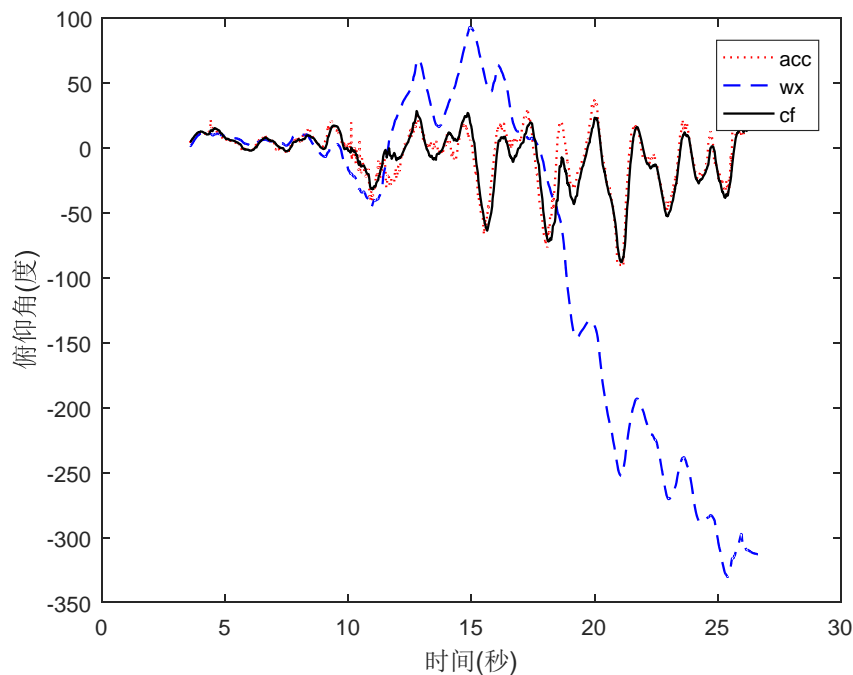


图9.5 互补滤波器估计俯仰角实验仿真图，其中，acc、wx和cf 分别表示利用加速度估计的俯仰角、角速度直接积分后的俯仰角以及互补滤波后的俯仰角



# 1. 姿态估计

## □ 线性互补滤波器

### (2) 偏航角

如果偏航角可由GPS提供  $\psi_{\text{GPS}}$  和电子罗盘  $\psi_{\text{mag}}$  提供。一种简单的方法是定义测量的偏航角为两者的加权和，即

$$\psi_m = (1 - \alpha_\psi) \psi_{\text{GPS}} + \alpha_\psi \psi_{\text{mag}}$$

其中： $\alpha_\psi \in [0, 1]$  是加权因子。因为电子罗盘的采样频率和陀螺仪的采样频率高于GPS，所以可以采取以下方式获取偏航角

$$\psi_m(k) = \begin{cases} (1 - \alpha_\psi) \psi_{\text{GPS}}(k) + \alpha_\psi \psi_{\text{mag}}(k), & \psi_{\text{GPS}} \text{更新} \\ \psi_{\text{mag}}(k), & \text{其它} \end{cases}$$

得到  $\psi_m$  之后，可以得到偏航角估计为

$$\hat{\psi}(k) = \frac{\tau}{\tau + T_s} (\hat{\psi}(k-1) + T_s \omega_{z_b m}(k)) + \frac{T_s}{\tau + T_s} \psi_m(k)$$



# 1. 姿态估计

## □ 非线性互补滤波器

非线性互补滤波器与线性互补滤波器的大体思想相似，都是利用加速度计和陀螺仪的互补优势，不同之处在于它们不是直接线性相加，而是遵从角速度和角度的非线性关系。

定义  $\hat{R}$  表示互补滤波器估计输出的姿态旋转矩阵， $R_m$  代表由加速度传感器和电子罗盘观测到的姿态旋转矩阵，而  $\tilde{R}$  表示  $R_m$  与  $\hat{R}$  之间的误差，定义为

$$\tilde{R} = \hat{R}^T R_m$$

根据非线性互补滤波器的原理，可以按照如下形式进行滤波 [3]

$$\dot{\hat{R}} = \left( R_m^b \omega_m + k_p \hat{R} \xi \right) \hat{R}$$

陀螺仪的  
角速度

反馈增益

$$\xi = \text{vex} \left( \frac{1}{2} (\tilde{R} - \tilde{R}^T) \right), \text{vex}([x]_x) = x$$

角度测量

[3] Mahony R, Hamel T, Pflimlin J M. Nonlinear complementary filters on the special orthogonal group [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(5): 1203-1218.



# 1. 姿态估计

## □ 卡尔曼滤波器

非线性互补滤波器方法所用的状态量高达12维，而且参数选取不能保证最优。为降低方程的非线性化程度，可以考虑以下一种卡尔曼滤波器方法[4]。定义

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \dot{\mathbf{R}}_b^e = \mathbf{R}_b^e \left[ {}^b\boldsymbol{\omega} \right]_x \Rightarrow \dot{\mathbf{R}}_e^b = - \left[ {}^b\boldsymbol{\omega} \right]_x \mathbf{R}_e^b \\ \text{第三列提出来得到} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{过程模型} \\ \dot{\mathbf{x}} = - \left[ {}^b\boldsymbol{\omega} \right]_x \mathbf{x} \end{array}$$

由于多旋翼在一般情况下，沿  $x_b, y_b$  的加速度值很小，因此加速度观测量可表示为

$$\mathbf{C}^T \cdot {}^b \mathbf{a}_m = -g \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{x} + \mathbf{n}_a \quad \begin{array}{l} \text{观测模型} \end{array}$$

其中  $\mathbf{C} = \left[ \mathbf{I}_2 \quad \mathbf{0}_{2 \times 1} \right]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ ,  $\mathbf{n}_a \in \mathbb{R}^2$ 。

[4]. Kang C W, Park C G. Attitude estimation with accelerometers and gyros using fuzzy tuned Kalman filter[C]. Control Conference (ECC), 2009 European. IEEE, 2009: 3713-3718.



## 2. 位置估计

### □ 基于GPS的位置估计

多旋翼在飞行时，通过GPS或者视觉定位系统，可以获得当前的位置；联合高度传感器（一般为气压计），可以进一步获得当前的更精确的多旋翼位置信息。定义绝对位置为 ${}^e\mathbf{p} = [p_{x_e} \quad p_{y_e} \quad p_{z_e}]^T \in \mathbb{R}^3$ 。

过程模型可以表示为

$${}^e\dot{\mathbf{p}} = {}^e\mathbf{v}$$

$${}^e\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{R}({}^b\mathbf{a}_m - \mathbf{b}_a - \mathbf{n}_a) + g\mathbf{e}_3$$

$$\dot{\mathbf{b}}_a = \mathbf{n}_{b_a}$$

$$\dot{b}_{d_{\text{baro}}} = n_{b_{d_{\text{baro}}}}$$

观测模型可以表示为

$$p_{x\text{GPS}} = p_{x_e} + n_{p_{x\text{GPS}}}$$

$$p_{y\text{GPS}} = p_{y_e} + n_{p_{y\text{GPS}}}$$

$$d_{\text{baro}} = -p_{z_e} + b_{d_{\text{baro}}} + n_{d_{\text{baro}}}$$

- 如果考虑GPS的测量偏移？
- 如果考虑GPS的高度测量作为观测量？
- 实际过程中，气压计和GPS同时测高度面临问题，风、GPS失效？

这里用到了加速度计等惯性测量单元，气压计和GPS，传感器模型和参数请见第七讲。



## 2. 位置估计

### □ 基于SLAM的位置估计

SLAM(Simultaneous Localization and Mapping), 也称同步定位与建图技术。SLAM问题可以描述为:机器人在未知环境中从一个未知位置开始移动, 在移动过程中利用传感器估计自身位置的同时建造周围环境的增量式地图, 实现机器人的自主定位和导航[5][6]。



视频. Autonomous Aerial Navigation in Confined Indoor Environments From <https://youtu.be/IMSozUpFFkU>

[5]. Whyte H, Balley T. Simultaneous Localization and Mapping (SLAM) Part 1 The Essential Algorithms[J]. IEEE Robotics & Automation Magazine, 2006.

[6]. Bailey T, Durrant-Whyte H. Simultaneous localization and mapping (SLAM): Part II[J]. IEEE Robotics & Automation Magazine, 2006, 13(3): 108-117.





## 2. 位置估计

表9.1 开源SLAM算法

作者	描述	网址
CyrillStachniss, UdoFrese, Giorgio Grisetti	一个提供给做SLAM研究的平台，上面有很多公开的SLAM算法，同时包括一些数据。	<a href="http://openslam.org">http://openslam.org</a>
Kai Arras	提供了研究移动机器人SLAM的MATLAB仿真工具箱（CAS Robot Navigation Toolbox）	<a href="http://www.cas.kth.se/toolbox">http://www.cas.kth.se/toolbox</a>
Tim Bailey	提供了EKF-SLAM, FastSLAM1.0, FastSLAM2.0, UKF-SLAM的MATLAB仿真算法	<a href="https://openslam.informatik.uni-freiburg.de/bailey-slam.html">https://openslam.informatik.uni-freiburg.de/bailey-slam.html</a>
Mark Paskin	提供了一些实现SLAM算法的Java类库，包括卡尔曼滤波、信息滤波和MATLAB交互的细化结点树滤波。	<a href="http://ai.stanford.edu/~paskin/slam">http://ai.stanford.edu/~paskin/slam</a>
Andrew Davison	提供了一些用来建图和定位的C++库Scene，能够实现实时单目SLAM功能	<a href="http://www.doc.ic.ac.uk/~ajd/Scene/index.html">http://www.doc.ic.ac.uk/~ajd/Scene/index.html</a>
José Neira	提供了实现EKF-SLAM的MATLAB模拟器，证明了联合相容分支定界算法的数据关联	<a href="http://webdiis.unizar.es/~neira/software/slam/slamsim.html">http://webdiis.unizar.es/~neira/software/slam/slamsim.html</a>
Dirk Hahnel	用C语言实现了基于网格的Fast-SLAM	<a href="http://dblp.uni-trier.de/pers/hd/h/H=auml=hnel:Dirk.html">http://dblp.uni-trier.de/pers/hd/h/H=auml=hnel:Dirk.html</a>
Durrant Whyte, Eduardo Nebot, et al	来自2002年在瑞典KTH举办的以SLAM为主题的暑期学校时候的MATLAB代码	<a href="http://www.cas.kth.se/SLAM/schedule.html">http://www.cas.kth.se/SLAM/schedule.html</a>





## 2. 位置估计

表9.2 SLAM相关数据库

开发者	描述	网址
Andrew Howard and Nicholas Roy	标准的机器人数据集，包括实际场景下激光和声纳数据；仿真环境下，不同传感器数据；不同的地图	<a href="http://radish.sourceforge.net">http://radish.sourceforge.net</a>
Jose Guivant, Juan Nieto and Eduardo Nebot	大量的室外数据集，尤其包括著名的维多利亚公园的数据	<a href="http://www.acfr.usyd.edu.au/index.shtml">http://www.acfr.usyd.edu.au/index.shtml</a>
Radish (The Robotics Data Set Repository)	大量丰富的室内数据集，包括来自加利福尼亚大学图书馆、西雅图的Intel研究实验室、Edmonton会议中心的大片区域的数据	<a href="http://radish.sourceforge.net">http://radish.sourceforge.net</a>
IJRR (The International Journal of Robotics Research)	IJRR对于每篇文章都有一个相关网页，包含大量数据结果及影像资料	<a href="http://www.ijrr.org">http://www.ijrr.org</a>



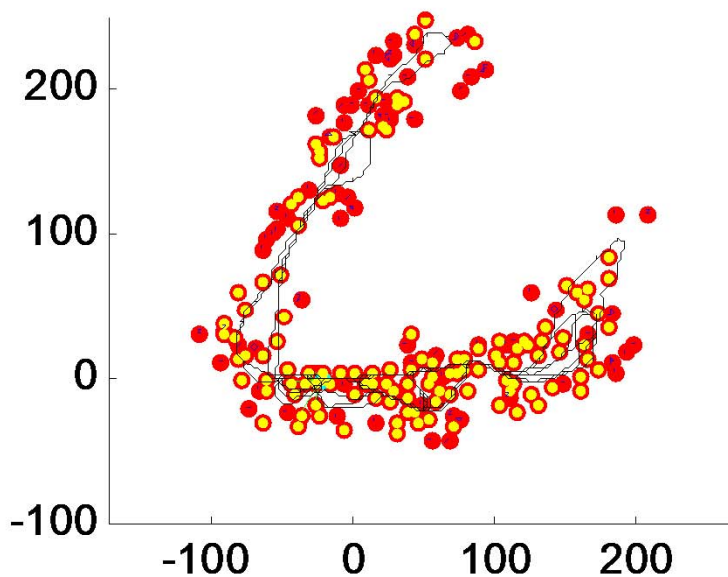
## 2. 位置估计

### □ 基于SLAM的位置估计

#### (1) 基于激光的SLAM



(a) 维多利亚公园



(b) 地标与轨迹

利用现有的维多利亚公园数据，结合二维激光SLAM算法，进行MATLAB仿真实验。实际SLAM实验结果如左图(a)所示。而在实验仿真过程中，给出了惯导及激光扫描仪数据，直接利用这些数据代替实际的数据采集过程，不断地与原有的地标匹配和更新，这些特征地标有助于跟踪定位。最终仿真实验结果如图(b)所示。

图9.6 激光SLAM实验结果图，其中圆点表示地图地标，线条表示运动估计的轨迹



## 2. 位置估计

### □ 基于SLAM的位置估计

#### (1) 基于激光的SLAM

目前大部分算法多基于二维平面，因此对于多旋翼这种在三维空间运动的飞行器，我们要对算法的输入稍作改变。首先，要求多旋翼定高飞行，这样基本可以认为多旋翼在二维平面上运动。其次，认为飞行器是在走廊类型的空间飞行，也就是空间的水平截面是相同的，至少在指定高度周边是相同的。大部分室内环境可以满足这个条件。



视频. [NUS UAV] Indoor autonomous quadrotor with laser scanner, <https://youtu.be/bbtQy5g4tuc>



## 2. 位置估计

### □ 基于SLAM的位置估计

#### (2) 基于单目视觉的SLAM

在单目视觉SLAM框架中，有两个核心步骤，一个是根据场景的结构信息求取摄像机位姿，另一个是根据求取的摄像机位姿来重建场景的三维结构。我们将第一个步骤称为跟踪(Tracking)，将第二个步骤称为建图(Mapping)。

- 连续帧SLAM

跟踪和建图的任务交替进行，跟踪依赖于建图得到的场景结构信息，而建图反过来又依赖于跟踪求取的摄像机位姿。

- 关键帧SLAM

将跟踪和建图两个任务分离开，并且分别在两个独立的线程上运行。这样就可以在不影响相机跟踪实时性的前提下，在建图任务中采用时间效率低、精确性高的运动求取结构技术。



## 2. 位置估计

### □ 基于SLAM的位置估计

#### (2) 基于单目视觉的SLAM

目前微小型无人机多采用关键帧SLAM或者说PTAM技术。由于SLAM方法大都采用单相机实现，因此得不到位置的尺度信息。但是可以由加速度计、气压计或超声波模块得到。接下来介绍如何将尺度信息恢复。

建立过程模型如下：

$$\begin{aligned}\dot{p}_{z_e} &= v_{z_e} \\ \dot{v}_{z_e} &= a_{z_{em}} + n_{a_{z_e}} + g \\ \dot{\lambda} &= n_{\lambda} \\ \dot{b}_{d_{\text{baro}}} &= n_{b_{d_{\text{baro}}}}\end{aligned}$$

$p_{z_e}, v_{z_e}, \lambda, b_{d_{\text{baro}}}$  分别表示高度、高度方向上的速度、尺度因子和气压计偏移，而  $n_{a_{z_e}}, n_{\lambda}, n_{b_{d_{\text{baro}}}}$  表示相应的高斯噪声。

Achtelik M, Achtelik M, Weiss S, et al. Onboard IMU and monocular vision based control for MAVs in unknown indoor and outdoor environments[C]//Robotics and automation (ICRA), 2011 IEEE international conference on. IEEE, 2011: 3056-3063.





## 2. 位置估计

### □ 基于SLAM的位置估计

#### (2) 基于单目视觉的SLAM

目前微小型无人机多采用关键帧SLAM或者说PTAM技术。由于SLAM方法大都采用单相机实现，因此**得不到位置的尺度信息**。但是可以由加速度计、气压计或超声波模块得到。接下来介绍如何将尺度信息恢复。

建立观测模型如下[7]:

$$p_{z\text{SLAM}} = \lambda \cdot p_{z_e} + n_{p_{z\text{SLAM}}} \leftarrow \text{SLAM提供的高度信息}$$
$$d_{\text{baro}} = -p_{z_e} + b_{d_{\text{baro}}} + n_{d_{\text{baro}}} \leftarrow \text{气压计提供的高度信息}$$

[7] Achteik M, Achteik M, Weiss S, et al. Onboard IMU and monocular vision based control for MAVs in unknown in-and outdoor environments[C]//Robotics and automation (ICRA), 2011 IEEE international conference on. IEEE, 2011: 3056-3063.



## 3. 速度估计

### □ 基于光流的速度估计方法

#### (1) 光流

光流是指图像中所有像素点构成的一种二维瞬时速度场，其中的二维速度矢量是景物中可见点的三维速度矢量在成像表面的投影。

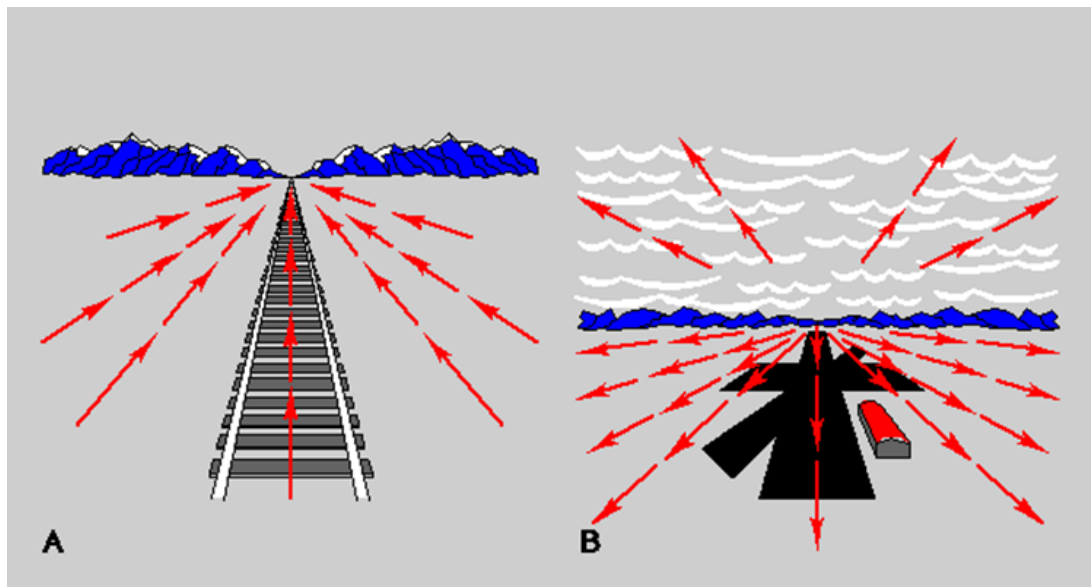


图9.7 光流示意图（图片来自James Jerome Gibson的书籍《The Ecological Approach to Visual Perception》）。  
A图表示远离群山时的光流，B图表示靠近群山时的光流





# 3. 速度估计

## □ 基于光流的速度估计方法

### (1) 光流

假定图像点  $(x, y)$  在时刻  $t$  的灰度为  $I(x, y, t)$ ，经过时间间隔  $dt$  后，对应点的变为  $(x + dx, y + dy)$ 。当  $dt \rightarrow 0$  时，可以认为两点的灰度保持不变，也就是

$$I(x + dx, y + dy, t + dt) = I(x, y, t)$$

假设图像灰度是其位置和时间的连续变化函数，可以将上式的左边进行泰勒级数展开

$$I(x + dx, y + dy, t + dt) = I(x, y, t) + \frac{\partial I}{\partial x} dx + \frac{\partial I}{\partial y} dy + \frac{\partial I}{\partial t} dt + \varepsilon$$

由于  $dt \rightarrow 0$ ，忽略  $\varepsilon$ ，可以得到光流约束方程：

$$\text{光流 } v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} dx + \frac{\partial I}{\partial y} dy + \frac{\partial I}{\partial t} dt = 0$$

$$I_x v_x + I_y v_y + I_t = 0$$

图像灰度相对于  $x, y, t$  的偏导  $I_x = \frac{\partial I}{\partial x}, I_y = \frac{\partial I}{\partial y}, I_t = \frac{\partial I}{\partial t}$



## 3. 速度估计

### □ 基于光流的速度估计方法

#### (1) 光流

表. 光流计算相关工具箱

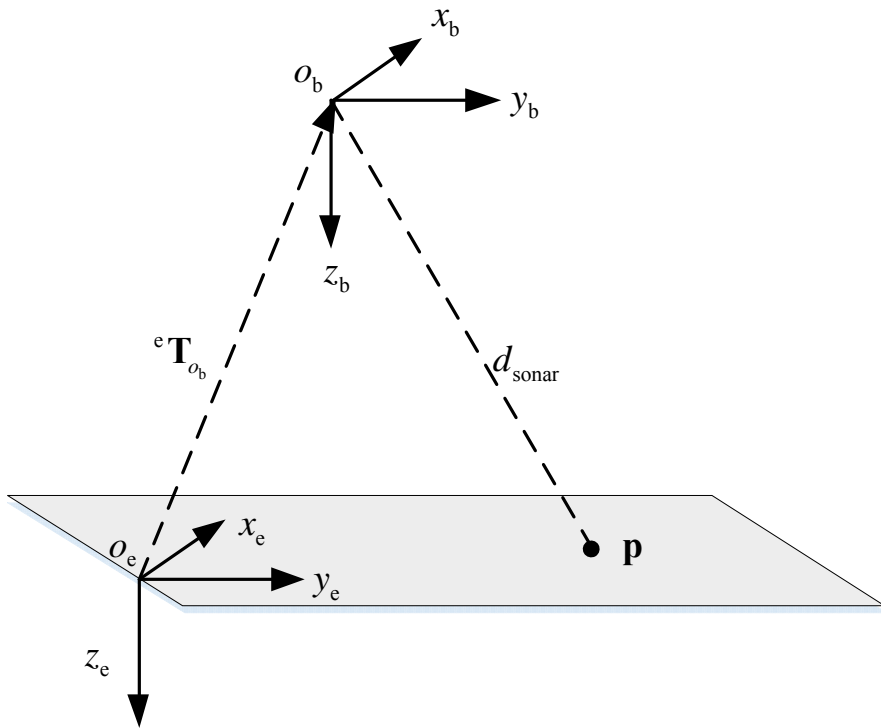
开发者	描述	网址
Computer Vision System Toolbox	MATLAB R2012a以及更高版本自带的计算机视觉工具箱，将光流计算封装成一个类vision.OpticalFlow	<a href="http://cn.mathworks.com/help/vision/index.html">http://cn.mathworks.com/help/vision/index.html</a>
OpenCV	开源计算机视觉库，提供很多光流计算的API接口函数，有1.x,2.x,3.0等版本	<a href="http://opencv.org">http://opencv.org</a>
Machine Vision Toolbox	侧重机器视觉、三维视觉方面的工具箱，MATLAB与现代计算机工作站结合	<a href="http://www.petercorke.com/Machine_Vision_Toolbox.html">http://www.petercorke.com/Machine_Vision_Toolbox.html</a>
VLFeat	计算机视觉/图像处理开源项目，使用C语言编写，提供C语言和MATLAB两种接口，实现大量计算机视觉算法	<a href="http://www.vlfeat.org/download.html">http://www.vlfeat.org/download.html</a>
Peter Kovese's Toolbox	全部由MATLAB的m文件实现计算机视觉算法，不需要编译安装，支持Octave，轻量好用	<a href="http://www.peterkovese.com/matlabfns">http://www.peterkovese.com/matlabfns</a>



# 3. 速度估计

## □ 基于光流的速度估计方法

### (2) 光流与机体速度关系



如右图所示的坐标系，单目摄像机固连于飞行器质心，镜头垂直于机身向下安装。为了简便，假设摄像机坐标系与机体坐标系重合，用  $o_b x_b y_b z_b$  表示，地面近似为平面，记为  $p_{z_e} = 0$ 。

图9.8 机体坐标系  $o_b x_b y_b z_b$  与地球固连坐标系  $o_e x_e y_e z_e$  下的点  $p$ ，其中  $d_{sonar}$  表示摄像机中心距离地面点  $p$  的距离，点  $p$  所处的平面是  $x_e o_e z_e$



# 3. 速度估计

## □ 基于光流的速度估计方法

### (2) 光流与机体速度关系

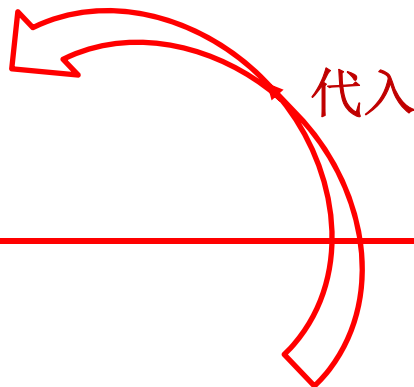
地面P点的归一化  
图像坐标表示为

$$\bar{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \bar{p}_x \\ \bar{p}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{x_b} / p_{z_b} \\ p_{y_b} / p_{z_b} \end{bmatrix}$$



光流

$$\begin{cases} \dot{\bar{p}}_x = \frac{\dot{p}_{x_b} - \bar{p}_x \dot{p}_{z_b}}{p_{z_b}} \\ \dot{\bar{p}}_y = \frac{\dot{p}_{y_b} - \bar{p}_y \dot{p}_{z_b}}{p_{z_b}} \end{cases}$$



地面P点在惯性系和  
机体系关系如下

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}} &= \mathbf{R} \begin{bmatrix} {}^b \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}_x \\ {}^b \mathbf{v} &= \mathbf{R}^T \cdot {}^e \mathbf{v} \end{aligned}$$

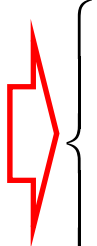
$${}^e \mathbf{p} = \mathbf{R} \cdot {}^b \mathbf{p} + {}^e \mathbf{T}_{o_b}$$

地面P点静止

$$\mathbf{0}_{3 \times 1} \equiv {}^e \dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{R}} \cdot {}^b \mathbf{p} + \mathbf{R} \cdot {}^b \dot{\mathbf{p}} + {}^e \mathbf{v}$$



$${}^b \dot{\mathbf{p}} = -{}^b \mathbf{v} - \begin{bmatrix} {}^b \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}_x {}^b \mathbf{p}$$



$$\begin{cases} \dot{p}_{x_b} = -v_{x_b} - \omega_{y_b} p_{z_b} + \omega_{z_b} p_{y_b} \\ \dot{p}_{y_b} = -v_{y_b} - \omega_{z_b} p_{x_b} + \omega_{x_b} p_{z_b} \\ \dot{p}_{z_b} = -v_{z_b} - \omega_{x_b} p_{y_b} + \omega_{y_b} p_{x_b} \end{cases}$$



# 3. 速度估计

## □ 基于光流的速度估计方法

### (2) 光流与机体速度关系

最终写成抽象形式为



$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\bar{p}}_x \\ \dot{\bar{p}}_y \end{bmatrix}}_{\dot{\bar{\mathbf{p}}}} = \frac{1}{p_{z_b}} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & \bar{p}_x \\ 0 & -1 & \bar{p}_y \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}(\bar{\mathbf{p}})} \mathbf{v} + \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{p}_x \bar{p}_y & -(1 + \bar{p}_x^2) & \bar{p}_y \\ (1 + \bar{p}_y^2) & -\bar{p}_x \bar{p}_y & -\bar{p}_x \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}(\bar{\mathbf{p}})} \mathbf{\omega}$$

对于地面P点，图像点为  $\bar{\mathbf{p}}$ ，光流  $\dot{\bar{\mathbf{p}}}$  可以通过光流解算方法获得（图像处理方式）

${}^b\mathbf{\omega}$  可以通过三轴陀螺仪测量得到，而  $p_{z_b}$  可以通过超声波测距模块获得

$$\begin{cases} {}^e\mathbf{p} = \mathbf{R} {}^b\mathbf{p} + {}^e\mathbf{T}_{o_b} \\ \mathbf{e}_3^T {}^e\mathbf{T}_{o_b} = d_{\text{sonar}} \cos \theta \cos \phi \\ p_{z_e} = \mathbf{e}_3^T {}^e\mathbf{p} = 0 \end{cases}$$



$$p_{z_b} = -\frac{d_{\text{sonar}} \cos \theta \cos \phi}{\mathbf{e}_3^T \mathbf{R} [\bar{p}_x, \bar{p}_y, 1]^T}$$



## 3. 速度估计

### □ 基于光流的速度估计方法

#### (3) 基于光流的速度估计

如果有  $M$  个可求光流的图像点，我们有

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{p}}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\bar{\mathbf{p}}}_M \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{p}}_a} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}(\bar{\mathbf{p}}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{A}(\bar{\mathbf{p}}_M) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_a} \cdot {}^b \mathbf{v} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}(\bar{\mathbf{p}}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{B}(\bar{\mathbf{p}}_M) \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_a} \cdot {}^b \boldsymbol{\omega}$$

那么  ${}^b \mathbf{v}$  的估计可采用以下方式得到

$${}^b \hat{\mathbf{v}} = \left( \mathbf{A}_a^T \mathbf{A}_a \right)^{-1} \cdot \mathbf{A}_a^T \cdot \left[ \bar{\mathbf{p}}_a - \mathbf{B}_a \left( {}^b \boldsymbol{\omega}_m - \hat{\mathbf{b}}_g \right) \right]$$

其中， ${}^b \boldsymbol{\omega}_m - \hat{\mathbf{b}}_g$  为消除偏差后的测量角速度。

- 基于光流的设计存在着以下需要考虑的问题：
- (1) 陀螺仪、光流测量、高度测量的周期是不相同的，因此需要考虑它们测量值的时间对准；
  - (2) 焦距长度不确定以及镜头畸变；
  - (3) 地面不平整或背景在移动等；
  - (4) 光流误匹配的处理。



## 3. 速度估计

### □ 基于气动阻力模型的速度估计方法

参见第六讲多旋翼的运动模型。引入由于螺旋桨挥舞产生的阻力，并简化，我们可以得到多旋翼气动阻力模型如下

$$\dot{v}_{x_b} = -g \sin \theta - \frac{k_{\text{drag}}}{m} v_{x_b} + n_{a_x}$$

$$\dot{v}_{y_b} = g \cos \theta \sin \phi - \frac{k_{\text{drag}}}{m} v_{y_b} + n_{a_y}$$

其中， $n_{a_x}, n_{a_y}$  表示相应的噪声。 $\dot{v}_{x_b}, \dot{v}_{y_b}$  就是表示在机体坐标系下的加速度。





# 3. 速度估计

## 基于气动阻力模型的速度估计方法

过程模型:

欧拉角变化率和角速度之间的关系

$$\dot{\phi} = (\omega_{x_b m} - b_{g_x} - n_{g_x}) + (\omega_{y_b m} - b_{g_y} - n_{g_y}) \tan \theta \sin \phi + (\omega_{z_b m} - b_{g_z} - n_{g_z}) \tan \theta \cos \phi$$

$$\dot{\theta} = (\omega_{y_b m} - b_{g_z} - n_{g_z}) \cos \phi - (\omega_{z_b m} - b_{g_z} - n_{g_z}) \sin \phi$$

$$\dot{b}_{g_x} = n_{b_{g_x}}$$

$$\dot{b}_{g_y} = n_{b_{g_y}}$$

$$\dot{b}_{g_z} = n_{b_{g_z}}$$

$$\dot{v}_{x_b} = -g \sin \theta - \frac{k_{drag}}{m} v_{x_b} + n_{a_x}$$

$$\dot{v}_{y_b} = g \cos \theta \sin \phi - \frac{k_{drag}}{m} v_{y_b} + n_{a_y}$$

角速度替换为:

其中

$${}^b \boldsymbol{\omega} = {}^b \boldsymbol{\omega}_m - \mathbf{b}_g - \mathbf{n}_g$$

$$\dot{\mathbf{b}}_g = \mathbf{n}_{b_g}$$

$$\mathbf{b}_g = [b_{g_x} \quad b_{g_y} \quad b_{g_z}]^T$$

$$\mathbf{n}_g = [n_{g_x} \quad n_{g_y} \quad n_{g_z}]^T$$

$$\mathbf{n}_{b_g} = [n_{b_{g_x}} \quad n_{b_{g_y}} \quad n_{b_{g_z}}]^T$$

观测模型:

$$\begin{bmatrix} a_{x_b m} \\ a_{y_b m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_{drag}}{m} v_{x_b} + n_{a_x m} \\ -\frac{k_{drag}}{m} v_{y_b} + n_{a_y m} \end{bmatrix}$$

三轴加速度计测量

以上模型是非线性模型，需要采用扩展卡尔曼滤波器。

[8] Abeywardena D, Kodagoda S, Dissanayake G, et al. Improved State Estimation in Quadrotor MAVs: A Novel Drift-Free Velocity Estimator[J]. Robotics & Automation Magazine, IEEE, 2013, 20(4): 32-39.



## 3. 速度估计

### □ 基于气动阻力模型的速度估计方法

多旋翼的小角度假设即  $\theta \approx \phi \approx 0, \psi \approx \psi_d, \dot{\theta} \approx \dot{\phi} \approx \dot{\psi} \approx 0$ , 所以忽略高阶小量可以得到[9]

- 线性过程模型:

$$\dot{\theta} = \omega_{x_b m} - b_{g_x} - n_{g_x}$$

$$\dot{\phi} = \omega_{y_b m} - b_{g_y} - n_{g_y}$$

$$\dot{b}_{g_x} = n_{b_{g_x}}$$

$$\dot{b}_{g_y} = n_{b_{g_y}}$$

$$\dot{v}_{x_b} = -g\theta - \frac{k_{\text{drag}}}{m} v_{x_b} + n_{a_x}$$

$$\dot{v}_{y_b} = g\phi - \frac{k_{\text{drag}}}{m} v_{y_b} + n_{a_y}$$

- 建立线性观测模型如下:

$$\begin{bmatrix} a_{x_b m} \\ a_{y_b m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_{\text{drag}}}{m} v_{x_b} + n_{a_x m} \\ -\frac{k_{\text{drag}}}{m} v_{y_b} + n_{a_y m} \end{bmatrix}$$

以上模型是线性模型，  
采用卡尔曼滤波器即可。

[9] Leishman R C, Macdonald J C, Beard R W, et al. Quadrotors and accelerometers: State estimation with an improved dynamic model[J]. Control Systems, IEEE, 2014, 34(1): 28-41.



## 4. 障碍估计

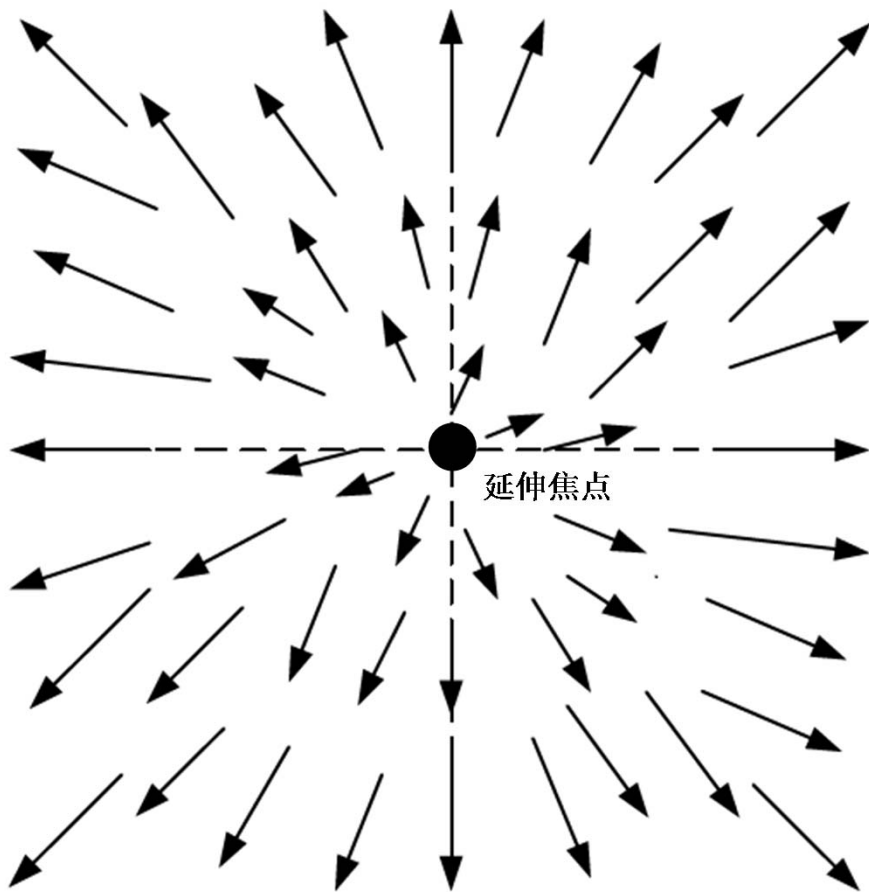


图9.9 延伸焦点示意图

本节主要是依据**光流原理**进行避障操作。光流中包含三维场景丰富的运动信息以及结构信息，利用光流可以进行三维重建。本文仅从光流中恢复出相对深度，即碰撞时间，然后利用碰撞时间指导飞行器避障。而要计算碰撞时间，一般需要先计算延伸焦点。



# 4. 障碍估计

## □ 计算延伸焦点

光流与机体速度关系为

$$\dot{\bar{p}} = \mathbf{A}(\bar{p}) \cdot {}^b \mathbf{v} + \mathbf{B}(\bar{p}) \cdot {}^b \boldsymbol{\omega}$$

$$\Delta \bar{p} = \dot{\bar{p}} - \mathbf{B}(\bar{p}) \cdot {}^b \boldsymbol{\omega}$$

$$\Delta \bar{p} = \mathbf{A}(\bar{p}) \cdot {}^b \mathbf{v}$$

令  $\Delta \bar{p} = [\Delta \bar{p}_x \quad \Delta \bar{p}_y]^T$ 。展开上式得到

$$\frac{\Delta \bar{p}_x}{\Delta \bar{p}_y} = \frac{\bar{p}_x - c_x}{\bar{p}_y - c_y}$$

其中  $c_x = v_{x_b} / v_{z_b}$ ,  $c_y = v_{y_b} / v_{z_b}$ 。实际上，由于光流和角速率都可能带有一定的噪声，因此我们需要通过多个点对应的直线的共同交点来求解。假定  $p_i, i=1, \dots, N$  为选定的点，则有：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \bar{p}_{y,1} & -\Delta \bar{p}_{x,1} \\ \Delta \bar{p}_{y,2} & -\Delta \bar{p}_{x,2} \\ \vdots & \vdots \\ \Delta \bar{p}_{y,N} & -\Delta \bar{p}_{x,N} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{p}_{x,1} \Delta \bar{p}_{y,1} - \bar{p}_{y,1} \Delta \bar{p}_{x,1} \\ \bar{p}_{x,2} \Delta \bar{p}_{y,2} - \bar{p}_{y,2} \Delta \bar{p}_{x,2} \\ \vdots \\ \bar{p}_{x,N} \Delta \bar{p}_{y,N} - \bar{p}_{y,N} \Delta \bar{p}_{x,N} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{c}_x \\ \hat{c}_y \end{bmatrix} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{b})$$

最小二乘解



## 4. 障碍估计

### □ 计算碰撞时间

从单目图像序列中无法恢复场景的绝对深度，但从光流中可以计算得到碰撞时间。场景中某一点的碰撞时间是指当飞行器保持当前速度不变时，到达该点所需的时间。碰撞时间的数学定义为：

另外一方面

$$\Delta \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{A}(\bar{\mathbf{p}})^b \mathbf{v}$$
$$t_{\text{TTC}} = \frac{p_{z_b}}{v_{z_b}}$$
$$\Delta \bar{p}_x = \frac{1}{p_{z_b}} (-v_{x_b} + \bar{p}_x v_{z_b})$$
$$\Delta \bar{p}_y = \frac{1}{p_{z_b}} (-v_{y_b} + \bar{p}_y v_{z_b})$$
$$\left. \begin{array}{l} \Delta \bar{p}_x t_{\text{TTC}} = \bar{p}_x - c_x \\ \Delta \bar{p}_y t_{\text{TTC}} = \bar{p}_y - c_y \end{array} \right\}$$

最小二乘解

$$t_{\text{TTC}} = \sqrt{\frac{(\bar{p}_x - \hat{c}_x)^2 + (\bar{p}_y - \hat{c}_y)^2}{\Delta \bar{p}_x^2 + \Delta \bar{p}_y^2}}$$



## 4. 障碍估计

### □ 计算碰撞时间

可以看出，光流的方向大概一致，且光流值较大的点其碰撞时间较小。说明更加容易发生碰撞。然而，计算不总是与实际情况一致，会存在很多误匹配点对，因此基于光流避障的鲁棒性问题有待进一步研究。



(a) 光流

(b) 碰撞时间

图9.10 光流及碰撞时间示意图





## 5. 本讲小结

1. 运动估计是控制的基础，实际上它要比控制重要得多和复杂得多。
2. 目前，运动信息估计和周围环境的感知仍然是目前多旋翼领域研究的热点，特别是基于视觉的信息融合。
3. 除了以上介绍的内容，真实的运动估计还需要考虑许多实际的问题[10]:
  - (1) **处理器的使用**。因为机载处理器的运算能力有限，提供给估计的时间是有限的，所以如何高效地利用是要考虑的第一个问题。
  - (2) **异常数据**。在APM里面有90%的工作是在处理这些极端情况。
  - (3) **测量不同步和延时**。实际中传感器提供信息的频率各不相同，而且也不可能是整倍数的关系。不仅如此，测量本身也存在未知延迟。

[10] Paul Riseborough. Application of Data Fusion to Aerial Robotics. March 24, 2015, available online at <http://thirty5tech.com/vid/watch/Z3Qpi1Rx6HM>.





# 资源

---

(1) 可靠飞行控制研究组主页课程中心(全部课件下载)

<http://rfly.buaa.edu.cn/course>

(2) 关注可靠飞行控制研究组公众号 buaarfly(文章、资讯等)

(3) 多旋翼设计与控制交流QQ群:183613048

(4) 视频课程(MOOC)同步发布, 网易云课堂搜索 “多旋翼”

<http://study.163.com/course/introduction/1003715005.htm>

(5) 同名中文书本教材《多旋翼飞行器设计与控制》即将在电子工业出版社出版, 敬请期待

(6) 有疑问可联系课程总助教戴训华, 邮箱: [dai@buaa.edu.cn](mailto:dai@buaa.edu.cn)

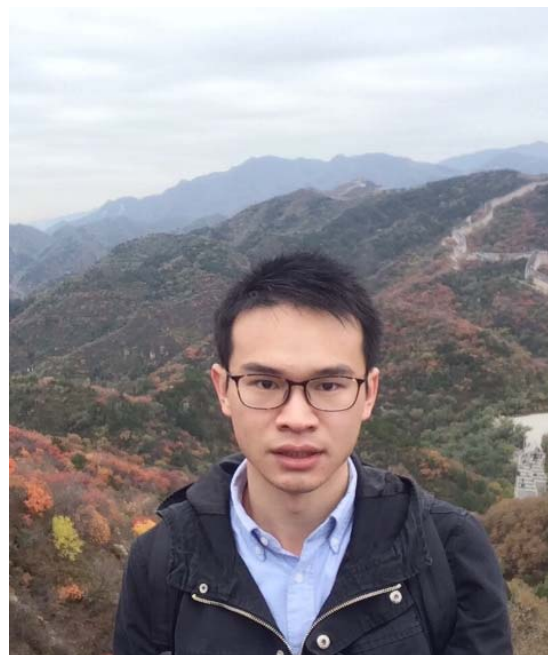


# 致谢

## 感谢控制组同学



邓恒



戴训华

为本节课程准备作出的贡献。



---

# 谢谢！



---

# 多旋翼飞行器设计与控制

## 第十讲 稳定性和可控性

全权 副教授

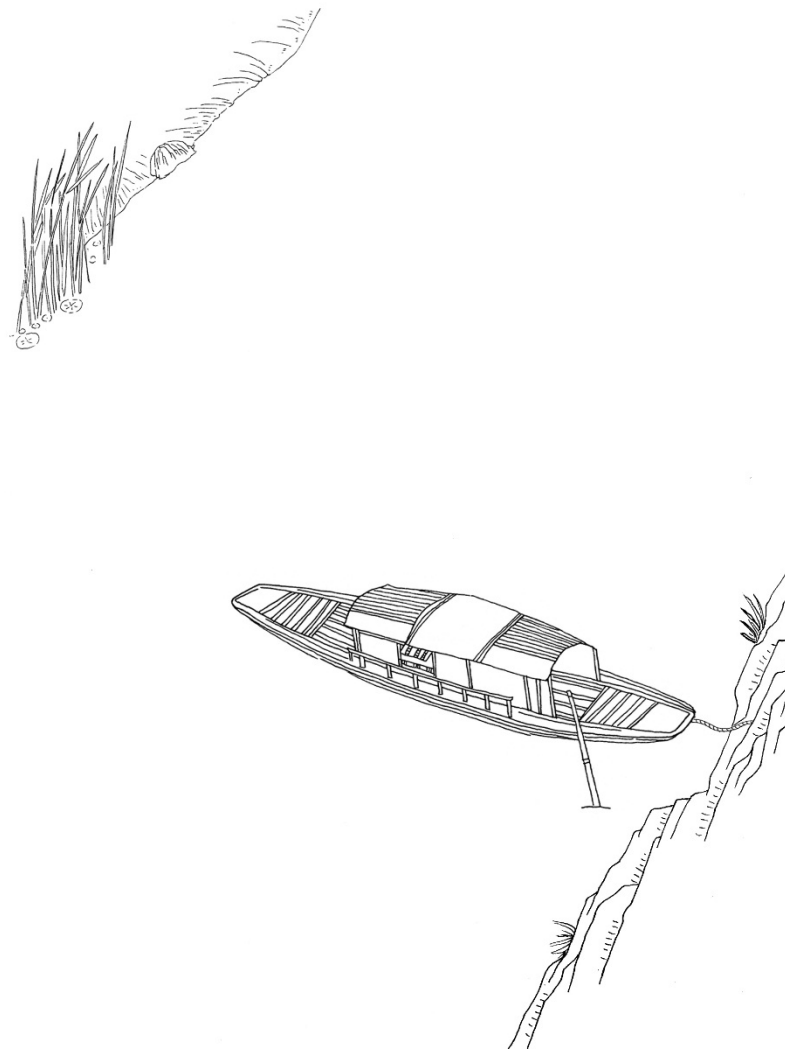
qq\_buaa@buaa.edu.cn

自动化科学与电气工程学院

北京航空航天大学



# 东方智慧



舟自横



# 核心问题

---

多旋翼为什么不稳定，以及多旋翼的可  
控度如何？



# 大纲

---

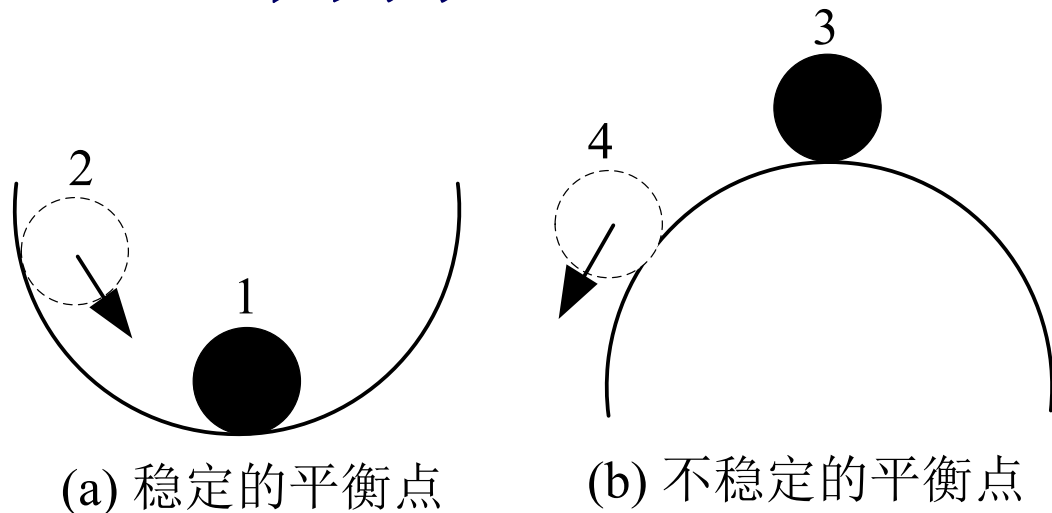
1. 稳定性的定义
2. 稳定性判据
3. 可控性的基本概念
4. 多旋翼飞行器的可控性
5. 本讲小结





# 1. 稳定性的定义

## □ 一个例子



稳态位置1和3处的小球受到小的扰动后，是否依然处于稳态？

图10.1 稳定性的例子

讨论稳定首先需要明确的是被讨论对象是动态系统，其次要明确该动态系统的平衡点。图中1和3处是平衡点，2和4处不是平衡点，因此我们只讨论1和3位置处的稳定性



# 1. 稳定性的定义

## □ 标准形式

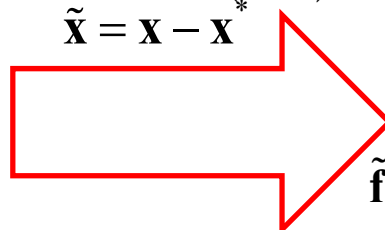
这里用微分方程来描述动态系统。一个带输入的非线性动力系统通常可以用如下的非线性微分方程描述

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ &+ \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{g}(t, \mathbf{x})) \\ &\triangleq \mathbf{f}_c(t, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^* &= \mathbf{0} = \mathbf{f}_c(t, \mathbf{x}^*) \\ \tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \end{aligned}$$



转化后的系统  
平衡点是0

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{f}}_c(t, \tilde{\mathbf{x}})$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_c(t, \tilde{\mathbf{x}}) \triangleq \mathbf{f}_c(t, \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^*) - \mathbf{f}_c(t, \mathbf{x}^*)$$

其中 $\mathbf{x}$ 是状态，而 $\mathbf{u}$ 表示控制输入是状态与时间的函数。因此，不失一般性，而且仅考虑线性时不变系统，

对动态系统  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ，假设其平衡点为0，以此讨论稳定性



# 1. 稳定性的定义

## □ 三种稳定性定义

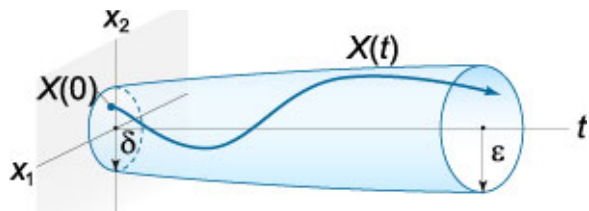
对动态系统  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ，假设其平衡点为  $\mathbf{x} = \mathbf{0}_{n \times 1}$ 。则有以下稳定性定义[1]：

定义10.1. 如果  $\forall R \in \mathbb{R}_+, \exists r \in \mathbb{R}_+, \|\mathbf{x}(0)\| < r \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < R, t \in \mathbb{R}_+$ ，则平衡点  $\mathbf{x} = \mathbf{0}_{n \times 1}$  是稳定的（李雅普诺夫稳定）。

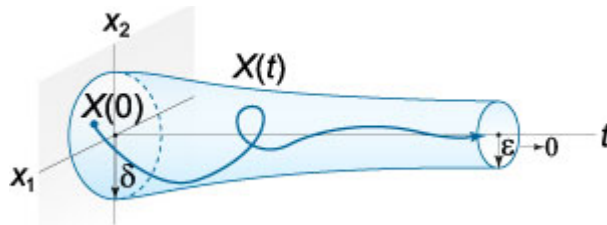
定义10.2. 如果  $\exists r \in \mathbb{R}_+, \|\mathbf{x}(0)\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$ ，则平衡点  $\mathbf{x} = \mathbf{0}_{n \times 1}$  是渐近稳定的。

定义10.3. 如果  $\exists \alpha, \lambda, r \in \mathbb{R}_+$ ，使得  $\forall t \in \mathbb{R}_+, \|\mathbf{x}(t)\| \leq \alpha \|\mathbf{x}(0)\| e^{-\lambda t}, \mathbf{x}(0) \in B(\mathbf{0}, r)$ ，则平衡点  $\mathbf{x} = \mathbf{0}_{n \times 1}$  指数稳定的。

李雅普诺夫稳定



渐近稳定



指数稳定

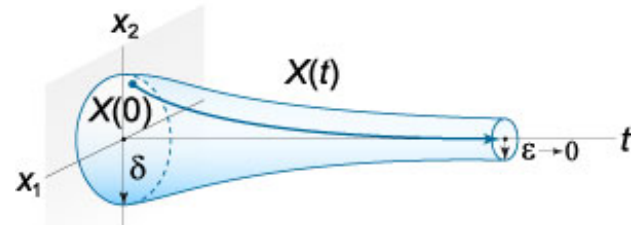


图10.2 不同的稳定性 图片来源<http://www.math24.net/basic-concepts-of-stability-theory.html>

[1] Slotine J-J, Li W. Applied Nonlinear Control. New Jersey, USA: Prentice Hall, 1991



# 1. 稳定性的定义

## □ 三种稳定性定义的关系

这三个定义的关系是指数稳定  $\subseteq$  渐近稳定  $\subseteq$  稳定。

$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{t}$   渐近稳定而非指数稳定

局部稳定与初始状态相关，也就是跟  $\|\mathbf{x}(0)\| < r$  中的  $r$  相关。而全局稳定意味着  $\mathbf{x}(0)$  在任何地方都具备要求的性质，也就是跟以上定义的  $r$  无关或  $r = \infty$ 。



## 2. 稳定性判据

### □ 多旋翼是否静稳定的？

考虑第六讲中模型的简化形式，不考虑  ${}^b\omega \times (J^b\omega) + G_a$  等：

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} &= {}^b\omega \\ {}^b\dot{\omega} &= J^{-1}\tau \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{\Theta} &= {}^b\omega \\ {}^b\dot{\omega} &= \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{aligned}$$

归纳为状态方程形式：

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z}$$

其中：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \Theta \\ {}^b\omega \end{bmatrix}$$

状态方程的解为：

$$\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{z}(0)$$

**固定翼**主要不仅受到螺旋桨的拉力和重力，还受到空气的阻力和升力，其中升力跟自身的姿态是相关的。它会因固定翼姿态的变化而变化，因此**可以形成一种反馈调节姿态**。这就是为什么多旋翼需要自驾仪才能够使飞机易于受控，而对于固定翼航模，则不需要自驾仪。

基于Jordan标准型去分解矩阵指数函数，可知解是不稳定的（特征根都为零）。



## 2. 稳定性判据

### □ 不变集原理

#### (1) 定义

如果从集合 $S$ 中一个点出发的系统轨线永远停留在 $S$ 中，那么称这一个集合 $S$ 称为一个动态系统的**不变集**。

#### (2) 局部不变集定理

考虑自治非线性系统  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ，其中 $\mathbf{f}$ 是连续的。如果存在具有一阶连续偏导数的标量函数 $V(\mathbf{x})$ ，使得：

- 1) 对于任意的  $l \in \mathbb{R}_+$ ，由  $V(\mathbf{x}) < l$  定义的  $\Omega_l$  是一个有界区域；
- 2)  $\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \partial V(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x} \leq 0, \mathbf{x} \in \Omega_l$

假设 $R$ 为 $\Omega_l$ 内使 $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ 的所有点集合， $M$ 为 $R$ 中的最大不变集，那么当时间 $t \rightarrow \infty$ 时，从 $\Omega_l$ 出发的每一个解都趋于 $M$

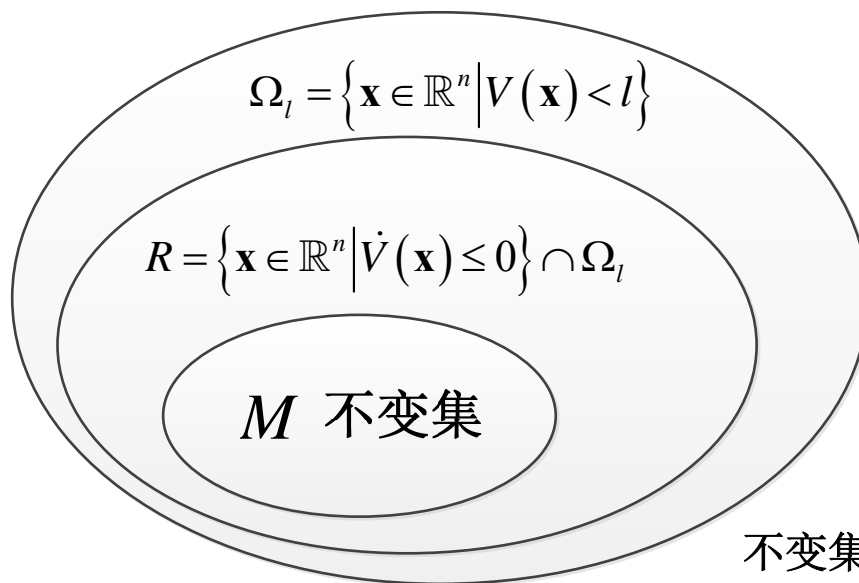


## 2. 稳定性判据

### □ 不变集原理

#### (2) 局部不变集定理

假设  $R$  为  $\Omega_l$  内使  $\dot{V}(\mathbf{x})=0$  的所有点集合,  $M$  为  $R$  中的最大不变集, 那么当时间  $t \rightarrow \infty$  时, 从  $\Omega_l$  出发的每一个解都趋于  $M$ .







## 2. 稳定性判据

### □ 不变集原理

#### (2) 局部不变集定理：举例

考虑系统： 
$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -x - v \end{cases}$$

定义李雅普诺夫函数并求导：

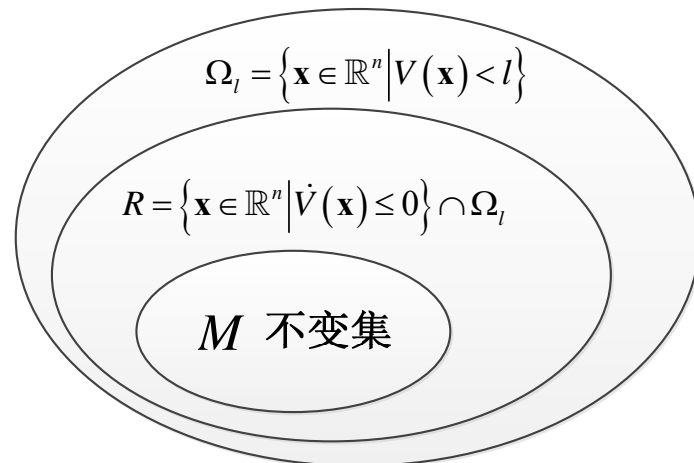
$$V(x) = \frac{1}{2}((x+v)^2 + v^2)$$

$$\dot{V}(x) = (x+v)(-x) + v(-x-v) = -(x+v)^2$$

得到集合  $R$ ：

$$R = \{(x, v) \mid x+v=0\} \cap \Omega_l$$

$$x+v=0 \Rightarrow \dot{x} = -x, \dot{v} = 0 \Rightarrow x=0, v=0$$



$R$ 中最大不变集：

$\Rightarrow M = \{(x, v) \mid x=0, v=0\}$

最大不变集  $M$  中只包含平衡点  $0$ ，所以系统渐近稳定



## 2. 稳定性判据

### □ 不变集原理

#### (3) 全局不变集定理

考虑自治非线性系统  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ，其中  $\mathbf{f}$  是连续的。如果存在具有一阶连续偏导数的标量函数  $V(\mathbf{x})$ ，使得：

1)  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$

$V$ 不需要为正数

2)  $\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \partial V(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x} \leq 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

假设  $R$  状态空间内使  $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$  的所有点集合,  $M$  为  $R$  中的最大不变集, 那么当时间  $t \rightarrow \infty$  时, 所有的解都全局渐进收敛于  $M$ 。



## 2. 稳定性判据

### □ 一个简单系统的稳定性

考虑如下的二阶动态系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{u}$$

假设  $\mathbf{u} = -k_1(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{x}}_d) - k_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d)$  为PD控制器，则系统可以整理为

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z}$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{x}_d \\ \mathbf{v} - \dot{\mathbf{x}}_d \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_n \\ -k_2 \mathbf{I}_n & -k_1 \mathbf{I}_n \end{bmatrix}$$

定理: 如果  $k_1, k_2 > 0$  那么  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{z}(t)\| = 0$ . 进一步的,  $\mathbf{z} = \mathbf{0}_{2n \times 1}$  **全局指数稳定**.

**证明Tips:**  $\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{z}(0)$ ,  $\mathbf{A}$ 的特征值均有负实部, 基于Jordan标准型去分解矩阵指数函数, 可以得到定理中的结论。



## 2. 稳定性判据

### □ 一个带饱和系统的稳定性

考虑如下的二阶动态系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \text{sat}_{\text{gd}}(\mathbf{u}, a)$$

假设  $\mathbf{u} = -k_1(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{x}}_d) - k_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d)$  为PD控制器，并且  $\text{sat}_{\text{gd}}(\mathbf{u}, a) = \kappa_a(\mathbf{u})\mathbf{u}$ ,

$$\kappa_a(\mathbf{u}) = \begin{cases} 1, & \|\mathbf{u}\|_{\infty} \leq a \\ \frac{a}{\|\mathbf{u}\|_{\infty}}, & \|\mathbf{u}\|_{\infty} > a \end{cases}, a \in \mathbb{R}_+$$

其中  $\mathbf{u} \triangleq [u_1 \ \cdots \ u_n]^T \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{u}\|_{\infty} \triangleq \max(|u_1|, \dots, |u_n|)$

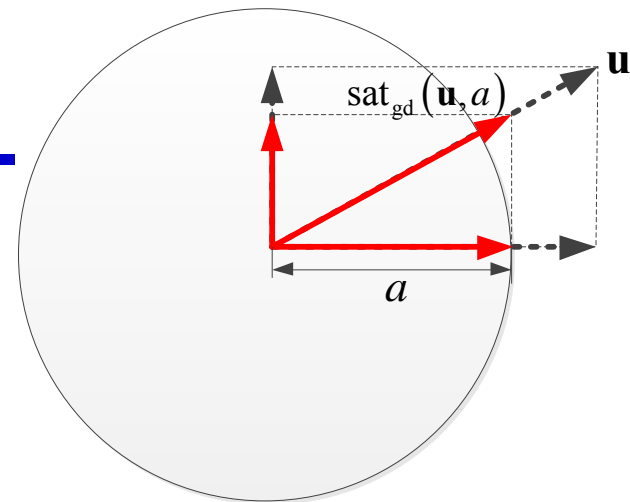


图10.3 保方向的含义

一些开源自驾仪，如PX4，采用了保方向饱和函数，其与 $\mathbf{u}$ 方向一致。



## 2. 稳定性判据

### □ 一个带饱和系统的稳定性

定理:

如果  $k_1, k_2 > 0$  那么  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{z}(t)\| = 0$ . 进一步的,  $\mathbf{z} = \mathbf{0}_{2n \times 1}$  局部指数稳定。

证明:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = \text{sat}_{\text{gd}}(\mathbf{u}, a) \\ \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d \\ \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \dot{\mathbf{x}}_d \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{v}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{v}}} = \kappa_a(\mathbf{u})\mathbf{u} \end{cases}$$

$C_u$  是  $\mathbf{u}(t)$  定义的光滑曲线,  
如果是标量  $u(t)$ , 则

$$\int_{C_u} d\mathbf{u} \triangleq \int_0^{u(t)} ds$$

定义李雅普诺夫函数, 并求导

$$V = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{v}}^T \tilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{k_2} \int_{C_u} \kappa_a(\mathbf{u}) \mathbf{u}^T d\mathbf{u} \Rightarrow \dot{V} = \tilde{\mathbf{v}}^T \dot{\tilde{\mathbf{v}}} + \frac{1}{k_2} \kappa_a(\mathbf{u}) \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{u}} = -\frac{k_1}{k_2} \kappa_a^2(\mathbf{u}) \mathbf{u}^T \mathbf{u} \leq 0$$

求助不变集原理!



## 2. 稳定性判据

### □ 一个带饱和系统的稳定性

定理:

如果  $k_1, k_2 > 0$  那么  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t)\| = 0$ . 进一步的,  $z = \mathbf{0}_{2n \times 1}$  局部指数稳定。

证明:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = \text{sat}_{\text{gd}}(\mathbf{u}, a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{v}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{v}}} = \kappa_a(\mathbf{u})\mathbf{u} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d \\ \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \dot{\mathbf{x}}_d \end{cases}$$

指数稳定一般要求李雅普诺夫函数满足类似形式

$$V(\mathbf{x}) \geq 0$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\lambda V(\mathbf{x}), \lambda \in \mathbb{R}_+$$

以下不满足指数稳定条件!

定义李雅普诺夫函数, 并求导

$$V = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{v}}^T \tilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{k_2} \int_{C_u} \kappa_a(\mathbf{u}) \mathbf{u}^T \mathbf{u} \Rightarrow \dot{V} = \tilde{\mathbf{v}}^T \dot{\tilde{\mathbf{v}}} + \frac{1}{k_2} \kappa_a(\mathbf{u}) \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{u}} = -\frac{k_1}{k_2} \kappa_a^2(\mathbf{u}) \mathbf{u}^T \mathbf{u} \leq 0$$

求助不变集原理!



## 2. 稳定性判据

### □ 一个带饱和系统的稳定性

(1) 最大不变集。  $\dot{V} = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}_{n \times 1} \Rightarrow -k_1 \tilde{\mathbf{v}} - k_2 \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}_{n \times 1} \Rightarrow \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{v}} = -\frac{k_1}{k_2} \tilde{\mathbf{x}}$

只有一个稳定的平衡点:  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}_{n \times 1}$  , 因此  $-k_1 \tilde{\mathbf{v}} - k_2 \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}_{n \times 1} \Rightarrow \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{0}_{n \times 1}$

换句话说最大不变集  $M$  中只包含一个点:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}_{n \times 1}, \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{0}_{n \times 1}$$

(2) 稳定性。根据局部不变集定理,  $\mathbf{z} = \mathbf{0}_{2n \times 1}$  局部渐进稳定。由

于  $\|V\| \rightarrow \infty \Rightarrow \|\mathbf{z}\| \rightarrow \infty$  , 因此  $\mathbf{z} = \mathbf{0}_{2n \times 1}$  也全局渐进稳定。

在系统原点  $\mathbf{z} = \mathbf{0}_{2n \times 1}$  的邻域内, 控制量  $\mathbf{u}$  不受约束, 因此根据上一个例子

可知系统原点局部指数稳定。





### 3. 可控性的基本概念



1983年5月1日，以色列国防军空军的两架F-15鹰式战斗机和四架A-4N“天鹰”战机在以色列和巴勒斯坦边境地区的内盖夫沙漠上空进行了一次模拟空战格斗训练。其中一架机号为957的F-15战机被用于新飞行员的适应性训练，在训练中与一架A-4N相撞，A-4N当场起火爆炸，飞行员弹射逃生。F-15失去一侧机翼，但并未坠毁，飞行员坚持将单翼的战机飞回基地并成功降落，成为航空史上的奇迹。

- 飞行员牛
- 姿态可控

只剩一个机翼还能飞回来！

来自 <https://theaviationist.com/2014/09/15/f-15-lands-with-one-wing/>



## 3. 可控性的基本概念

### □ 经典可控性

考虑如下的线性时不变系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$$

#### (1) 定义

如果对任意的  $\mathbf{x}(t_0)$ ，存在定义在时间区间  $[t_0, t_1]$  上的  $\mathbf{u}_{[t_0, t_1]}$  可以将  $\mathbf{x}(t_0)$  控制到原点，则称系统可控。反之，系统不可控。

#### (2) 经典可控性判据：可控性矩阵满秩

可控性矩阵定义为： $C(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$

系统可控的充要条件是： $\text{rank}C(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = n$



## 3. 可控性的基本概念

### □ 一个简单的例子

考虑如下的线性时不变系统，其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow C(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此， $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 组成的系统不可控，但是

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0)$$

趋近于0，**那这是否引出矛盾了呢？** 答案是否定的！因为虽然系统的解最后趋于零，但收敛时间是无限的，因此系统在有限时间内并不可控。

因此，离散时间系统除了可控性，还有可达性。



# 3. 可控性的基本概念

## □ 经典可控性判据的局限性

考虑如下的线性时不变系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \mathbf{u} \in \Omega$$

经典可控性判据要求控制量的零点为控制量约束集的**内点**。

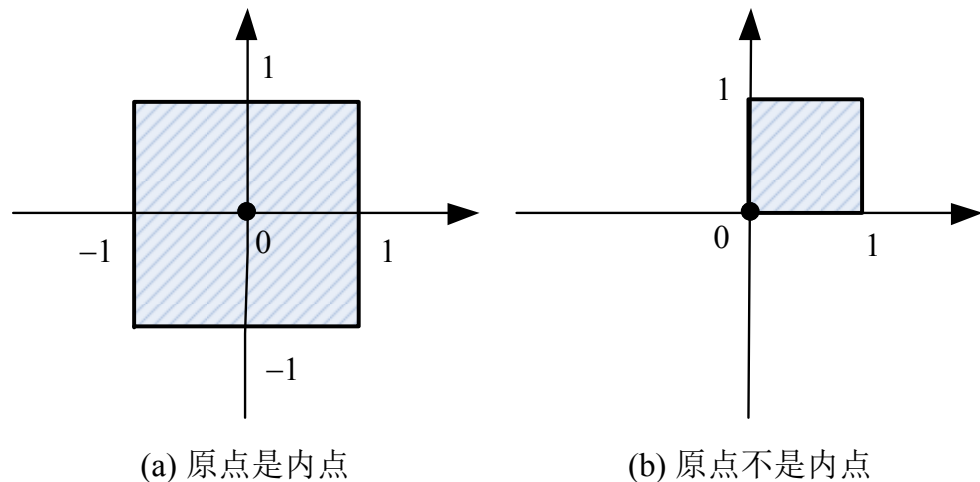


图10.4 内点示意图

经典可控性局限性例子（控制量零点非内点）

$$\dot{x} = x + u, u \leq 0$$

可控性矩阵满秩，经典可控性成立。然而，如果系统初始状态无论离从负实轴原点多么近，比如：**-0.0000001**，无论哪种控制量会将系统控制到负无穷远处！不可控！



# 3. 可控性的基本概念

## □ 正可控性

考虑如下的线性时不变系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \mathbf{u} \in \Omega$$

(1) 对约束集作限制，可控性的定义不变

如果对任意的  $\mathbf{x}(t_0)$ ，存在定义在时间区间  $[t_0, t_1]$  上的容许控制  $\mathbf{u}_{[t_0, t_1]}$  可以将  $\mathbf{x}(t_0)$  控制到原点，则称系统可控。反之，系统不可控。

(2) 可控性判定定理（充分必要条件） [3]

1) 可控性矩阵  $C(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  满秩；

2) 不存在  $\mathbf{A}^T$  的实特征向量  $\mathbf{v}$  使得  $\mathbf{v}^T \mathbf{B}\mathbf{u} \leq 0$  对所有的  $\mathbf{u} \in \Omega$  成立

物理意义?

[3] Brammer R F. Controllability in linear Autonomous systems with positive controllers. SIAM Journal on Control, 1972, 10(2):779-805



# 3. 可控性的基本概念

## □ 正可控性

(3) 条件2)的必要性解释

不存在  $A^T$  的实特征向量  $v$  使得  $v^T B u \leq 0$  对所有的  $u \in \Omega$  成立

举个反例（以上条件为假-》不可控）：

存在  $A^T$  的实特征向量  $v_1$  使得  $v_1^T B u \leq 0$  对所有的  $u \in \Omega$  成立

那么  $v_1^T \dot{x} = v_1^T A x + v_1^T B u \xrightarrow{y = v_1^T x} \dot{y} = \lambda y + v_1^T B u$

如果  $\lambda > 0, v_1^T B u \leq 0$ ，则系统状态会趋于负无穷，不可控。



# 4. 多旋翼飞行器的可控性

单升力方向



## □ 多旋翼模型

### (1) 悬停模型

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(\underbrace{\mathbf{u}_f - \mathbf{g}}_{\mathbf{u}})$$

### (2) 状态与系数矩阵

$$\mathbf{x} = [h \ \phi \ \theta \ \psi \ v_z \ \omega_{x_b} \ \omega_{y_b} \ \omega_{z_b}]^T \in \mathbb{R}^8$$

$$\mathbf{u}_f = [f \ \tau_x \ \tau_y \ \tau_z]^T \in \mathbb{R}^4$$

$$\mathbf{g} = [mg \ 0 \ 0 \ 0]^T \in \mathbb{R}^4$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 4} & \mathbf{I}_4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_f^{-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8 \times 4}$$

$$\mathbf{J}_f = \text{diag}(-m, J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

### (3) 控制量约束

所有旋翼的升力向量:

$$\mathbf{f} = [T_1 \ \dots \ T_{n_r}]^T, \mathbf{f} = U_f = \prod_{i=1}^{n_r} [0, K_i]$$

机体力和力矩向量:

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{B}_f \mathbf{f}, \Omega = \{\mathbf{u}_f \mid \mathbf{u}_f = \mathbf{B}_f \mathbf{f}, \mathbf{f} \in U_f\}$$

系统控制输入向量:

$$U = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u} = \mathbf{u}_f - \mathbf{g}, \mathbf{u}_f \in \Omega\}$$

[4] Du G-X, Quan Q, Yang B, Cai K-Y. Controllability analysis for multirotor helicopter rotor degradation and failure. AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2015, 38(5): 978-984





# 4. 多旋翼飞行器的可控性

## □ 正可控性判定方法

控制能力指标定义（**可控度**）：

$$\rho(\mathbf{g}, \partial\Omega) = \min \left\{ \|\mathbf{g} - \mathbf{u}_f\|, \mathbf{u}_f \in \partial\Omega \right\}$$

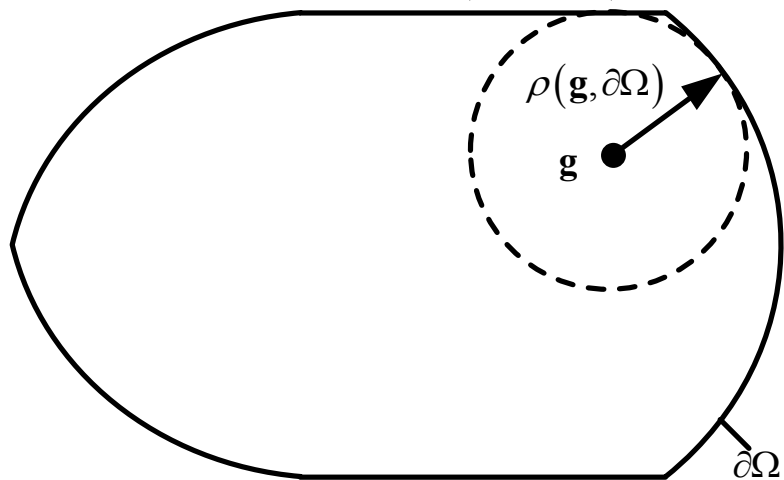


图10.5 可控度示意图

悬停模型

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} \underbrace{(\mathbf{u}_f - \mathbf{g})}_{\mathbf{u}}$$

如果  $\rho(\mathbf{g}, \partial\Omega) > 0$  ,  
说明  $\mathbf{g}$  是约束集  $\Omega$  的  
内点

[5] Du G-X. Research on the Controllability Quantification of Multirotor Systems.

Doctoral Thesis. Beihang University, China, 2015. [In Chinese]



## 4. 多旋翼飞行器的可控性

### □ 正可控性判定方法

下列三个条件等价：

- 1)  $\rho(\mathbf{g}, \partial\Omega) > 0$
- 2) 不存在  $\mathbf{A}^T$  的实特征向量  $\mathbf{v}$  使得  $\mathbf{v}^T \mathbf{B}\mathbf{u} \leq 0$  对所有的  $\mathbf{u} \in \Omega$  成立
- 3)  $\mathbf{g}$  是  $\Omega$  的内点

多旋翼的悬停模态可控性矩阵  $C(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  满秩，那么多旋翼的可控性判定条件为

$$\rho(\mathbf{g}, \partial\Omega) > 0$$

计算工具箱参考：

A Matlab Toolbox for Calculating an Available Control Authority Index of Multicopters.

<http://rfly.buaa.edu.cn/resources/>



# 4. 多旋翼飞行器的可控性



## □ PNPNPN与PPNNPN布局六旋翼可控性

判定下列布局六旋翼有一个旋翼停机时的可控性

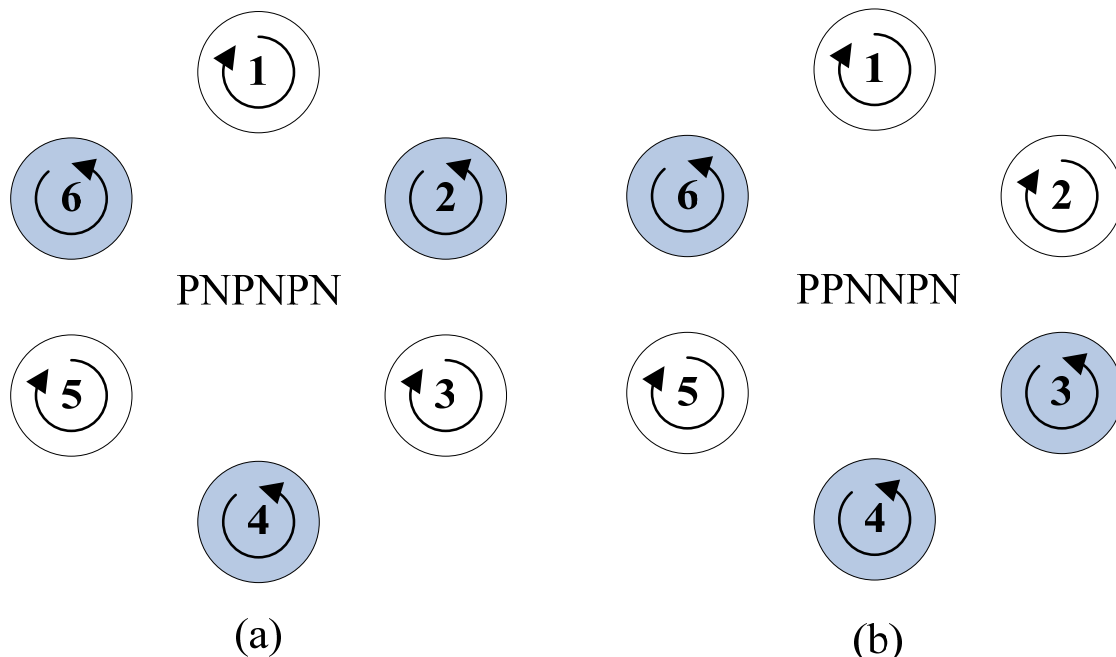


图10.6 两种布局六旋翼

其中P表示旋翼顺时针旋转，而N表示旋翼逆时针旋转

表10.1 六旋翼物理参数

参数	数值	单位
$m$	1.535	kg
$g$	9.80	$m/s^2$
$d$	0.275	m
$K_i, i = 1, \dots, 6$	6.125	N
$J_{xx}$	0.0411	$kg \cdot m^2$
$J_{yy}$	0.0478	$kg \cdot m^2$
$J_{zz}$	0.0599	$kg \cdot m^2$
$k_\mu$	0.1	-



# 多旋翼飞行器的可控性

## □ PNPNPN与PPNNPN构型六旋翼可控性

表10.2 六旋翼（PNPNPN和PPNNPN布局）有一个动力单元失效时的可控性

旋翼失效	$C(A, B)$ 的秩	PNPNPN		PPNNPN	
		剩余控制能力指标	可控性	剩余控制能力指标	可控性
无故障/失效	8	1.4861	可控	1.1295	可控
$\eta_1 = 0$	8	0	不可控	0.7221	可控
$\eta_2 = 0$	8	0	不可控	0.4510	可控
$\eta_3 = 0$	8	0	不可控	0.4510	可控
$\eta_4 = 0$	8	0	不可控	0.7221	可控
$\eta_5 = 0$	8	0	不可控	0	不可控
$\eta_6 = 0$	8	0	不可控	0	不可控

一个电机停转，无法定点定姿悬停！该结论有些反常理。

不可控

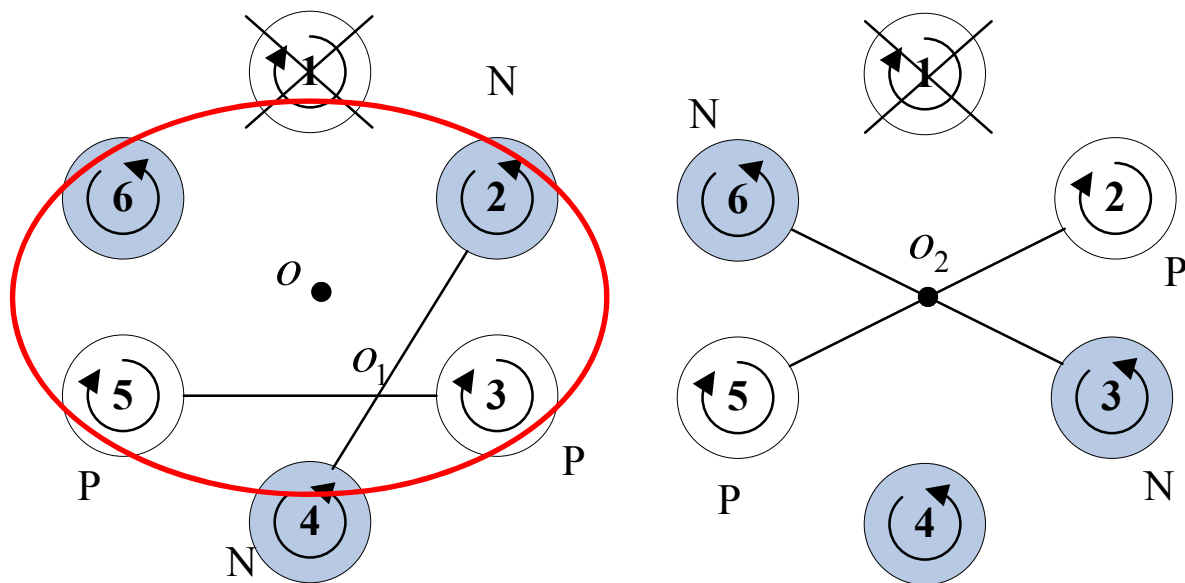
不可控



# 4. 多旋翼飞行器的可控性

## □ PNPNPN与PPNNPN构型六旋翼可控性

简单的物理解释：是否能构成基本的四旋翼



(a) PNPNPN不能构成基本的四旋翼

(b) PPNNPN能构成基本的四旋翼

图10.7 多旋翼可控性物理解释



## 4. 多旋翼飞行器的可控性



原状态不可控怎么办？

**降级控制！**

视频：航模单机翼神奇降落. <https://www.youtube.com/watch?v=297hIcJ43r8>



## 4. 多旋翼飞行器的可控性

### □ 放弃偏航的可控性

(1) 降级的悬停模型  $\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}(\underbrace{\bar{\mathbf{u}}_f - \bar{\mathbf{g}}}_{\mathbf{u}})$

去掉了偏航状态

### (2) 状态与系数矩阵

$$\bar{\mathbf{x}} = [h \ \phi \ \theta \ v_h \ p \ q]^T \in \mathbb{R}^6,$$

$$\bar{\mathbf{u}}_f = [f \ \tau_x \ \tau_y]^T \in \mathbb{R}^3,$$

$$\bar{\mathbf{g}} = [mg \ 0 \ 0]^T \in \mathbb{R}^3,$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6},$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \bar{\mathbf{J}}_f^{-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 3},$$

$$\bar{\mathbf{J}}_f = \text{diag}(-m, J_{xx}, J_{yy})$$

### (3) 控制量约束

所有旋翼的升力向量:

$$\mathbf{f} = [T_1 \ \dots \ T_{n_r}]^T, \mathbf{f} = U_f = \prod_{i=1}^{n_r} [0, K_i]$$

机体力和力矩向量:

$$\bar{\mathbf{u}}_f = \bar{\mathbf{B}}_f \mathbf{f}, \bar{\Omega} = \{ \bar{\mathbf{u}}_f \mid \bar{\mathbf{u}}_f = \bar{\mathbf{B}}_f \mathbf{f}, \mathbf{f} \in U_f \}$$





# 4. 多旋翼飞行器的可控性

## □ PNPNP六旋翼放弃偏航

表10.3 不同 $\gamma$ 时的剩余控制能力指标

$\gamma$	$\rho(\bar{g}, \partial\bar{\Omega})$	$\gamma$	$\rho(\bar{g}, \partial\bar{\Omega})$
<del>0.05</del>	<del>-0.1791</del>	0.55	1.9704
<del>0.10</del>	<del>-0.3583</del>	0.60	2.0491
<del>0.15</del>	<del>-0.1025</del>	0.65	2.0491
<del>0.20</del>	<del>0</del>	0.70	2.0491
<del>0.25</del>	<del>0</del>	0.75	2.0491
0.30	0.4098	0.80	2.0491
0.35	0.8197	0.85	2.0491
0.40	1.2295	0.90	2.0491
0.45	1.6122	0.95	2.0491
0.50	1.7913	1.00	2.0491

假设每个旋翼最大升力为  $K = \gamma m_a g, \gamma \in [0, 1]$

两个结论:

1)  $\gamma < 0.3$  时, 即使总升力可以抵消重力, 六旋翼降级模型不可控; 这与文献中给出的 5/18 近似;

2)  $\gamma \geq 0.6$  时, 重力一定的情况下增大升力, 对于已经给指标来说, 已没有增加;

不可控



## 4. 多旋翼飞行器的可控性



六旋翼有一个旋翼停机时的降级策略，具体实施方式见专利[6]：

[6] 全权, 杜光勋, 杨斌先, 蔡开元. 一个六旋翼飞行器有一个电机停机时的安全着陆方法. 国家发明专利, 公开号: CN102902277B



## 4. 多旋翼飞行器的可控性

### □ 进一步说明

(1) 除了与多旋翼构型相关，可控性（度）还与旋翼能提供的升力相关。在文献[7]中，PNPNPN型六旋翼飞行器放弃偏航后，剩下五个旋翼每个旋翼的最大升力需要满足 $\gamma \geq 0.3$ ，可以够保证多旋翼自旋下降。因此，这也告诉我们设计的时候，油门需要留有一定的裕度。

(2) 有研究者针对四旋翼进行了一些极限情况下的控制，比如令四旋翼分别停机一到三个螺旋桨。按以上的可控性分析，是不可控的，也就是四旋翼不能定点悬停。这并不能说明，四旋翼不能停在空中。文章设计了新的平衡状态，比如做圆周运动等。在新的平衡状态下，四旋翼的运动模型发生了改变。通过可控性分析，得出在新的平衡状态下是可控的。因此，这再次说明，讨论可控性一定要明确平衡态。

[7] Mark W. Mueller, and Raffaello D'Andrea. Stability and control of a quadrocopter despite the complete loss of one, two, or three propellers [C]. IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2014: 73-105.



# 4. 多旋翼飞行器的可控性

## □ 可控度的应用

### (1) 健康评估 (在线)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{u}_f - \mathbf{g} + \mathbf{d})$$

基本思路：将不确定、缓慢失效集总考虑成干扰 $\mathbf{d}$ ，然后评价之后系统的可控程度[8][9]。

[发明公布] 一种多旋翼飞行器控制能力评估指标的计算方法

申请公布号：CN103901780A

申请公布日：2014.07.02

申请号：2014101294892

申请日：2014.04.02

申请人：北京航空航天大学

发明人：全权

地址：100191北京市海淀区学院路37号

分类号：G05B17/02(2006.01)I 全部

**摘要：**一种多旋翼飞行器控制能力评估指标的计算方法，该指标的计算过程有三大步骤：步骤一：多旋翼飞行器基本物理参数确定；步骤二：中间变量的计算；步骤三：多旋翼飞行器控制能力评估指标计算。发明的多旋翼飞行器控制能力的评估指标为飞行器重力距离控制量可达集边界最小值 全部

[【发明专利申请】](#) [事务数据](#)

[8]全权, 杜光勋, 邓思阳, 蔡开元. 一种多旋翼飞行器控制能力评估指标的计算方法. 国家发明专利, 公开号: CN103901780B

[9]刘斌, 赵峙尧, 杨斌先, 全权, 蔡开元. 一种四旋翼飞行控制能力实时评估方法[C]. 2014年第三十三届中国控制会议(CCC 2014). 2014:3112-3117

### (2) 多旋翼设计评估 (离线)

- 动力系统动态太慢?
- 气动布局与动力系统设计是否能够抗风?

...



类似复合设计，四旋翼能里是否足够抗风？



## 5. 本讲小结

---

1. 介绍了稳定型概念，简要介绍了不变集定理，并用它推导了带饱和控制系统的收敛性；
2. 可控性是基础，只有系统可控才能设计控制器来稳定系统的状态；
3. 正可控性判定定理可以得到一些有趣的结论，使得多旋翼的可控性与一个指标是否大于零等价。
4. 控制能力指标可以用来定量化描述系统的可控性，也可以用来表征飞行器的安全性。可控度进一步知识可参考下面的文献。

[10] 杜光勋, 全权. 输入受限系统的可控度及其在飞行控制中的应用. 系统科学与数学, 2014, 34(12): 1578-1594.



# 资源

---

(1) 可靠飞行控制研究组主页课程中心(全部课件下载)

<http://rfly.buaa.edu.cn/course>

(2) 关注可靠飞行控制研究组公众号 buaarfly(文章、资讯等)

(3) 多旋翼设计与控制交流QQ群:183613048

(4) 视频课程(MOOC)同步发布, 网易云课堂搜索 “多旋翼”

<http://study.163.com/course/introduction/1003715005.htm>

(5) 同名中文书本教材《多旋翼飞行器设计与控制》即将在电子工业出版社出版, 敬请期待

(6) 有疑问可联系课程总助教戴训华, 邮箱: [dai@buaa.edu.cn](mailto:dai@buaa.edu.cn)



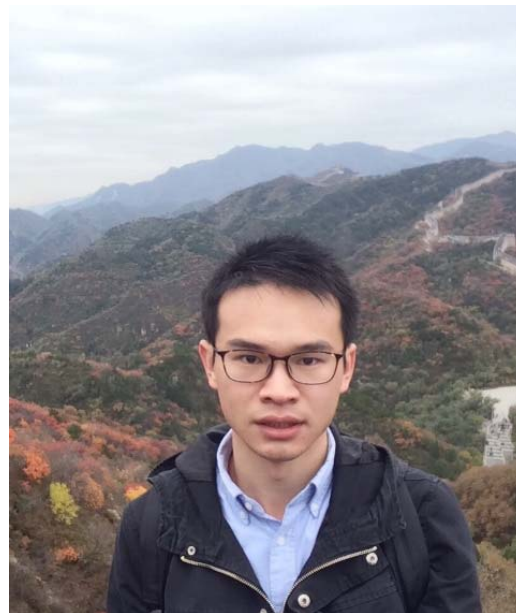


# 致谢

## 感谢控制组同学



杜光勋



戴训华

为本节课程准备作出的贡献。





谢谢！



---

# 多旋翼飞行器设计与控制

## 第十一讲 底层飞行控制

全权 副教授

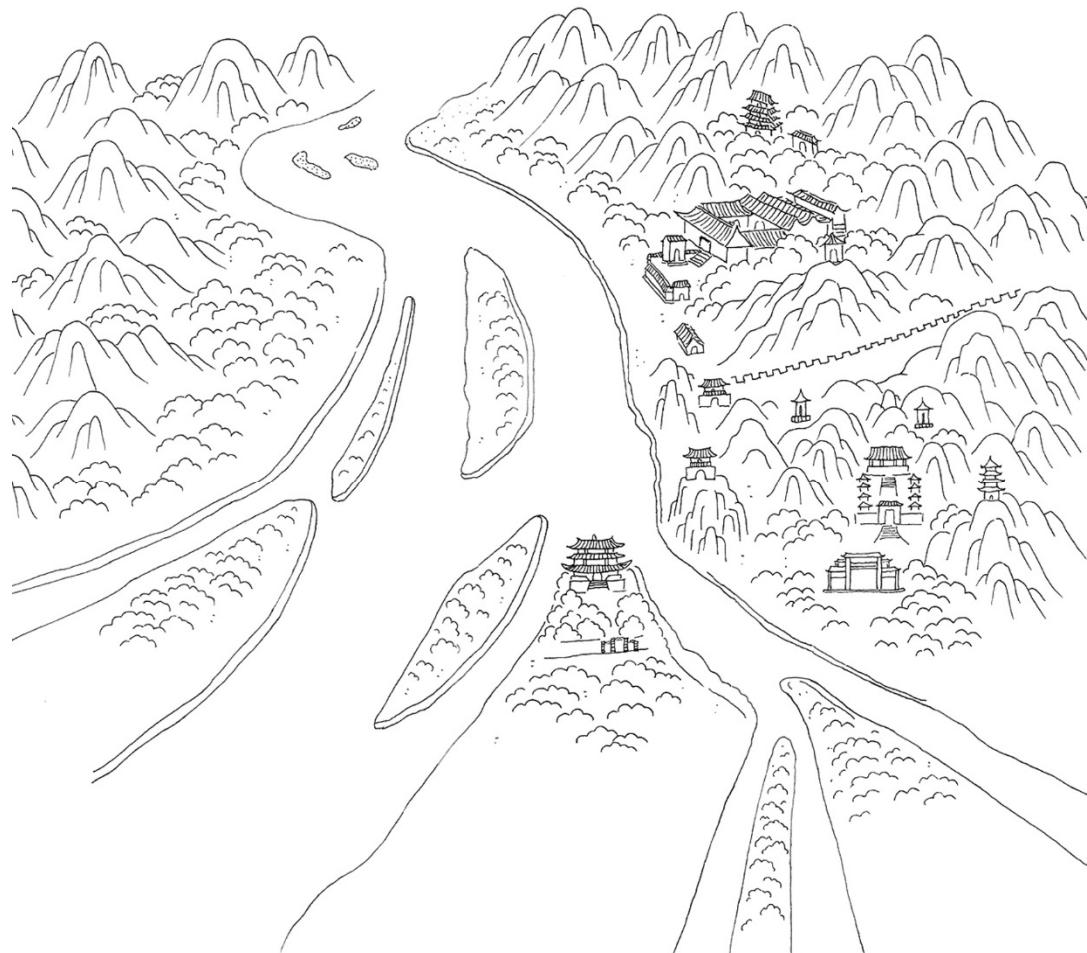
qq\_buaa@buaa.edu.cn

自动化科学与电气工程学院

北京航空航天大学



# 东方智慧



都江堰



# 核心问题

---

给定期望的位置，如何控制多旋翼的电机使其能够飞到目标位置？



# 大纲

---

1. 多旋翼底层飞行控制框架和模型化简
2. 位置控制
3. 姿态控制
4. 控制分配
5. 电机控制
6. 本讲小结



# 1. 多旋翼底层飞行控制框架和模型化简

## □ 多旋翼底层飞行控制框架

多旋翼的底层飞行控制可以分为四个层次，分别为位置控制、姿态控制、控制分配和电机控制

**位置控制：**期望的三维位置  $\mathbf{P}_d$   $\rightarrow$  解算期望姿态角  $\Theta_d$  (滚转、俯仰和偏航  $\phi_d, \theta_d, \psi_d$ ) 以及期望总拉力  $f_d$

**姿态控制：**期望姿态角  $\Theta_d$   $\rightarrow$  解算期望力矩  $\tau_d$

**控制分配：**期望力矩和升力  $\tau_d, f_d$   $\rightarrow$  解算  $n$  个电机的期望转速  $\omega_{d,k}$ ,  $k=1, 2, \dots, n$

**电机控制：**期望转速  $\omega_{d,k}$   $\rightarrow$  解算每个电机的期望油门指令  $\sigma_{d,k}$ ,  $k=1, 2, \dots, n$

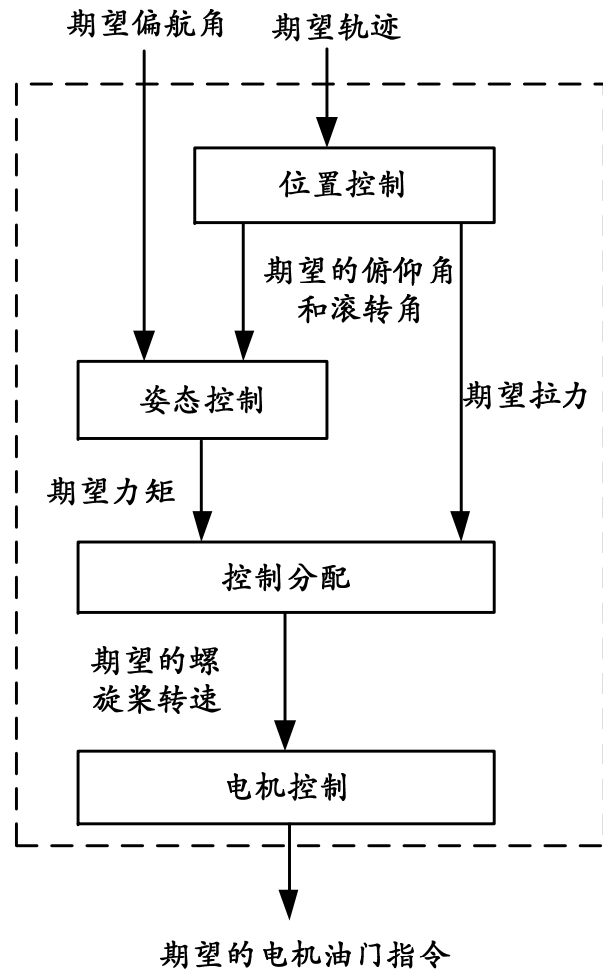


图11.1 多旋翼底层飞行控制框架



# 1. 多旋翼底层飞行控制框架和模型化简

## □ 多旋翼底层飞行控制框架

底层飞行控制

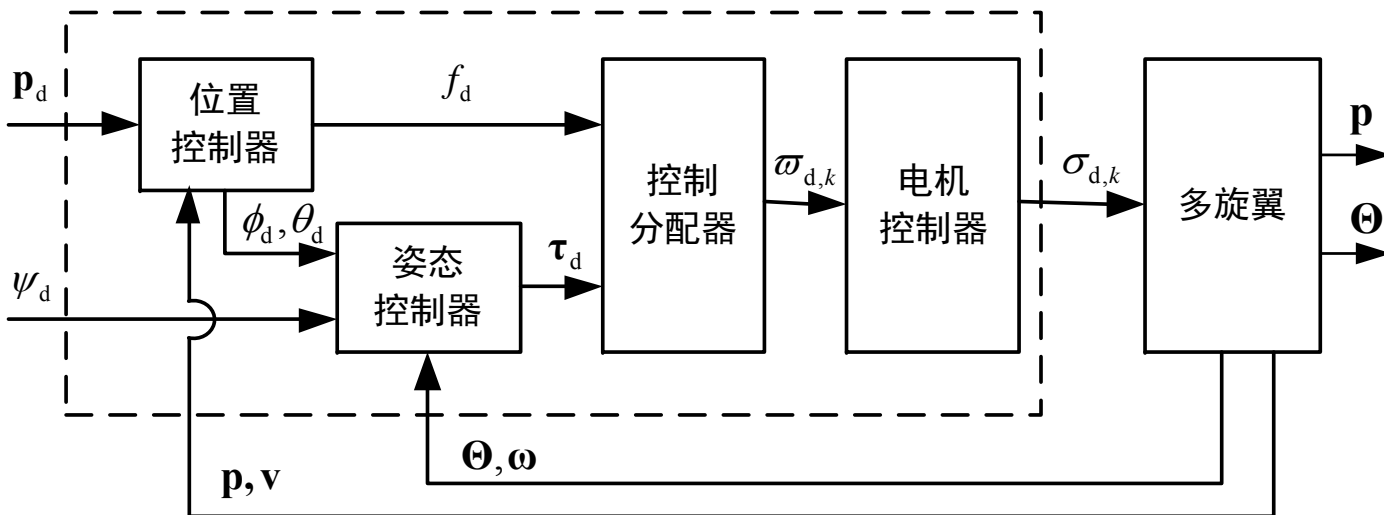


图11.2 多旋翼全自主控制闭环框图

欠驱动系统：4个输入（总拉力 $f$ 和三轴力矩 $\tau$ ）控制6个输出（位置 $p$ 和姿态角 $\Theta$ ）。设计多旋翼飞行控制器时，可以采用内外环的控制策略，其中内环对多旋翼飞行器姿态角进行控制，而外环对多旋翼飞行器的位置进行控制。由内外环控制实现多旋翼飞行器的升降、悬停、侧飞等飞行模式。





# 1. 多旋翼底层飞行控制框架和模型化简

## □ 线性模型化简

基于第六讲的多旋翼非线性模型，忽略  ${}^b\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot {}^b\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{G}_a$ ，得到简化的多旋翼模型如下：

$$\begin{aligned} {}^e\dot{\mathbf{p}} &= {}^e\mathbf{v} \\ {}^e\dot{\mathbf{v}} &= g\mathbf{e}_3 - \frac{f}{m}\mathbf{R}\mathbf{e}_3 \\ \dot{\boldsymbol{\Theta}} &= \mathbf{W} \cdot {}^b\boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{J} \cdot {}^b\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \boldsymbol{\tau} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} {}^e\dot{\mathbf{p}} &= {}^e\mathbf{v} \\ {}^e\dot{\mathbf{v}} &= g\mathbf{e}_3 - \frac{f}{m}\mathbf{R}\mathbf{e}_3 \\ \dot{\boldsymbol{\Theta}} &= \mathbf{W} \cdot {}^b\boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{J} \cdot {}^b\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \boldsymbol{\tau} \end{aligned}} \right\} \longleftrightarrow \begin{aligned} \ddot{p}_{x_e} &= -\frac{f}{m}(\sin\psi \sin\phi + \cos\psi \sin\theta \cos\phi) \\ \ddot{p}_{y_e} &= -\frac{f}{m}(-\cos\psi \sin\phi + \cos\phi \sin\theta \sin\psi) \\ \ddot{p}_{z_e} &= g - \frac{f}{m}\cos\theta \cos\phi \end{aligned}$$

其中， ${}^e\mathbf{p} = [p_{x_e} \ p_{y_e} \ p_{z_e}]^T \in \mathbb{R}^3$  为对地位置， ${}^e\mathbf{v}$  为对地速度， $\boldsymbol{\Theta}$  为飞机机体欧拉角， ${}^b\boldsymbol{\omega}$  为飞机机体角速度， $\mathbf{R}$  为旋转矩阵， $\mathbf{J}$  为转动惯量矩阵， $\mathbf{e}_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$ ，其他符号定义详见第六讲。



# 1. 多旋翼底层飞行控制框架和模型化简

## □ 线性模型化简

假设多旋翼处于悬停状态，即  $\mathbf{p} \approx \mathbf{p}_d, \theta \approx \phi \approx 0, \psi \approx \psi_d, \dot{\mathbf{p}} \approx 0, \dot{\theta} \approx \dot{\phi} \approx \dot{\psi} \approx 0$   
标称输入给定为  $f \approx mg, \tau \approx 0$ 。则此时有  $\sin \phi \approx \phi, \cos \phi \approx 1, \sin \theta \approx \theta, \cos \theta \approx 1$ 。  
通过在平衡点的小角度线性化，此时，

$$\mathbf{R}_{e_3} \approx \begin{bmatrix} \theta \cos \psi + \phi \sin \psi \\ \theta \sin \psi - \phi \cos \psi \\ 1 \end{bmatrix}$$

可得到多旋翼的线性模型：

### (1) 水平通道模型

$$\begin{aligned} {}^e \dot{\mathbf{p}} &= {}^e \mathbf{v} \\ {}^e \dot{\mathbf{v}} &= g\mathbf{e}_3 - \frac{f}{m} \mathbf{R}_{e_3} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \ddot{p}_{x_e} &= -\frac{f}{m} (\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \sin \theta \cos \phi) \\ \ddot{p}_{y_e} &= -\frac{f}{m} (-\cos \psi \sin \phi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi) \end{aligned}$$

可以认为  $\Theta_h$  是输入。  
进一步，因为  $-g\mathbf{A}_\psi$  可以得到，所以可以认为输入是  $-g\mathbf{A}_\psi \Theta_h$ 。水平通道模型为线性的。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_h &= \mathbf{v}_h \\ \dot{\mathbf{v}}_h &= -g\mathbf{A}_\psi \Theta_h \end{aligned}$$

其中  $\mathbf{p}_h = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}, \mathbf{R}_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}, \mathbf{A}_\psi = \mathbf{R}_\psi \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \Theta_h = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \end{bmatrix}$

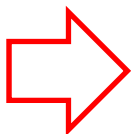


# 1. 多旋翼底层飞行控制框架和模型化简

## □ 线性模型化简

### (2) 高度通道模型

$$\begin{aligned} {}^e \dot{\mathbf{p}} &= {}^e \mathbf{v} \\ {}^e \dot{\mathbf{v}} &= g \mathbf{e}_3 - \frac{f}{m} \mathbf{R} \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$



$$\ddot{p}_z = g - \frac{f}{m} \cos \theta \cos \phi$$



线性模型

$$\begin{aligned} \dot{p}_z &= v_z \\ \dot{v}_z &= g - \frac{f}{m} \end{aligned}$$

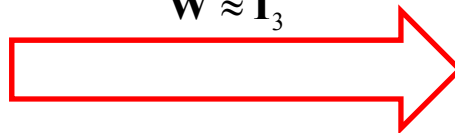
### (3) 姿态模型

$$\dot{\Theta} = \mathbf{W} \cdot {}^b \boldsymbol{\omega}$$

$$\mathbf{J} \cdot {}^b \dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\tau}$$

小角度假设

$$\mathbf{W} \approx \mathbf{I}_3$$



线性模型

$$\dot{\Theta} = \boldsymbol{\omega}$$

$$\mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\tau}$$



# 1. 多旋翼底层飞行控制框架和模型化简

## □ 线性模型化简

原模型

$$\begin{aligned} {}^e \dot{\mathbf{p}} &= {}^e \mathbf{v} \\ {}^e \dot{\mathbf{v}} &= g\mathbf{e}_3 - \frac{f}{m} \mathbf{R}\mathbf{e}_3 \\ \dot{\Theta} &= \mathbf{W} \cdot {}^b \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{J} \cdot {}^b \dot{\boldsymbol{\omega}} &= \boldsymbol{\tau} \end{aligned}$$



(1) 水平通道模型

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_h &= \mathbf{v}_h \\ \dot{\mathbf{v}}_h &= -g\mathbf{A}_\psi \Theta_h \end{aligned}$$

(2) 高度通道模型

$$\begin{aligned} \dot{p}_z &= v_z \\ \dot{v}_z &= g - \frac{f}{m} \end{aligned}$$

(3) 姿态模型

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} &= \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}} &= \boldsymbol{\tau} \end{aligned}$$

每个通道都为  
线性模型！



## 2. 位置控制

### □ 分类

根据**给定目标轨迹** $\mathbf{p}_d$ 的不同，可将位置控制分为三类：定点控制、轨迹跟踪和路径跟随。

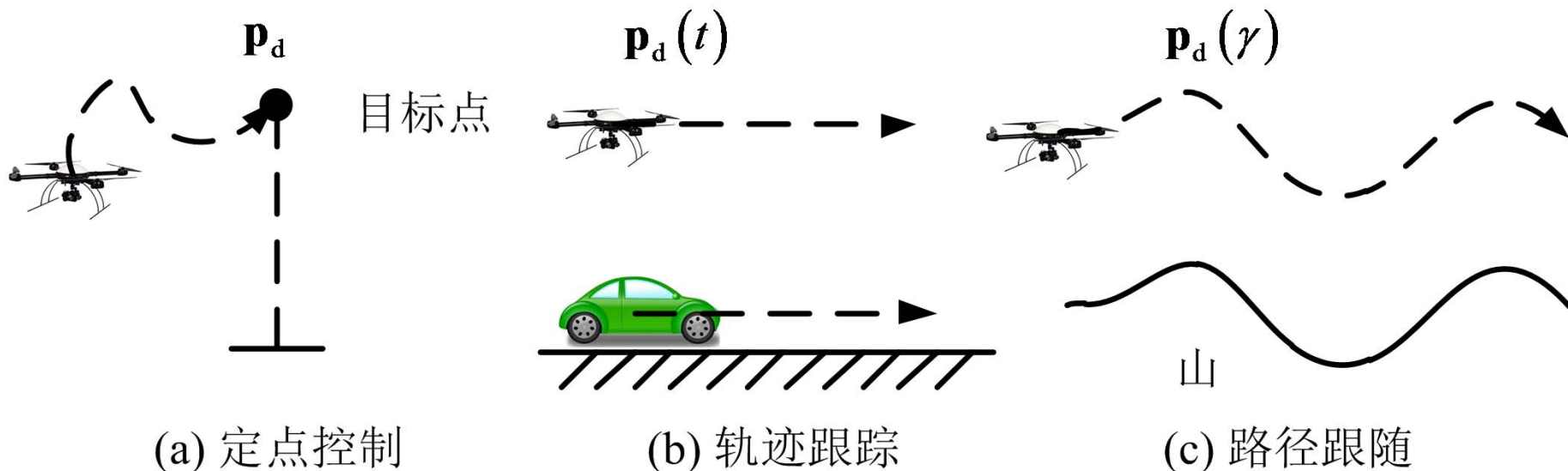


图11.3 位置控制三类形式



## 2. 位置控制

### □ 分类

(1) **定点控制** (Set-Point Control)。期望目标点  $\mathbf{p}_d \in \mathbb{R}^3$  是一个常值。设计控制器使得，当  $t \rightarrow \infty$  时， $\|\mathbf{p}_d - \mathbf{p}(t)\|$  收敛到0或者在0足够小的邻域内。

(2) **轨迹跟踪** (Trajectory Tracking)。期望轨迹  $\mathbf{p}_d(t): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$  是一条与时间相关的轨迹。设计控制器使得，当  $t \rightarrow \infty$  时， $\|\mathbf{p}_d(t) - \mathbf{p}(t)\|$  收敛到0或者在0足够小的邻域内。

(3) **路径跟随** (Path Following)。期望轨迹  $\mathbf{p}_d(\gamma) \in \mathbb{R}^3$  是一条由参数 直接决定的路径，而不是时间。设计控制器使得，当  $t \rightarrow \infty$  时， $\|\mathbf{p}_d(\gamma(t)) - \mathbf{p}(t)\|$  收敛到0或者在0足够小的邻域内。

[1] Hespanha J P. Trajectory-tracking and path-following of underactuated autonomous vehicles with parametric modeling uncertainty. Automatic Control, IEEE Transactions on, 2007, 52(8): 1362–1379.



## 2. 位置控制

### □ 分类

根据解算出的姿态信息的不同，可将位置控制分为两类：

(1) 产生期望欧拉角的位置控制。

针对线性系统设计控制器。这种类型的位置控制器最终产生的期望值为欧拉角和拉力  $\phi_d, \theta_d, f_d$ 。

(2) 产生期望旋转矩阵的位置控制。

直接针对非线性耦合系统设计控制器。这种类型的位置控制器最终产生的期望值为旋转矩阵和拉力  $\mathbf{R}_d, f_d$ 。





## 2. 位置控制

### □ 产生期望欧拉角的位置控制

#### (1) 传统的PID设计

- 水平通道模型

$$\dot{\mathbf{p}}_h = \mathbf{v}_h$$

$$\dot{\mathbf{v}}_h = -g\mathbf{A}_\psi \Theta_h$$

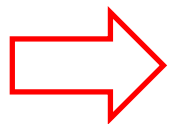
- 期望水平位置动态

$$\ddot{\mathbf{p}}_h = \ddot{\mathbf{p}}_{hd} - \mathbf{K}_{p_{hd}} (\dot{\mathbf{p}}_h - \dot{\mathbf{p}}_{hd}) - \mathbf{K}_{p_{hp}} (\mathbf{p}_h - \mathbf{p}_{hd})$$

$$-g\mathbf{A}_\psi \Theta_{hd} = \ddot{\mathbf{p}}_{hd} - \mathbf{K}_{p_{hd}} (\dot{\mathbf{p}}_h - \dot{\mathbf{p}}_{hd}) - \mathbf{K}_{p_{hp}} (\mathbf{p}_h - \mathbf{p}_{hd})$$

当考虑定点控制时

$$\dot{\mathbf{p}}_{hd} = \ddot{\mathbf{p}}_{hd} = \mathbf{0}_{2 \times 1}$$



$$\Theta_{hd} = -g^{-1} \mathbf{A}_\psi^{-1} \left( \ddot{\mathbf{p}}_{hd} - \mathbf{K}_{p_{hd}} (\dot{\mathbf{p}}_h - \dot{\mathbf{p}}_{hd}) - \mathbf{K}_{p_{hp}} (\mathbf{p}_h - \mathbf{p}_{hd}) \right)$$

其中  $\mathbf{K}_{(\cdot)}$  表示参数。



## 2. 位置控制

### □ 产生期望欧拉角的位置控制

#### (1) 传统的PID设计

- 高度通道模型

$$\dot{p}_z = v_z$$

$$\dot{v}_z = g - \frac{f}{m}$$

- 期望高度动态

$$\ddot{p}_z = \ddot{p}_{z_d} - k_{p_z d} (\dot{p}_z - \dot{p}_{z_d}) - k_{p_z p} (p_z - p_{z_d})$$

$$f_d = mg - m \left( \ddot{p}_{z_d} - k_{p_z d} (\dot{p}_z - \dot{p}_{z_d}) - k_{p_z p} (p_z - p_{z_d}) \right)$$

当考虑定点控制时,  $\dot{p}_{z_d} = \ddot{p}_{z_d} = 0$  上式就变为

$$f_d = mg - m \left( -k_{p_z d} \dot{p}_z - k_{p_z p} (p_z - p_{z_d}) \right)$$



## 2. 位置控制

### 产生期望欧拉角的位置控制

#### (2) 开源自驾仪PID设计

##### 1) 水平位置通道

为了使  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_{p_h}(t)\| = 0$ ，我们先针对

期望速度  $\dot{\mathbf{p}}_h = \mathbf{v}_h$   $\rightarrow$   $\mathbf{v}_{hd} = \mathbf{K}_{p_h} (\mathbf{p}_{hd} - \mathbf{p}_h)$

在  $\dot{\mathbf{p}}_{hd} = 0$  的前提下如果

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_{v_h}(t)\| = 0$$

那么

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_{p_h}(t)\| = 0$$

其中  $e_{v_h} \triangleq \mathbf{v}_h - \mathbf{v}_{hd}$

速度能达到期望，位置也就能达到期望

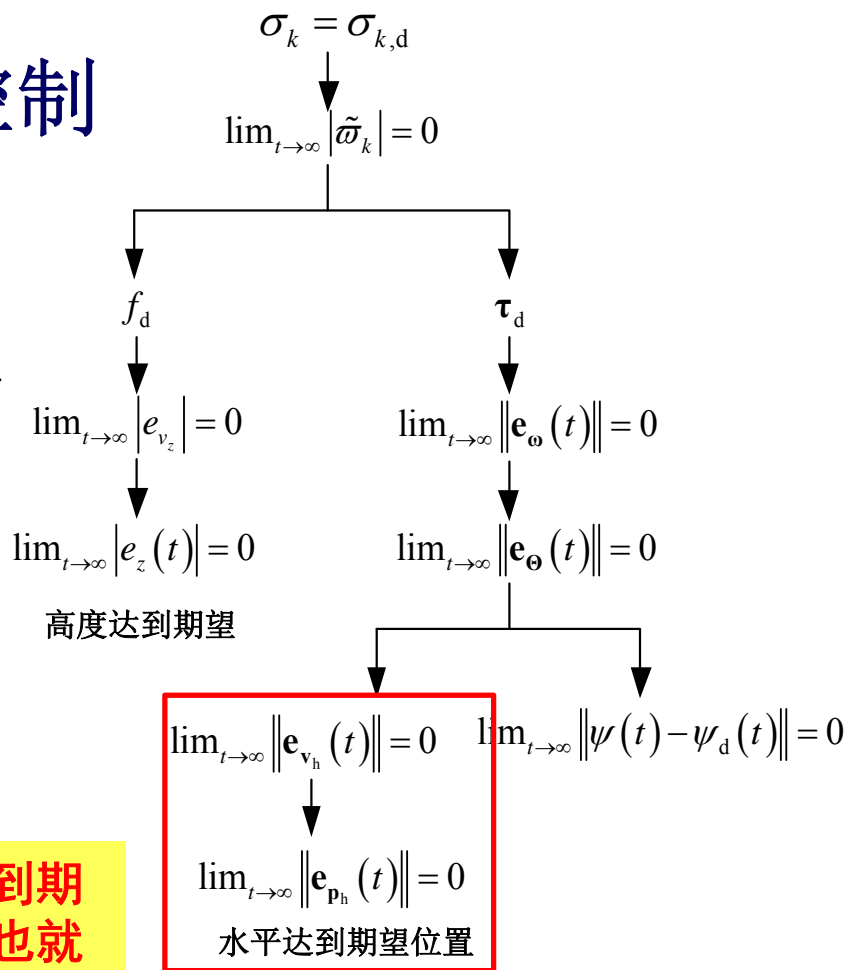


图11.4 多旋翼控制目标关系图



## 2. 位置控制

### 产生期望欧拉角的位置控制

#### (2) 开源自驾仪PID设计

##### 1) 水平位置通道

为了使  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_{v_h}(t)\| = 0$ ，我们先针对

$$\dot{\Theta}_h = -gA_\psi \Theta_h$$

$$-gA_\psi \Theta_{hd} = -K_{v_{hp}} e_{v_h} - K_{v_{hi}} \int e_{v_h} - K_{v_{hd}} \dot{e}_{v_h}$$

$$\Theta_{hd} = g^{-1} A_\psi^{-1} \left( K_{v_{hp}} e_{v_h} + K_{v_{hi}} \int e_{v_h} + K_{v_{hd}} \dot{e}_{v_h} \right)$$

如果  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Theta_h(t) - \Theta_{hd}(t)\| = 0$

那么  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_{v_h}(t)\| = 0$

角度能达到期望，速度也就能达到期望

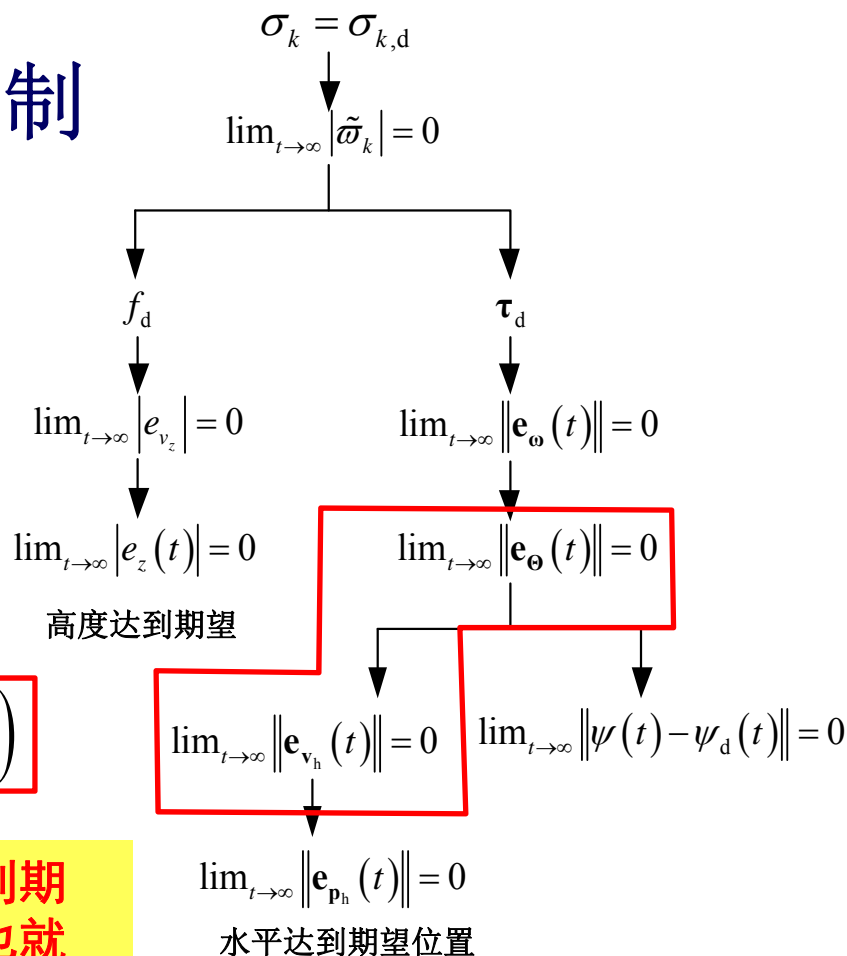


图11.4 多旋翼控制目标关系图



## 2. 位置控制

### 产生期望欧拉角的位置控制

#### (2) 开源自驾仪PID设计

#### 2) 高度通道

类似于水平通道设计，高度通道

控制器设计如下

$$v_{zd} = -k_{p_z} (p_z - p_{zd})$$

$$f_d = m \left( g + k_{v_zp} e_{v_z} + k_{v_zi} \int e_{v_z} + k_{v_zd} \dot{e}_{v_z} \right)$$

竖直方向速度能达到期望，高度也就能达到期望

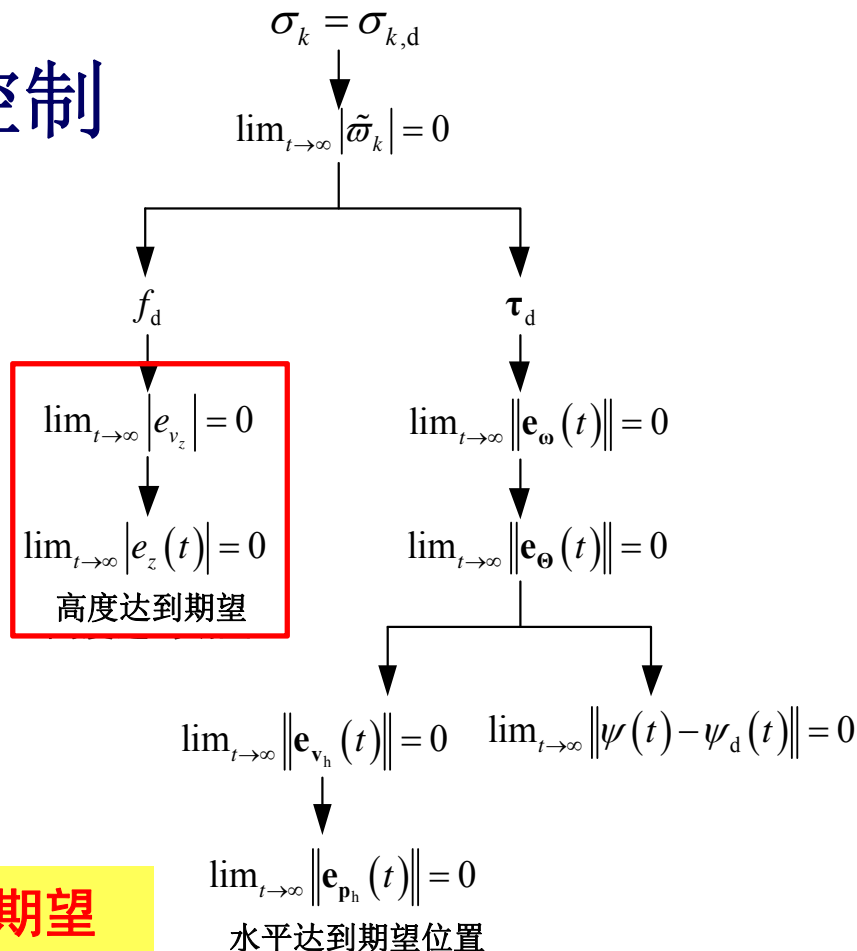


图11.4 多旋翼控制目标关系图



## 2. 位置控制

### 产生期望欧拉角的位置控制

#### (3) 加饱和的PID控制

传统PID  $\Theta_{hd} = -g^{-1} \mathbf{A}_{\psi}^{-1} \left( -\mathbf{K}_{p_{hd}} \dot{\mathbf{p}}_h - \mathbf{K}_{p_{hp}} (\mathbf{p}_h - \mathbf{p}_{hd}) \right)$

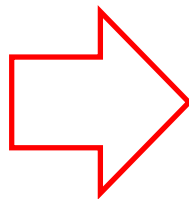
自驾仪PID  $\Theta_{hd} = g^{-1} \mathbf{A}_{\psi}^{-1} \left( \mathbf{K}_{v_{hp}} \mathbf{e}_{v_h} + \mathbf{K}_{v_{hi}} \int \mathbf{e}_{v_h} + \mathbf{K}_{v_{hd}} \dot{\mathbf{e}}_{v_h} \right)$

控制器设计  
就没意义了

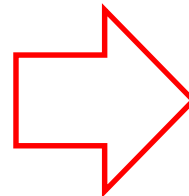
位置误差很大



角度误差很大

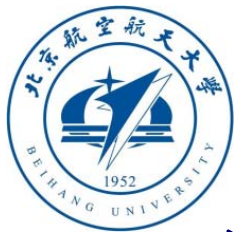


$$\Theta_{hd} \gg 2\pi$$



小角度假设被破坏!

加饱和非常必要



## 2. 位置控制

### □ 产生期望欧拉角的位置控制

#### (3) 加饱和的PID控制

考虑饱和之后，传统PID控制器变为

$$\Theta_{hd} = \text{sat}_{gd} \left( g^{-1} A_{\psi}^{-1} \left( K_{p_{hd}} \dot{p}_h + K_{p_{hp}} (p_h - p_{hd}) \right), a_0 \right)$$

其中  $a_0 \in \mathbb{R}_+$ 。保方向饱和函数  $\text{sat}_{gd}(x, a)$  的定义见第十讲。同样地，在开源自驾仪PID设计中，我们增加对  $e_{v_h}$  和控制器右端项的限幅

$$e_{v_h} = \text{sat}_{gd} (v_h - v_{hd}, a_1)$$

$$\Theta_{hd} = \text{sat}_{gd} \left( g^{-1} A_{\psi}^{-1} \left( K_{v_{hp}} e_{v_h} + K_{v_{hi}} \int e_{v_h} + K_{v_{hd}} \dot{e}_{v_h} \right), a_2 \right)$$

其中  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+$ 。





## 2. 位置控制

### □ 产生期望欧拉角的位置控制

#### (3) 加饱和的PID控制

下面讨论**保方向饱和函数**  $\text{sat}_{\text{gd}}(\mathbf{x}, a)$  和**传统饱和函数**  $\text{sat}(\mathbf{x}, a)$  的区别。虽然传统饱和函数限制的每个分量的绝对值不大于  $a$ ，但它与  $\mathbf{x}$  的方向可能不同。而保方向饱和函数  $\text{sat}_{\text{gd}}(\mathbf{x}, a)$  不仅可以限制最终向量每个分量的绝对值不大于  $a$ ，还可以保证的方向与  $\mathbf{x}$  相同。

$$\text{传统饱和函数} \quad \text{sat}(\mathbf{x}, a) \triangleq \begin{bmatrix} \text{sat}(x_1, a) \\ \vdots \\ \text{sat}(x_n, a) \end{bmatrix}, \text{sat}(x_k, a) \triangleq \begin{cases} x_k, & |x_k| \leq a \\ a \cdot \text{sign}(x_k), & |x_k| > a \end{cases}$$

$$\text{保方向饱和函数} \quad \text{sat}_{\text{gd}}(\mathbf{x}, a) \triangleq \begin{cases} \mathbf{x}, & \|\mathbf{x}\|_{\infty} \leq a \\ a \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_{\infty}}, & \|\mathbf{x}\|_{\infty} > a \end{cases}$$



## 2. 位置控制

### □ 产生期望欧拉角的位置控制

#### (3) 加饱和的PID控制

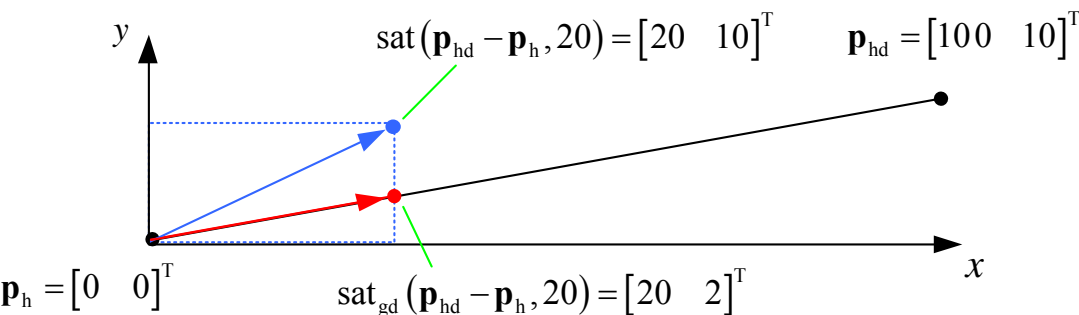


图11.4 两种饱和函数的作用效果对比图

**传统饱和函数  
导致方向偏离**

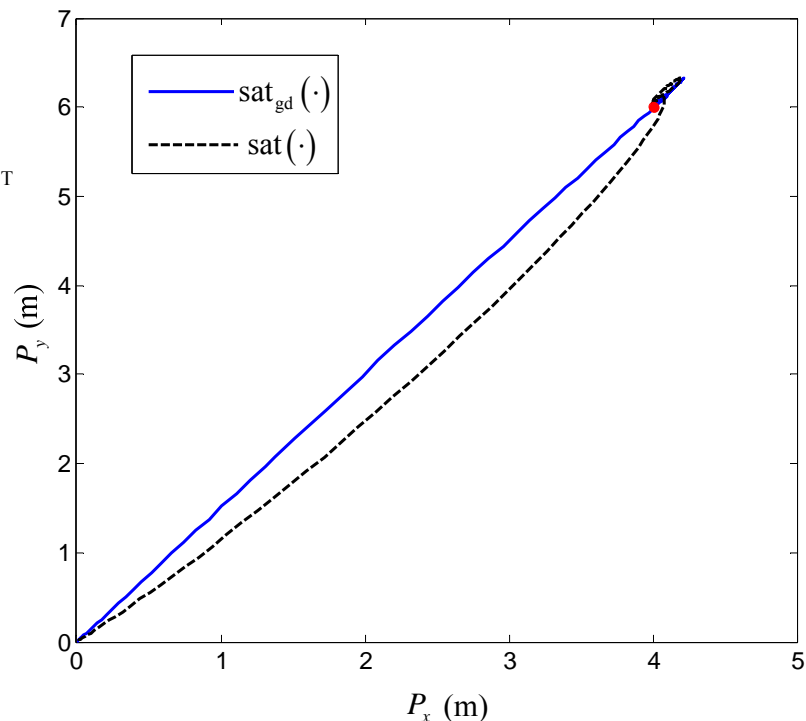


图11.5 饱和情况下多旋翼定点跟踪水平面运动轨迹

**保方向的饱和函数可以保证多旋翼直线飞行，而传统饱和函数则不行**



## 2. 位置控制

### □ 产生期望欧拉角的位置控制

#### (3) 加饱和的PID控制

为了避免油门过大，同样需要加入饱和。在传统PID控制器设计中，我们需要对控制器的右端进行如下限幅

$$f_d = \text{sat}_{\text{gd}} \left( m \left( g + k_{p_z, d} \dot{p}_z + k_{p_z, p} (p_z - p_{z, d}) \right), a_3 \right)$$

其中  $a_3 \in \mathbb{R}_+$ 。同样地，在开源自驾仪PID设计中，我们增加对  $e_{v_z}$  和控制器的右端的限幅

$$e_{v_z} = \text{sat}_{\text{gd}} (v_z - v_{z, d}, a_4)$$

$$f_d = \text{sat}_{\text{gd}} \left( m \left( g + k_{v_z, p} e_{v_z} + k_{v_z, i} \int e_{v_z} + k_{v_z, d} \dot{e}_{v_z} \right), a_5 \right)$$

其中  $a_4, a_5 \in \mathbb{R}_+$ 。对于一维变量，保方向饱和函数  $\text{sat}_{\text{gd}}(\mathbf{x}, a)$  和与传统饱和函数  $\text{sat}(\mathbf{x}, a)$  的作用相同。



## 2. 位置控制

### □ 产生期望旋转矩阵的位置控制

基于旋转矩阵描述的姿态运动学方程为

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \left[ {}^b \boldsymbol{\omega} \right]_x$$

其中  $\mathbf{R} \in SO(3)$  是旋转矩阵。系统期望的姿态控制指令为  $\mathbf{R}_d$ 。因此位置控制器最好可以直接给出期望的旋转矩阵  $\mathbf{R}_d$ 。

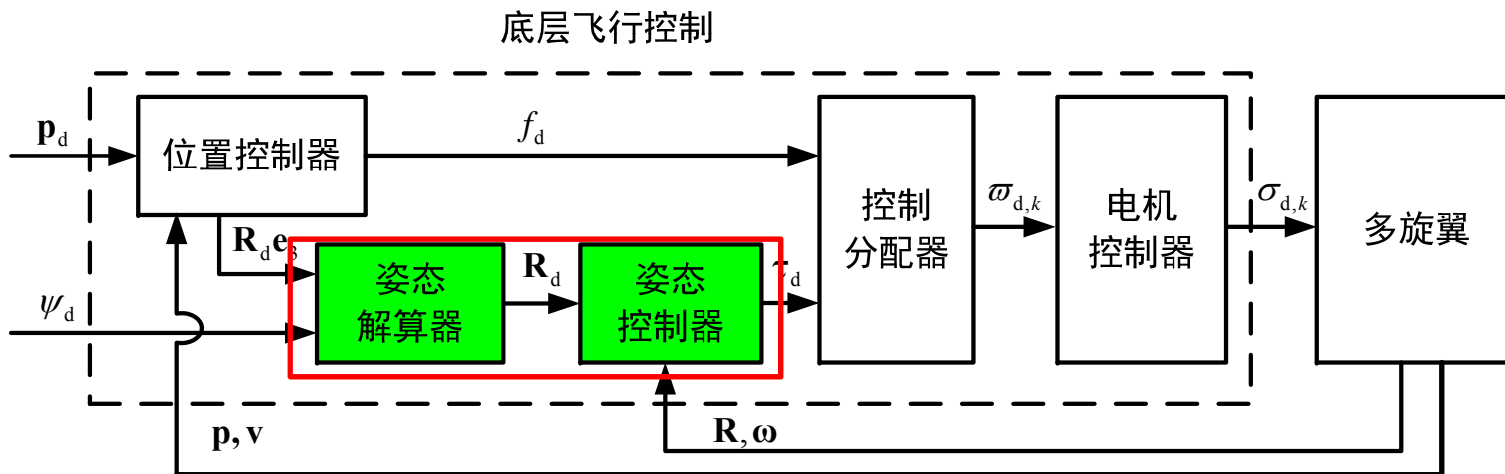


图11.6 基于旋转矩阵的的多旋翼闭环控制框图



## 2. 位置控制

### □ 产生期望旋转矩阵的位置控制[2]

针对非线性耦合模型进行如下控制器设计

$$g\mathbf{e}_3 - \frac{f_d}{m}\mathbf{r}_{3,d} = \mathbf{a}_d$$

多旋翼位置模型

$${}^e\dot{\mathbf{p}} = {}^e\mathbf{v}$$

$${}^e\dot{\mathbf{v}} = g\mathbf{e}_3 - \frac{f}{m}\mathbf{R}\mathbf{e}_3$$

其中  $\mathbf{r}_{3,d} = \mathbf{R}_d\mathbf{e}_3$  以及

$$\mathbf{a}_d = \begin{bmatrix} \text{sat}_{\text{gd}} \left( -\mathbf{K}_{vhp}\mathbf{e}_{v_h} - \mathbf{K}_{vhi} \int \mathbf{e}_{v_h} - \mathbf{K}_{vhd}\dot{\mathbf{e}}_{v_h}, a_1 \right) \\ \text{sat}_{\text{gd}} \left( -k_{vzp}e_{v_z} - k_{vzi} \int e_{v_z} - k_{vzd}\dot{e}_{v_z}, a_2 \right) \end{bmatrix}$$

期望的加速度  
，需要加饱和

先求解期望的旋转矩阵  $\mathbf{R}_d$ 。由上式可以得到

$$\mathbf{r}_{3,d} = \frac{g\mathbf{e}_3 - \mathbf{a}_d}{\|g\mathbf{e}_3 - \mathbf{a}_d\|}$$

[2] Lee, T, Leoky M, and McClamroch N H. Geometric tracking control of a quadrotor UAV on SE(3). In: Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control. Atlanta, Georgia, USA: IEEE, 2010. 5420–5425.



## 2. 位置控制

### □ 产生期望旋转矩阵的位置控制

但是为了满足  $\mathbf{r}_{3,d}^T \mathbf{r}_{3,d} = 1$ ，我们只需要得到方向

$$\mathbf{r}_{3,d} = \frac{g\mathbf{e}_3 - \mathbf{a}_d}{\|g\mathbf{e}_3 - \mathbf{a}_d\|}$$

至此，向量  $\mathbf{r}_{3,d}$  已经确定。下面介绍两种获得  $\mathbf{R}_d$  的方法。一种基于小角度假设，另一种同样适用于大角度飞行。

#### (1) 小角度情况

然而  $\mathbf{R}_d = [\mathbf{r}_{1,d} \quad \mathbf{r}_{2,d} \quad \mathbf{r}_{3,d}]$ ，因此还要确定  $\mathbf{r}_{1,d}, \mathbf{r}_{2,d}$  中的一个，我们就可以恢复出  $\mathbf{R}_d$  了。根据旋转矩阵的定义， $\mathbf{r}_1 \in \mathbb{R}^3$  为

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi \\ \cos \theta \sin \psi \\ -\sin \theta \end{bmatrix}$$



## 2. 位置控制

### □ 产生期望旋转矩阵的位置控制

因此，我们定义向量

$$\bar{\mathbf{r}}_{1,d} = \begin{bmatrix} \cos \psi_d \\ \sin \psi_d \\ 0 \end{bmatrix}$$

在姿态角变化不大的情况下，可认为  $\bar{\mathbf{r}}_{1,d} \approx \mathbf{r}_{1,d}$ 。这样通过  $\bar{\mathbf{r}}_{1,d}$  和  $\mathbf{r}_{3,d}$  可以将  $\mathbf{r}_{2,d}$  定义为

$$\mathbf{r}_{2,d} = \frac{\mathbf{r}_{3,d} \times \bar{\mathbf{r}}_{1,d}}{\|\mathbf{r}_{3,d} \times \bar{\mathbf{r}}_{1,d}\|}$$

根据叉乘的定义，可以知道  $\mathbf{r}_{2,d} \perp \mathbf{r}_{3,d}$ 。进一步，定义  $\mathbf{r}_{1,d} = \mathbf{r}_{2,d} \times \mathbf{r}_{3,d}$ 。这样可得  $\mathbf{r}_{1,d} \perp \mathbf{r}_{3,d}$ ,  $\mathbf{r}_{1,d} \perp \mathbf{r}_{2,d}$ 。至此，可得期望的姿态矩阵  $\mathbf{R}_d$  为

$$\mathbf{R}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{2,d} \times \mathbf{r}_{3,d} & \mathbf{r}_{2,d} & \mathbf{r}_{3,d} \end{bmatrix}$$

其满足  $\mathbf{R}_d^T \mathbf{R}_d = \mathbf{I}_3$ 。





## 2. 位置控制

### □ 产生期望旋转矩阵的位置控制

#### (2) 大角度情况

向量  $\mathbf{r}_{3,d}$  也可以表示为

$$\mathbf{r}_{3,d} = \begin{bmatrix} \cos\psi_d \sin\theta_d \cos\phi_d + \sin\psi_d \sin\phi_d \\ \sin\psi_d \sin\theta_d \cos\phi_d - \cos\psi_d \sin\phi_d \\ \cos\phi_d \cos\theta_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{bmatrix}. \quad (*)$$

上式的解为

$$\theta_d = \theta_{d,0} \text{ 或 } \theta_{d,1}$$

$$\phi_d = \phi_{d,0} \text{ 或 } \phi_{d,1}$$

其中

$$\theta_{d,0} = \arctan 2(a_{11} \cos\psi_d + a_{12} \sin\psi_d, a_{13})$$

$$\theta_{d,1} = \arctan 2(-a_{11} \cos\psi_d - a_{12} \sin\psi_d, -a_{13})$$

$$\phi_{d,0} = \arcsin(a_{11} \sin\psi_d - a_{12} \cos\psi_d)$$

$$\phi_{d,1} = \phi_{d,0} - \text{sign}(\phi_{d,0})\pi.$$



## 2. 位置控制

### □ 产生期望旋转矩阵的位置控制

尽管每个欧拉角有两个可能的取值，大多数情况下其真值可由式 (\*) 唯一确定。进一步，可由期望的欧拉角  $\phi_d, \theta_d, \psi_d$  计算得到  $R_d$ 。

下面进一步考虑期望拉力  $f_d$  的计算，因为  $f_d$  和  $\mathbf{r}_{3,d}$  耦合在一起，因此我们进行如下处理。首先在  $g\mathbf{e}_3 - \frac{f_d}{m}\mathbf{r}_{3,d} = \mathbf{a}_d$  两边同乘  $\mathbf{r}_{3,d}^T$ ，利用  $\mathbf{r}_{3,d}^T\mathbf{r}_{3,d} = 1$  可以得到

$$f_d = m\mathbf{r}_{3,d}^T (g\mathbf{e}_3 - \mathbf{a}_d)$$

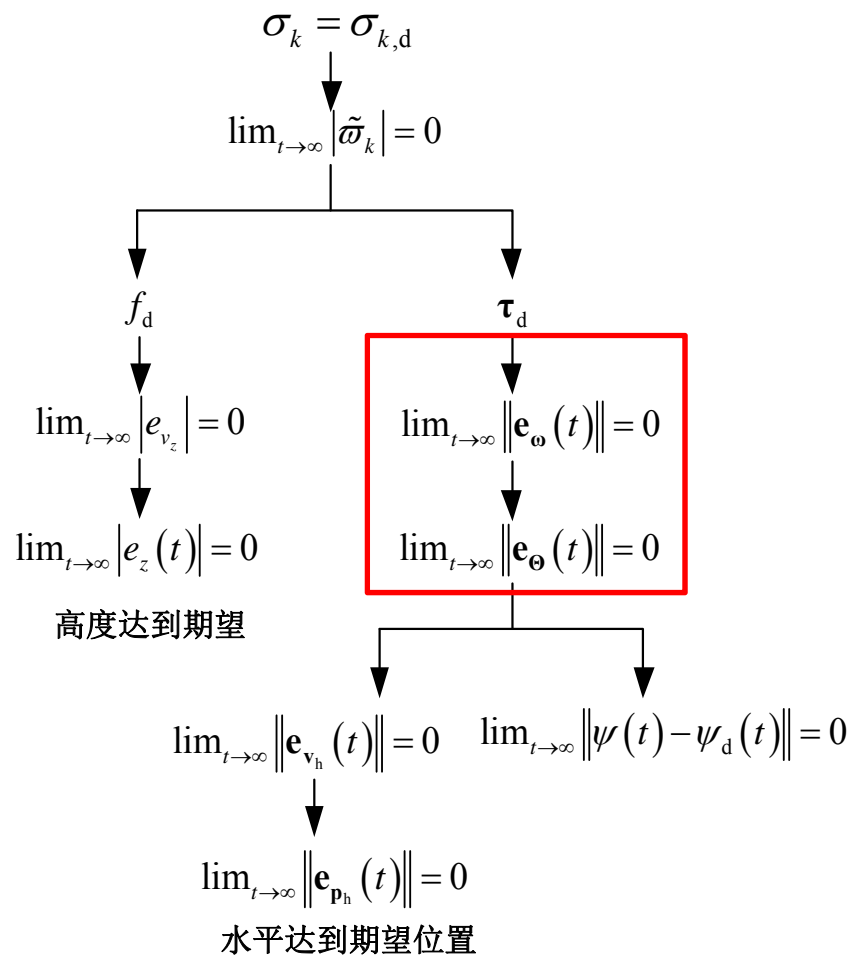
如果限定  $f_d \in [f_{\min}, f_{\max}]$ ，那么姿态控制器可以写为

$$f_d = \text{sat}_{\text{gd}} \left( m\mathbf{r}_{3,d}^T (g\mathbf{e}_3 - \mathbf{a}_d) - \frac{f_{\min} + f_{\max}}{2}, \frac{f_{\max} - f_{\min}}{2} \right) + \frac{f_{\min} + f_{\max}}{2}$$



### 3. 姿态控制

多旋翼采用**内外层控制**，外层控制器为内层控制器提供指令，即把位置通道控制器的输出 ( $\Theta_{hd}$  或  $R_d$ ) 作为姿态控制系统的参考值。后续的姿态控制的目标是实现  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Theta_h(t) - \Theta_{hd}(t)\| = 0$  或者  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|R^T R_d - I_3\| = 0$ 。不仅如此，一般要求姿态环的收敛速度比位置通道动态快4~10倍。从位置通道看来，可以认为姿态控制目标  $\Theta_h = \Theta_{hd}$  或  $R(t) = R_d(t)$  已经被实现了。因此，剩余的控制目标就传给了姿态控制。**只要姿态控制被很好地实现，水平位置跟踪的问题就可以被解决。**下面介绍姿态控制。



多旋翼控制目标关系图



## 3. 姿态控制

### □ 基本概念

多旋翼姿态控制是位置控制的基础。常见的刚体姿态描述方法为欧拉角描述方法和旋转矩阵描述方法。

表11.1 姿态参数性能对比

姿态参数	优点	缺点
欧拉角	无冗余参数，物理意义明确	俯仰角为90度时存在奇异，存在大量超越函数运算，死锁；偏航角从 $2\pi$ 到0的过渡问题。
旋转矩阵	无奇异，无超越函数运算，可用于连续旋转表示，全局且唯一，便于插值	六个冗余参数



## 3. 姿态控制

### □ 基于欧拉角的控制器设计

姿态控制的目标是已知参考姿态角  $\Theta_d = [\Theta_{hd}^T \ \psi_d]^T$ ，设计控制器  $\tau_d$  使得  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_\Theta(t)\| = 0$ ，其中  $e_\Theta = \Theta - \Theta_d$ 。这里  $\Theta_{hd}$  是由位置控制器给定的，而  $\psi_d$  是任务规划给定的。为了达到这个目的，我们先针对

$$\dot{\Theta} = \omega$$

设计角速度的期望为

$$\omega_d = -K_\Theta e_\Theta$$

其中  $K_\Theta \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  是正定的常值对角矩阵，所有元素都大于0。以上两式构成了角度控制环。在  $\dot{\Theta}_d = \mathbf{0}_{3 \times 1}$  的前提下，当  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\omega(t)\| = 0$  可以使得  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_\Theta(t)\| = 0$  其中  $e_\omega = \omega - \omega_d$ 。接下来的任务是针对

设计期望的转矩

$$J\dot{\omega} = \tau$$

$$\tau_d = -K_{\omega p} e_\omega - K_{\omega i} \int e_\omega - K_{\omega d} \dot{e}_\omega$$

如何加入饱和？

其中  $K_{\omega p}, K_{\omega i}, K_{\omega d} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  是正定常值对角矩阵。以上两式构成了角速度控制环。



## 3. 姿态控制

### □ 基于旋转矩阵的控制器设计

控制器设计的思路为：根据旋转矩阵  $\mathbf{R}$  和期望旋转矩阵  $\mathbf{R}_d$  定义姿态误差矩阵为  $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}_d$ 。由上面的定义可知：当且仅当  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_d$  时， $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{I}_3$ 。基于以上分析可以将基于旋转矩阵的多旋翼姿态跟踪控制的控制目标总结为  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{R}}(t) - \mathbf{I}_3\| = 0$ 。

定义姿态跟踪误差为  $\mathbf{e}_R = \frac{1}{2} \text{vex}(\mathbf{R}_d^T \mathbf{R} - \mathbf{R}^T \mathbf{R}_d)$

其中  $\text{vex}$  运算定位为  $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T \in \mathbb{R}^3, [\mathbf{x}]_x = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}, \text{vex}([\mathbf{x}]_x) = \mathbf{x}$

角速度跟踪误差定义为

$$\mathbf{e}_\omega = \boldsymbol{\omega} - \mathbf{R}^T \mathbf{R}_d \boldsymbol{\omega}_d$$

小角度假设下  $\boldsymbol{\omega}_d = \dot{\boldsymbol{\Theta}}_d$  为期望的角速度，一般情况下可忽略，则  $\mathbf{e}_\omega = \boldsymbol{\omega}$ 。可以设计如下的PD控制器

$$\boldsymbol{\tau}_d = -\mathbf{K}_R \mathbf{e}_R - \mathbf{K}_\omega \mathbf{e}_\omega$$



## 3. 姿态控制

### □ 基于旋转矩阵的控制器设计

其中  $\mathbf{K}_R, \mathbf{K}_\omega \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  为正定增益矩阵。上面设计的PD控制器只可以在悬停位置的小范围内保证系统稳定。为了获得更大范围的稳定性，通过引入误差校正项，设计非线性控制器为：

$$\boldsymbol{\tau}_d = -\mathbf{K}_R \mathbf{e}_R - \mathbf{K}_\omega \mathbf{e}_\omega - \mathbf{J} \left( \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}_x \mathbf{R}^T \mathbf{R}_d \boldsymbol{\omega}_d - \mathbf{R}^T \mathbf{R}_d \dot{\boldsymbol{\omega}}_d \right)$$

此控制器可以保证在几乎任意旋转情况下系统指数稳定。实际中控制器后两项的值很小，直接忽略也可以获得满意的性能。但对于大机动飞行中后两项的值很大，对系统性能的影响很大，则必须予以考虑。具体可参考如下文献。

[3] Lee, T, Leoky M, and McClamroch N H. Geometric tracking control of a quadrotor UAV on SE(3). In: Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control. Atlanta, Georgia, USA: IEEE, 2010. 5420–5425.





## 4. 控制分配

### □ 基本概念

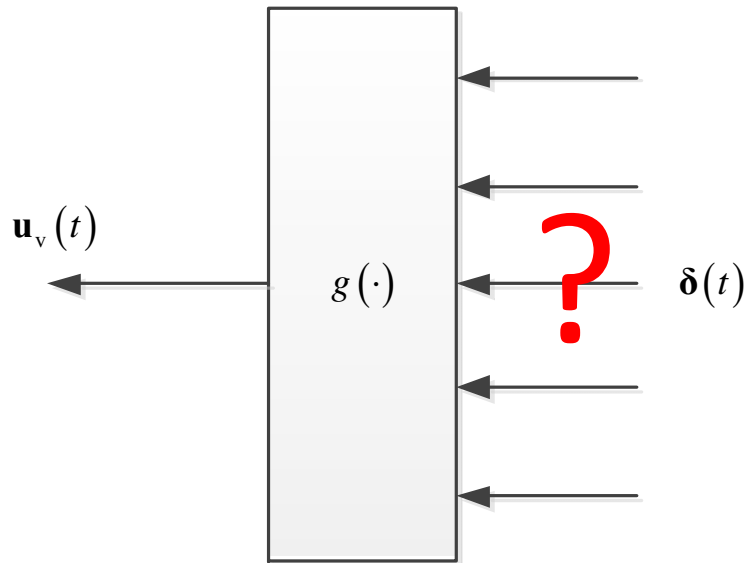
简单来说，控制分配问题可描述为：  
给定  $u_v(t)$ ，寻找  $\delta(t)$  使得

$$u_v(t) = g(\delta(t))$$

其中  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  为被控系统中执行机构控制输入到伪控制输入的映射。通常假设执行机构偏转量与其产生的控制力矩之间为线性函数关系，则可得到线性控制分配问题

$$u_v(t) = B\delta(t)$$

其中  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  为控制效率矩阵。



控制分配示意图

- 上层控制和底层控制分离
- 有效分配，防止饱和
- 通过分配，提高对故障及损伤的鲁棒性
- ...



## 4. 控制分配

### □ 多旋翼控制分配的自驾仪实现

+字形四旋翼和多旋翼的控制效率模型见第六讲：

$$\begin{bmatrix} f \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_T & c_T & c_T & c_T \\ 0 & -dc_T & 0 & dc_T \\ dc_T & 0 & -dc_T & 0 \\ c_M & -c_M & c_M & -c_M \end{bmatrix}}_{M_4} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} f \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_T & c_T & \cdots & c_T \\ -dc_T \sin \varphi_1 & -dc_T \sin \varphi_2 & \cdots & -dc_T \sin \varphi_{n_r} \\ dc_T \cos \varphi_1 & dc_T \cos \varphi_2 & \cdots & dc_T \cos \varphi_{n_r} \\ c_M \delta_1 & c_M \delta_2 & \cdots & c_M \delta_{n_r} \end{bmatrix}}_{M_{n_r}} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \vdots \\ \omega_{n_r}^2 \end{bmatrix}$$

对于四旋翼来说， $M_4 \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  可逆，可直接求逆得到控制分配矩阵  $P_4 = M_4^{-1}$ 。这种分配是唯一的。然而，对于螺旋桨数大于4的多旋翼，分配可以有无穷多种。分配过程中，可能让某个螺旋桨的转速达到饱和。因此，好的控制分配算法就十分重要。在开源的自驾仪中，一般的算法是通过**求伪逆**得到控制分配矩阵，即

$$P_{n_r} = M_{n_r}^\dagger$$

其中  $P_{n_r} \in \mathbb{R}^{n_r \times 4}$ ， $M_{n_r} \in \mathbb{R}^{4 \times n_r}$ 。



## 4. 控制分配

### □ 多旋翼控制分配的自驾仪实现

在实际中，通过控制器得到期望拉力  $f_d$  和期望力矩  $\tau_d$  后，进一步再通

$$\begin{pmatrix} \omega_{d,1}^2 \\ \omega_{d,2}^2 \\ \vdots \\ \omega_{d,n_r}^2 \end{pmatrix} = \mathbf{P}_{n_r} \begin{pmatrix} f_d \\ \tau_d \end{pmatrix}$$

与参数相关

可得到每个螺旋桨的期望转速  $\omega_{d,i}, i=1,2,\dots,n_r$ 。

在工程实际中， $\mathbf{M}_{n_r}$  中的参数未知，即  $c_T, c_M, d$ （具体定义参见第六讲）未知时。那这又是如何进行控制分配的呢？





## 4. 控制分配

### □ 多旋翼控制分配的自驾仪实现

要说明这个问题，首先定义控制效率矩阵为

$$\mathbf{M}_{n_r}(c_T, c_M, d) = \begin{bmatrix} c_T & c_T & \cdots & c_T \\ -dc_T \sin \varphi_1 & -dc_T \sin \varphi_2 & \cdots & -dc_T \sin \varphi_{n_r} \\ dc_T \cos \varphi_1 & dc_T \cos \varphi_2 & \cdots & dc_T \cos \varphi_{n_r} \\ c_M \sigma_1 & c_M \sigma_2 & \cdots & c_M \sigma_{n_r} \end{bmatrix}$$

它满足

$$\mathbf{M}_{n_r}(c_T, c_M, d) = \mathbf{P}_a \mathbf{M}_{n_r}(1, 1, 1)$$

其中  $\mathbf{P}_a = \text{diag}(c_T \quad dc_T \quad dc_T \quad c_M)$ 。因此，有如下关系

$$\mathbf{M}_{n_r}^\dagger(c_T, c_M, d) = \underbrace{\mathbf{M}_{n_r}^\dagger(1, 1, 1)}_{\text{已知参数}} \underbrace{\mathbf{P}_a^{-1}}_{\text{未知参数}}$$

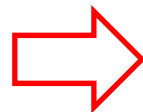


# 4. 控制分配

## □ 多旋翼控制分配的自驾仪实现

以六旋翼为例， $M_6(c_T, c_M, d)$  可以表示为

$$M_6(c_T, c_M, d) = \begin{bmatrix} c_T & c_T & c_T & c_T & c_T & c_T \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}dc_T}{2} & -\frac{\sqrt{3}dc_T}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}dc_T}{2} & \frac{\sqrt{3}dc_T}{2} \\ dc_T & \frac{dc_T}{2} & -\frac{dc_T}{2} & -dc_T & -\frac{dc_T}{2} & \frac{dc_T}{2} \\ c_M & -c_M & c_M & -c_M & c_M & -c_M \end{bmatrix}$$



$$M_6^\dagger(1,1,1) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} & 1 & -1 \\ 1 & -\sqrt{3} & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & \sqrt{3} & -1 & 1 \\ 1 & \sqrt{3} & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

于是

$$\begin{pmatrix} \omega_{d,1}^2 \\ \omega_{d,2}^2 \\ \vdots \\ \omega_{d,6}^2 \end{pmatrix} = M_6^\dagger(1,1,1) P_a^{-1} \begin{pmatrix} f_d \\ \tau_d \end{pmatrix} = M_6^\dagger(1,1,1) \begin{pmatrix} f_d/c_T \\ \tau_{dx}/dc_T \\ \tau_{dy}/dc_T \\ \tau_{dz}/c_M \end{pmatrix}$$

自驾仪中，控制器都是PID控制器。可以通过调节PID参数来补偿未知量。

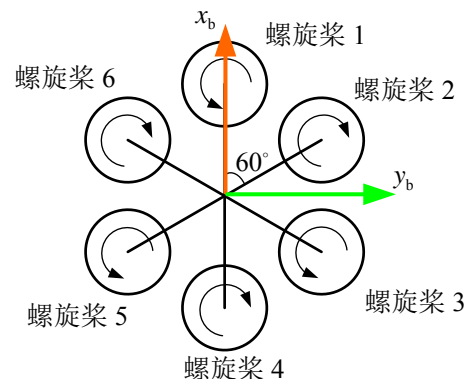


图11.7 常规布局的六旋翼



## 5. 电机控制

假设螺旋桨转速为  $\omega_k, k=1, 2, \dots, n_r$ 。下面给出基于电机油门指令的电机控制器设计。控制目标为：设计每个电机的油门指令  $\sigma_{d,k}$  使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\omega_k - \omega_{d,k}| = 0。$$

### □ 闭环控制

以油门指令作为输入的动力单元模型见第六讲，为

$$\omega_k = \frac{1}{T_m s + 1} C_R \sigma_k + \omega_b$$

其中油门指令  $\sigma_k$  为输入，螺旋桨转速  $\omega_k$  为输出。电机控制的目标是使控制误差  $\tilde{\omega}_k = \omega_k - \omega_{d,k}$  最小化，设计控制器为

$$\sigma_{d,k} = -k_{\omega p} \tilde{\omega}_k - k_{\omega i} \int \tilde{\omega}_k - k_{\omega d} \dot{\tilde{\omega}}_k$$

其中  $k_{\omega p}, k_{\omega i}, k_{\omega d} \in \mathbb{R}_+$ 。



## 5. 电机控制

### □ 开环控制

大多数开源自驾仪采用开环控制，在得到  $f_d, \tau_d$  之后，期望螺旋桨转速  $\omega_{d,k}, k=1,2,\dots,n_r$  可通过控制分配直接得到，其与电机油门指令成正比。因此，设计控制器如下

$$\sigma_{d,k} = a\omega_{d,k} + b$$

其中未知参数  $a, b$  可以通过位置和姿态控制器中的PID参数来补偿。





## 6. 本讲小结

1. 多旋翼控制器的设计基于特定的控制要求，在不同的控制要求下需要选用不同的数学模型和控制方法。
2. 多旋翼的控制器设计是相互嵌套的，最终的控制系統包含多个闭环反馈，各部分相互协调共同实现多旋翼的飞行控制。
3. 对一流的多旋翼来说，这是不够的。对于所有多旋翼都希望**减小振动和节省能量**；对于如海上起飞的多旋翼都希望具有一定的**抗风性**；对于用于拍摄的多旋翼，特别是无云台的多旋翼，需要**高精度悬停**；对于多旋翼表演等场合，需要多旋翼实现大机动飞行。那么，人们不禁会问：如何设计底层控制，使得多旋翼最大可能减少多旋翼振动、节省能量、在大风中起飞、高精度悬停、大机动飞行？最终，**我们需要进一步从实际问题出发，研究和设计适当的底层控制器。**



# 资源

---

(1) 可靠飞行控制研究组主页课程中心(全部课件下载)

<http://rfly.buaa.edu.cn/course>

(2) 关注可靠飞行控制研究组公众号 buaarfly(文章、资讯等)

(3) 多旋翼设计与控制交流QQ群:183613048

(4) 视频课程(MOOC)同步发布, 网易云课堂搜索 “多旋翼”

<http://study.163.com/course/introduction/1003715005.htm>

(5) 同名中文书本教材《多旋翼飞行器设计与控制》即将在电子工业出版社出版, 敬请期待

(6) 有疑问可联系课程总助教戴训华, 邮箱: [dai@buaa.edu.cn](mailto:dai@buaa.edu.cn)

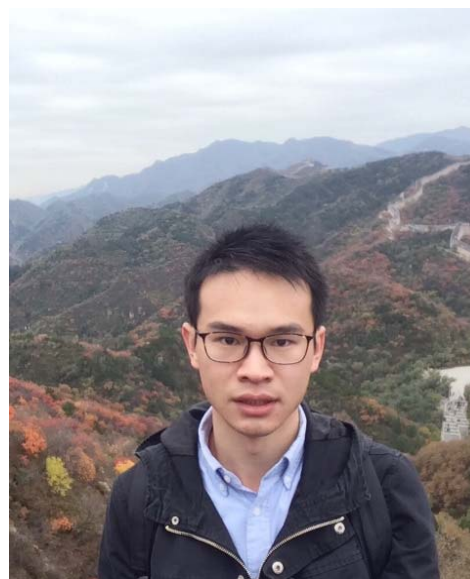


# 致谢

## 感谢控制组同学



任锦瑞



戴训华

为本节课程准备作出的贡献。



---

# 谢谢！



---

# 多旋翼飞行器设计与控制

## 第十二讲 基于半自主自驾仪 的位置控制

全权 副教授

qq\_buaa@buaa.edu.cn

自动化科学与电气工程学院

北京航空航天大学



北航可靠飞行控制研究组

BUAA Reliable Flight Control Group



# 东方智慧



登高望远



# 核心问题

---

如何利用半自主飞控平台控制多旋翼完成对指定目标位置的跟踪?





# 大纲

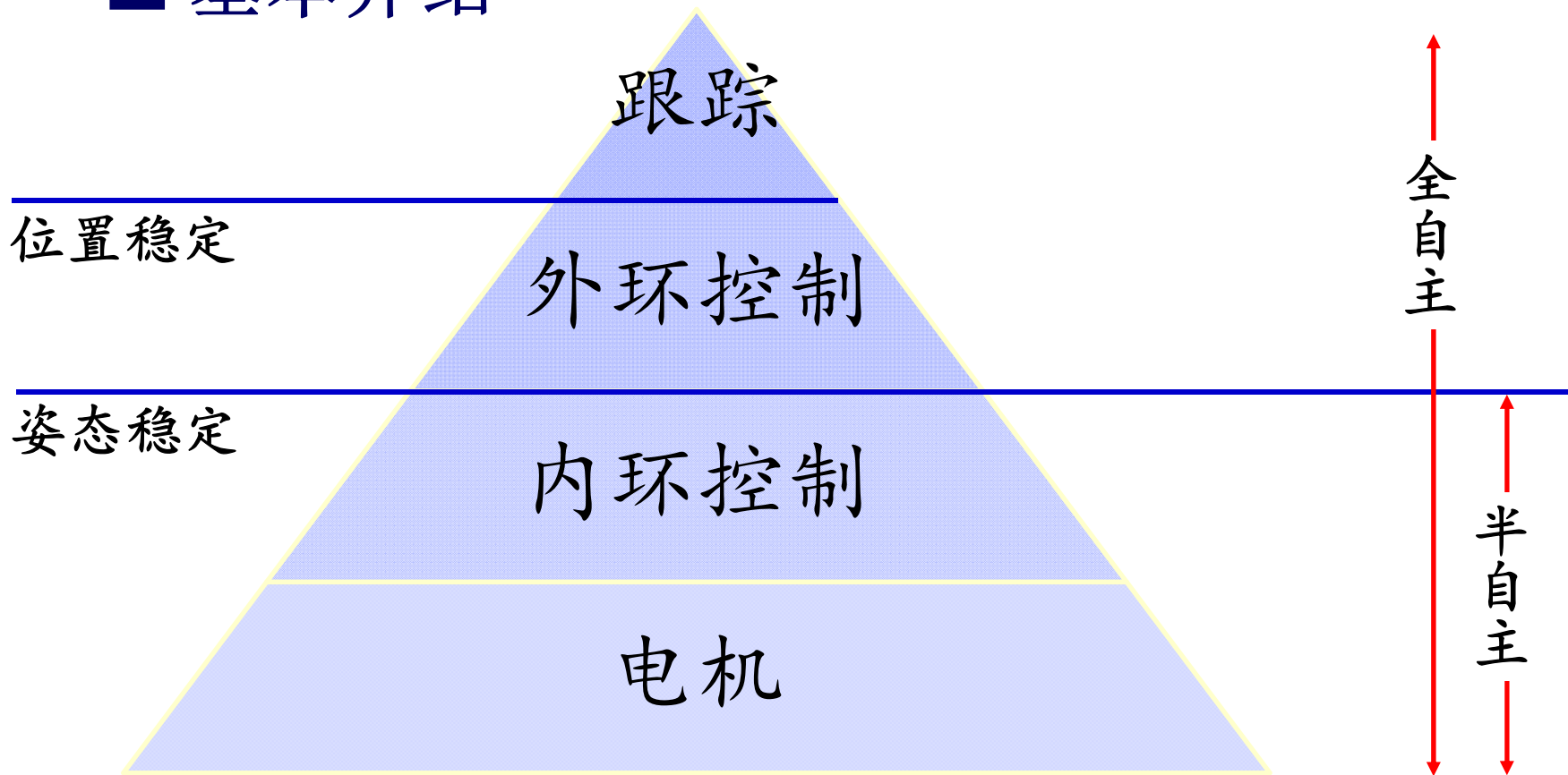
---

1. 问题描述
2. 系统辨识
3. 位置控制器设计
4. 仿真研究
5. 本讲小结



# 1. 问题描述

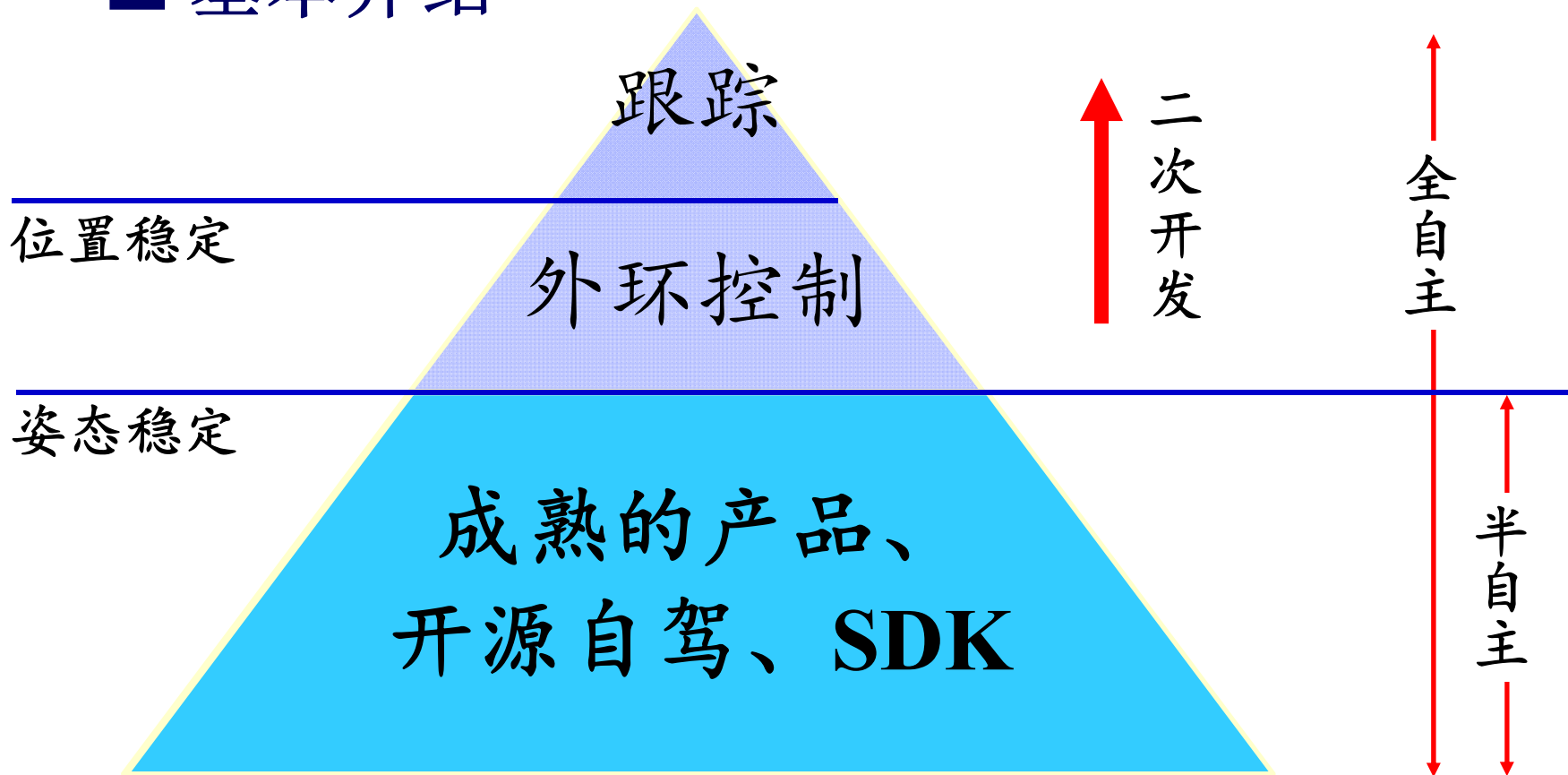
## □ 基本介绍





# 1. 问题描述

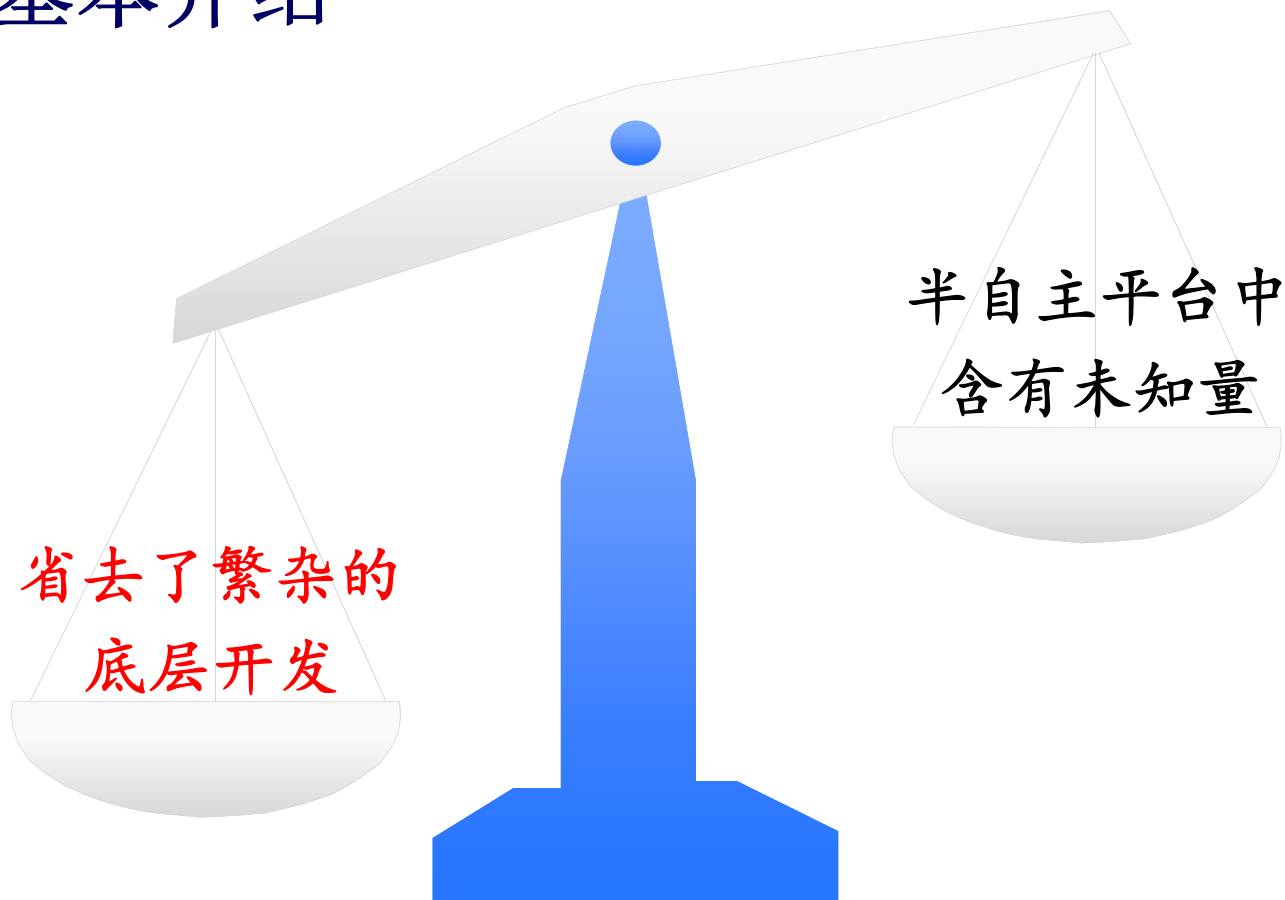
## □ 基本介绍





# 1. 问题描述

## □ 基本介绍





# 1. 问题描述

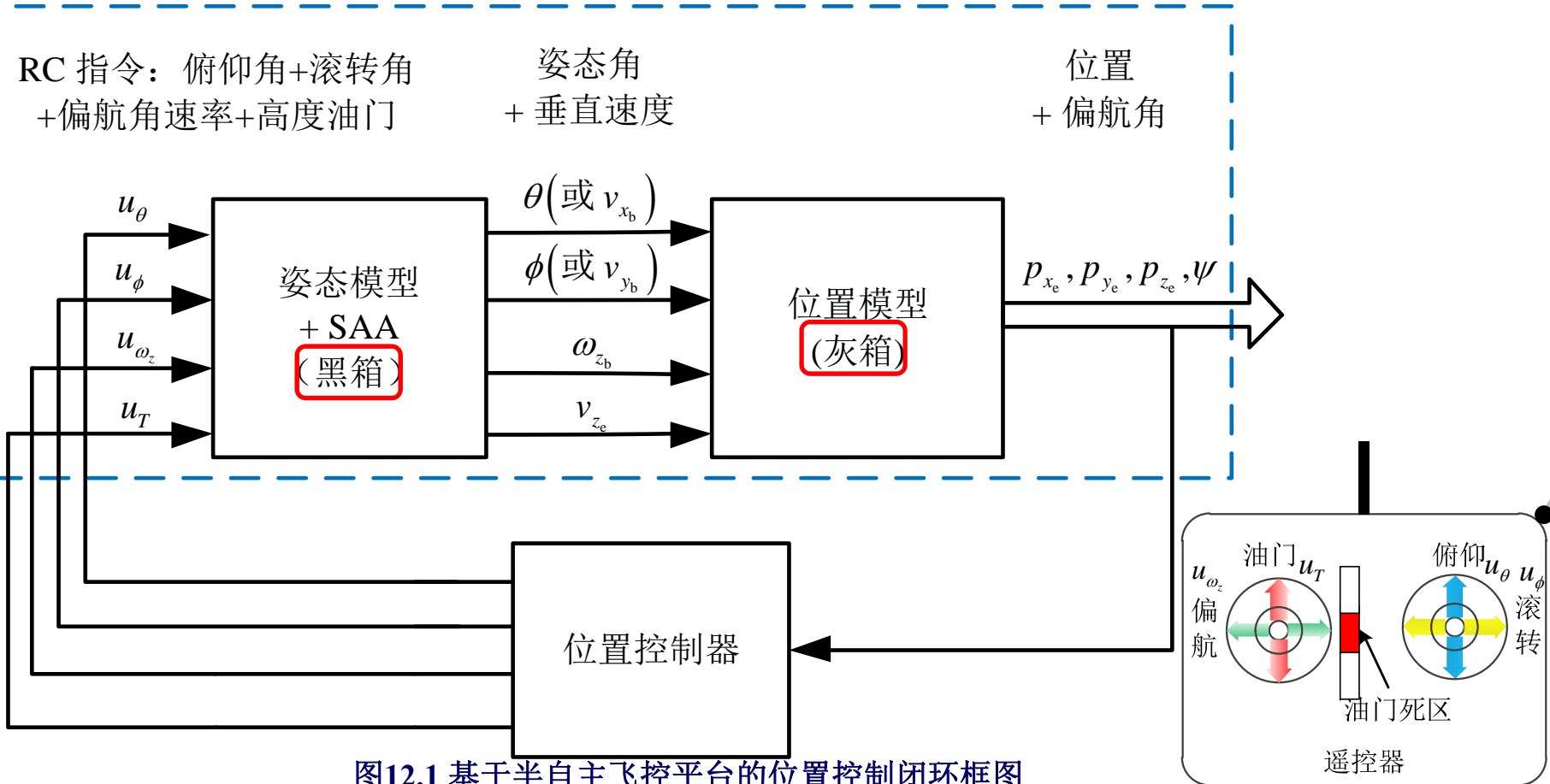
## □ 基本介绍





# 1. 问题描述

## □ 数学模型

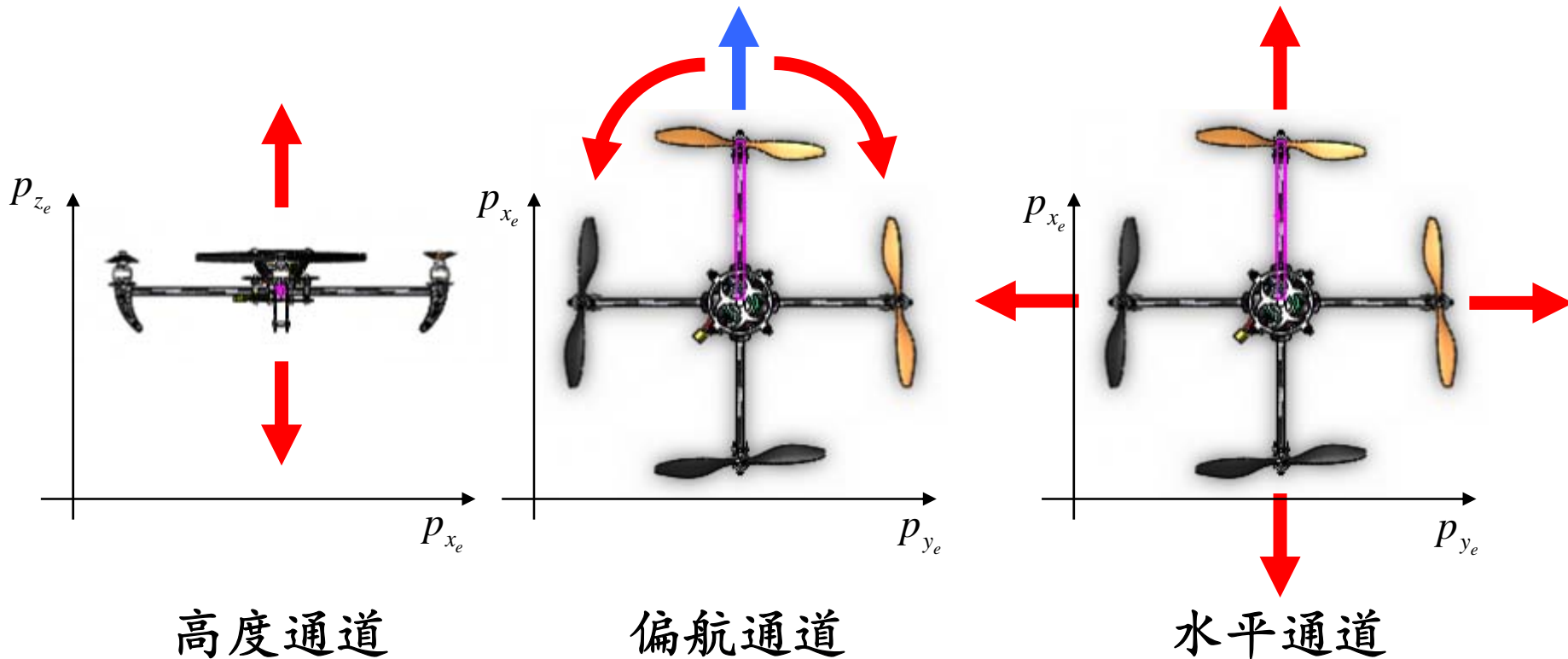




# 1. 问题描述

## □ 数学模型

在半自主飞控平台的作用下解耦为三个相对独立的通道







# 1. 问题描述

## □ 数学模型（假设）

高度通道

$$\dot{p}_{z_e} = v_{z_e}$$

$$\dot{v}_{z_e} = -k_{v_z} v_{z_e} - k_{u_T} u_T$$

偏航通道

$$\dot{\psi} = \omega_z$$

$$\dot{\omega}_z = -k_{\omega_z} \omega_z + k_{u_{\omega_z}} u_{\omega_z}$$

水平通道

$$\dot{\mathbf{p}}_h = \mathbf{R}_{\psi} \mathbf{v}_{h_b}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{h_b} = -\mathbf{K}_{v_{h_b}} \mathbf{v}_{h_b} - g \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Theta_h$$

$$\dot{\Theta}_h = \omega_{h_b}$$

$$\dot{\omega}_{h_b} = -\mathbf{K}_{\Theta_h} \Theta_h - \mathbf{K}_{\omega_{h_b}} \omega_{h_b} + \mathbf{K}_{u_h} \mathbf{u}_h$$

$$\mathbf{u}_h = \begin{bmatrix} u_{\phi} & u_{\theta} \end{bmatrix}^T$$

参数取决于半自主  
飞控平台和飞行器  
本身，未知



# 1. 问题描述

## □ 目标

对于一条期望轨迹，可以分解为位置和偏航两个部分，即

$$\mathbf{p}_d(t) \text{ 和 } \psi_d(t)$$

对接目标:  $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_d(t)\| \rightarrow 0$  或者  $\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_d(t) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbf{0}_{4 \times 1}, \delta)$

其中,  $\mathbf{x} = [\mathbf{p}^T \ \psi]^T$ ,  $\mathbf{x}_d = [\mathbf{p}_d^T \ \psi_d]^T$

$\mathcal{B}(\mathbf{0}_{4 \times 1}, \delta)$  表示原点附近的以  $\delta$  为半径的邻域。



## 2. 系统辨识

### □ 目的

在进行二次开发时，我们仍然希望对模型的信息有所了解。但此时模型是由“四旋翼本身+半自主飞控平台”构成的。而其中包含有很多未知信息，系统辨识则可以把这些未知信息解算出来。

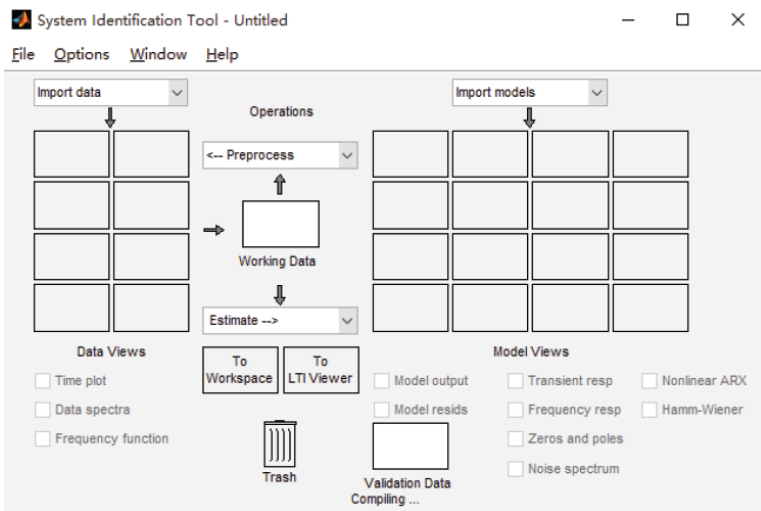


图12.2 Matlab 系统辨识工具箱

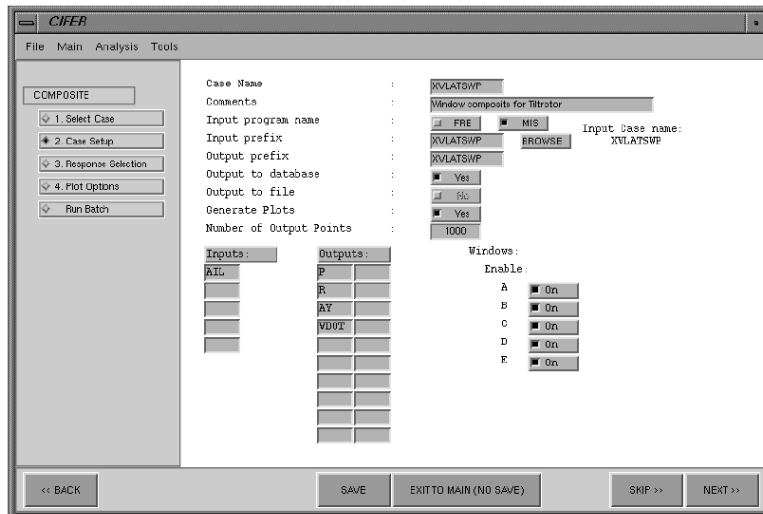
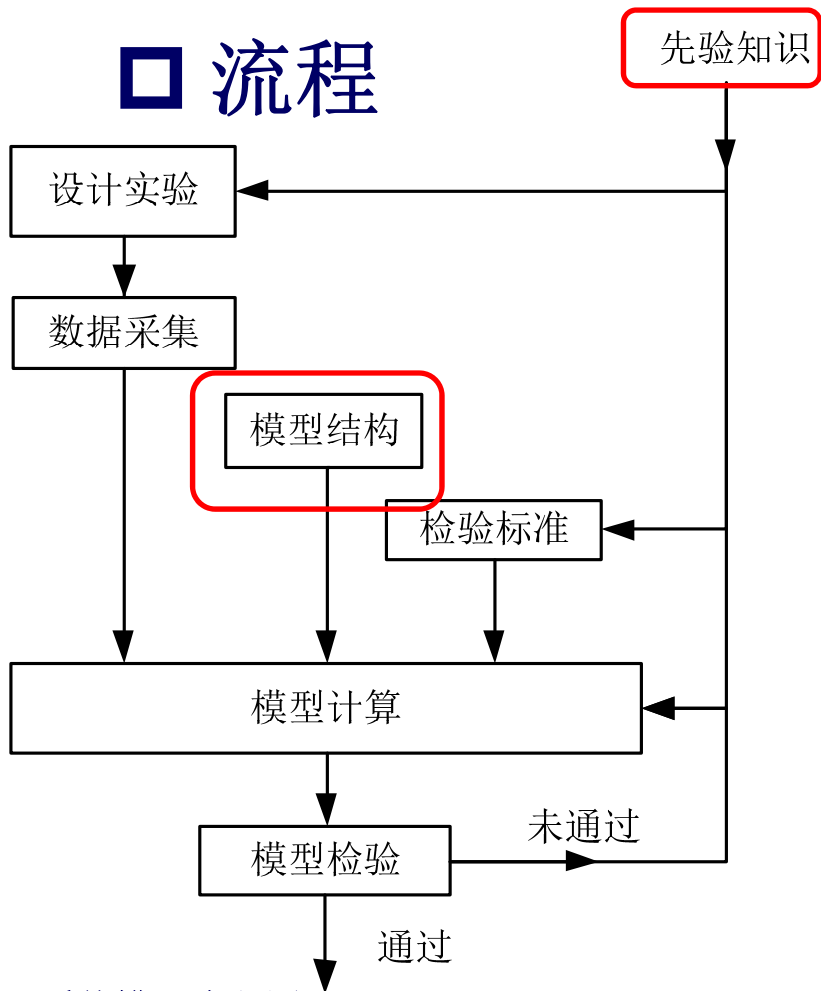


图12.3 CIFER 工具箱



## 2. 系统辨识

### □ 流程



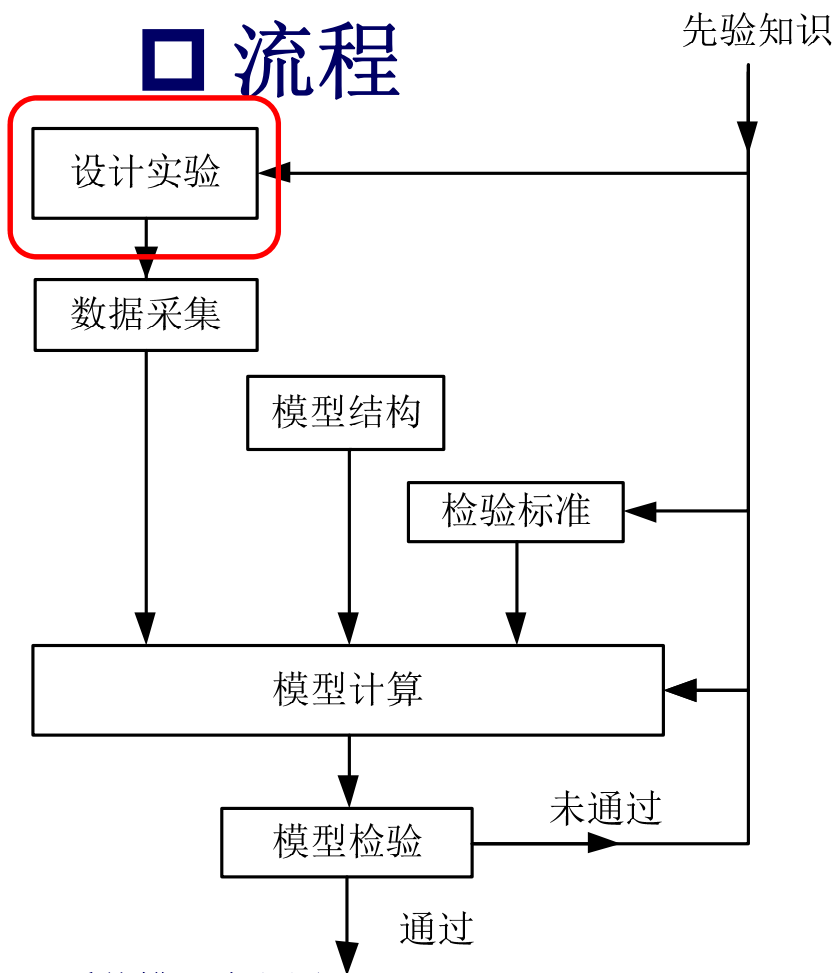
1. 先验知识：先验知识指关于系统运动规律、数据以及其他方面的已有知识。有时它也包含了使用者的工程经验与直觉。这些知识对选择模型结构、设计实验、决定辨识方法和检验准则等都有重要作用。用于不同的辨识目的，同一系统的先验知识可能会有很大差别。

图12.4 系统辨识流程图



## 2. 系统辨识

### □ 流程



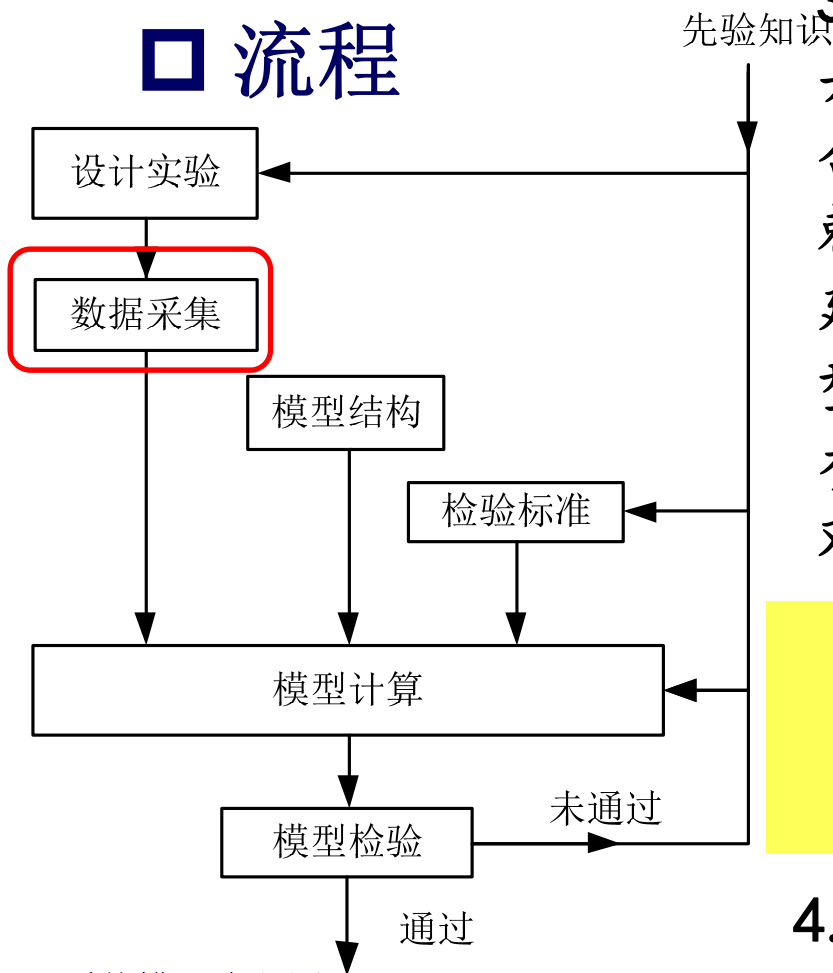
2. 实验设计：输入输出数据的采集常常是需要进行特殊的辨识实验设计的。在实验设计中，可能要确定测量哪些信号，什么时候测量以及选择输入等。设计实验的目的就在于通过这些选择使输入输出数据在已知的约束下，能最大化的表现出系统的信息。

图12.4 系统辨识流程图



## 2. 系统辨识

### □ 流程



3. 模型结构：选择一系列备选模型，并通过后续的验证工作中确定出最合适的模型。这一系列模型的确定依赖于先验知识与工程经验。有些时候，建立精细的物理模型可以引导备选模型的选择，从而得到一个未知参数的参数化模型。然后通过参数估计方法对模型中的参数进行计算。

线性/非线性？连续/离散？  
传递函数/状态空间？系统阶数？……

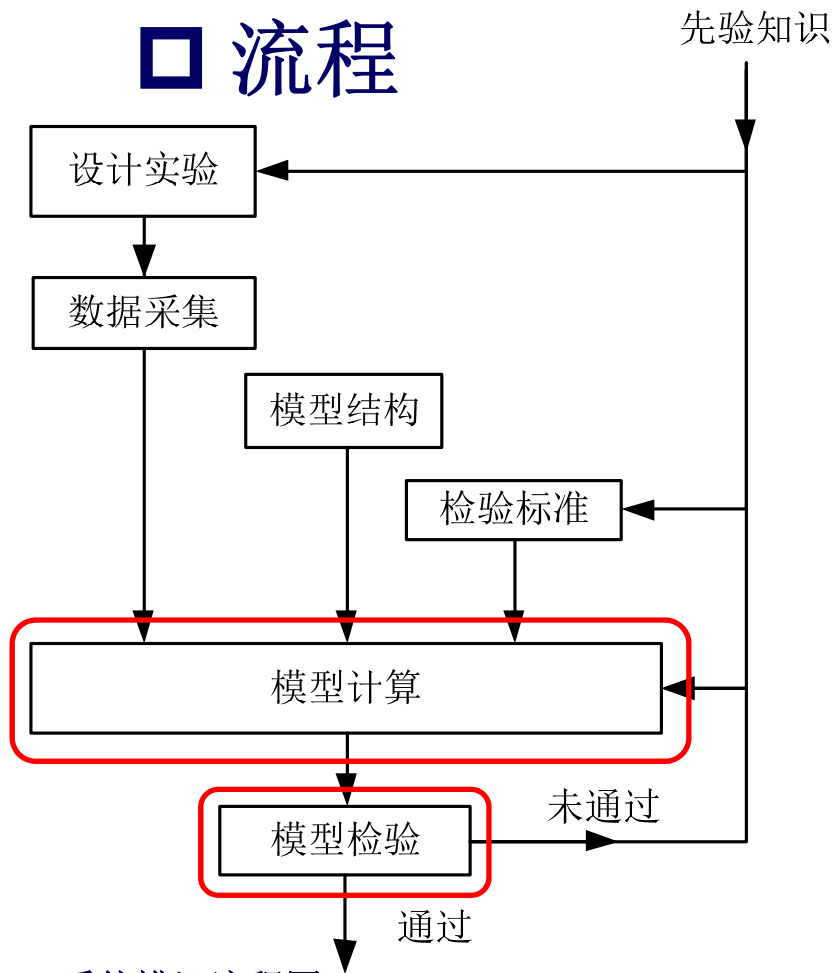
4. 数据采集：通过真实实验得到数据

图12.4 系统辨识流程图



## 2. 系统辨识

### □ 流程



5. 模型计算：模型计算就是根据某一给定的优化指标，采用合适的优化方法来优化备选模型的未知参数。

6. 模型检验：建立一个标准来检验备选模型与计算出的参数是否满足要求。通常，该标准的确定依赖于观测数据、先验知识以及待辨识模型的用途。检验通过，则得到最终模型，否则重复上述步骤。

图12.4 系统辨识流程图





## 2. 系统辨识

### □ 两种辨识

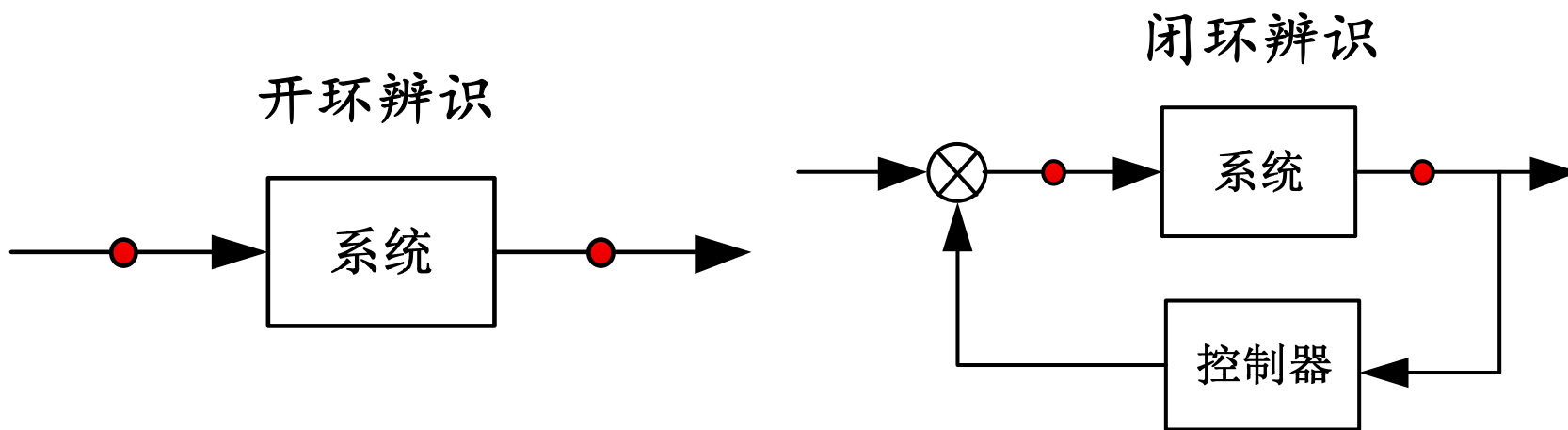


图12.5 系统辨识的两种实验方法

系统**稳定**时采用的方法  
激励往往比较充分

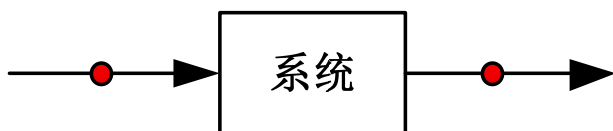
系统**不稳定**时采用的方法  
但由于控制器的存在，激励  
往往不充分



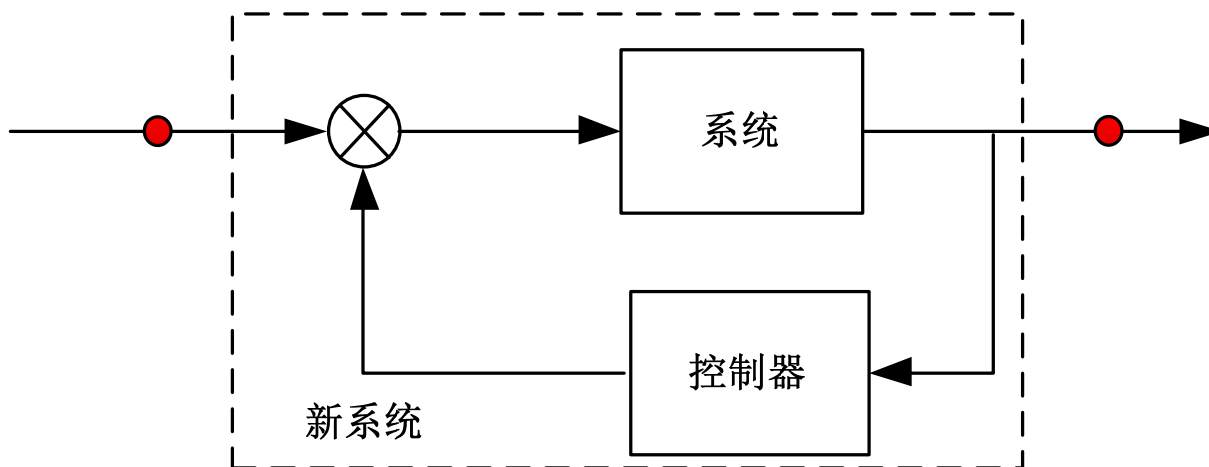
## 2. 系统辨识

### □ 两种辨识

可以应对**不稳定**系统，  
激励充分，但不能精确的  
知道原来的辨识对象

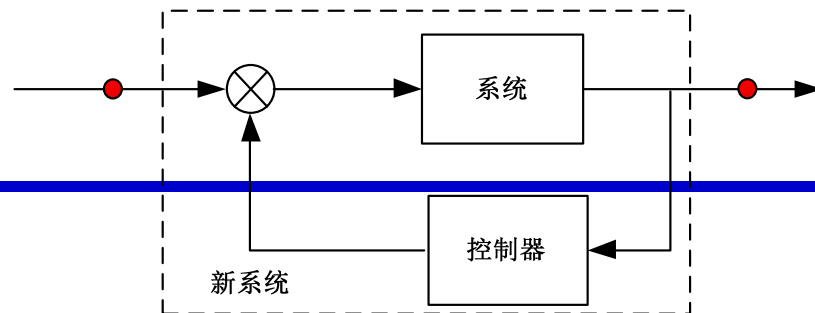


一种折中的开环辨识方法 





## 2. 系统辨识



### □ 应用流程-高度通道

不稳定

$$\dot{p}_{z_e} = v_{z_e}$$

$$\dot{v}_{z_e} = -k_{v_z} v_{z_e} - k_{u_T} u_T$$

加入自定义控制器

$$u_T = k_{p_z} p_{z_e} + u_{p_z}$$

稳定

$$\dot{p}_{z_e} = v_{z_e}$$

$$\dot{v}_{z_e} = -k_{u_T} k_{p_z} p_{z_e} - k_{v_z} v_{z_e} - k_{u_T} u_{p_z}$$

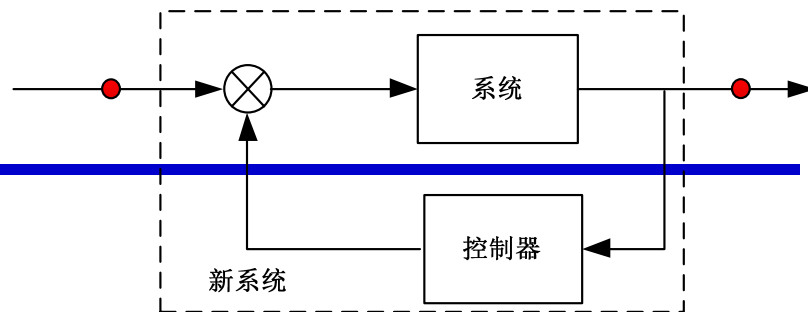
所选模型

$$p_{z_e}(s) = G_{p_z u_{p_z}}(s) u_{p_z}(s)$$



## 2. 系统辨识

### □ 应用流程-高度通道



需要说明的是如果垂直速度是可以直接测量的，那么从  $u_T$  到  $v_{z_e}$  的通道是稳定的，并不需要额外设计控制器就可以直接进行辨识。此时，该通道相应的传递函数为

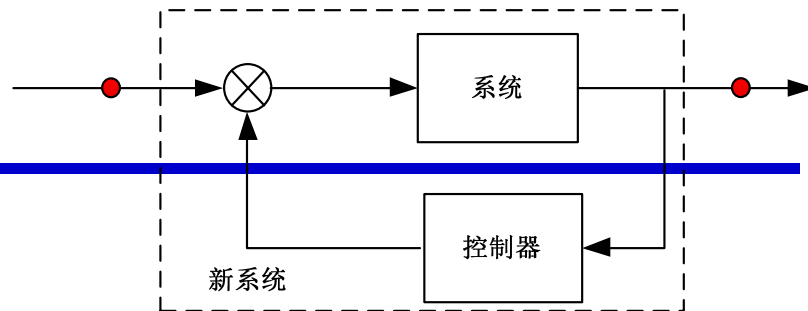
$$v_{z_e}(s) = G_{v_{z_e} u_T}(s) u_T(s)$$

进而有

$$p_{z_e}(s) = \frac{1}{s} G_{v_{z_e} u_T}(s) u_T(s)$$



## 2. 系统辨识



### □ 应用流程-偏航通道

不稳定

$$\dot{\psi} = \omega_z$$

$$\dot{\omega}_z = -k_{\omega_z} \omega_z + k_{u_{\omega_z}} u_{\omega_z}$$

$$u_{\omega_z} = -k_{\psi} \psi + u_{\psi}$$

稳定

$$\dot{\psi} = \omega_z$$

$$\dot{\omega}_z = -k_{u_{\omega_z}} k_{\psi} \psi - k_{\omega_z} \omega_z + k_{u_{\omega_z}} u_{\psi}$$

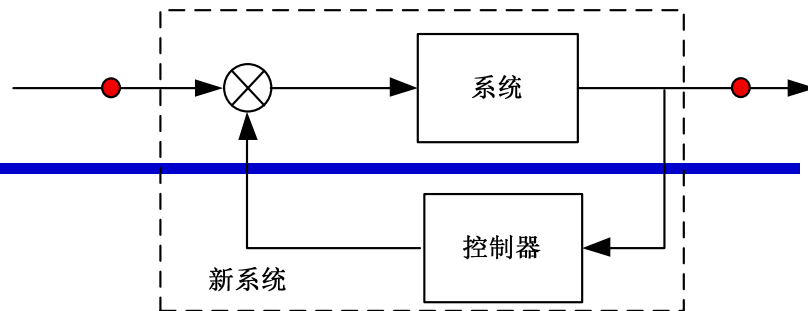
所选模型

$$\psi(s) = G_{\psi u_{\psi}}(s) u_{\psi}(s)$$



## 2. 系统辨识

### □ 应用流程-偏航通道



需要注意的是，如果能直接测量到  $\omega_z$ ，那么从  $u_{\omega_z}$  到  $\omega_z$  的通道是稳定的，所以对此通道可以直接进行辨识而不需要额外设计控制器。在这种情况下，该通道相应的传递函数为

$$v_{z_e}(s) = G_{v_{z_e} u_T}(s) u_T(s)$$

进而有

$$p_{z_e}(s) = \frac{1}{s} G_{v_{z_e} u_T}(s) u_T(s)$$



## 2. 系统辨识

### □ 应用流程-水平通道

水平通道的辨识是在对高度通道和偏航通道实现了控制后进行的，因此，在控制器的作用下，偏航通道满足  $\psi \approx \psi_d$ 。为了得到一个更好的辨识结果，通常将偏航角固定于一个合理的期望偏航角上。那么， $\mathbf{R}_\psi$  为一个常数矩阵。该通道可以用如下传递函数形式表达

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{h_e}(s) &= \text{diag}\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{s}\right) \mathbf{R}_\psi \mathbf{G}_{v_{hb} u_h}(s) \mathbf{u}_h(s) \\ &= \mathbf{R}_\psi \text{diag}\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{s}\right) \mathbf{G}_{v_{hb} u_h}(s) \mathbf{u}_h(s) \end{aligned}$$

由于  $\mathbf{R}_\psi$  的存在，水平通道较其他两个通道控制难度更大。因此，下面将会为水平通道设计速度控制器。





## 2. 系统辨识

### □ 应用流程-水平通道

如果半自主自驾仪考虑了速度反馈，那么水平通道中的  $G_{v_{hb} u_h}(s)$  是稳定的，可以直接进行系统辨识。如果没有引入速度反馈，那么需要设计控制器如下

$$\dot{v}_{hb} = -K_{v_{hb}} v_{hb} - g \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Theta_h \quad u_h = -K'_{v_{hb}} v_{hb} + u_{v_h}$$

$$\dot{\Theta}_h = \omega_{hb}$$

$$\dot{\omega}_{hb} = -K_{\Theta_h} \Theta_h - K_{\omega_{hb}} \omega_{hb} + K_{u_h} u_h$$



$$u_h = -K'_{v_{hb}} v_{hb} + u_{v_h}$$

$$\dot{v}_{hb} = -K_{v_{hb}} v_{hb} - g \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Theta_h$$

$$\dot{\Theta}_h = \omega_{hb}$$

$$\dot{\omega}_{hb} = -K_{u_h} K'_{v_{hb}} v_{hb} - K_{\Theta_h} \Theta_h - K_{\omega_{hb}} \omega_{hb} + K_{u_h} u_{v_h}$$

$$v_{hb}(s) = G_{v_{hb} u_{v_h}}(s) u_{v_h}(s)$$





## 3. 位置控制器设计

### □ PID控制器

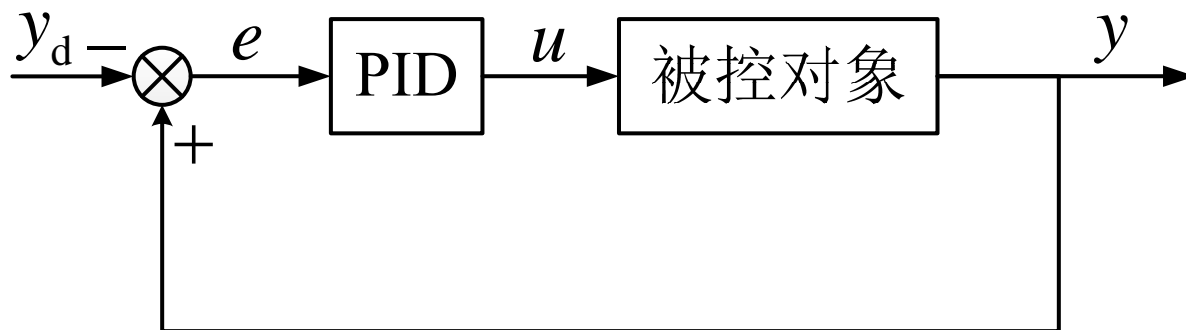


图12.5 PID控制框图

$$u_T = -k_{p_{z_p}} (p_{z_e} - p_{z_{e,d}}) - k_{p_{z_d}} (\dot{p}_{z_e} - \dot{p}_{z_{e,d}}) - k_{p_{z_i}} \int (p_{z_e} - p_{z_{e,d}})$$

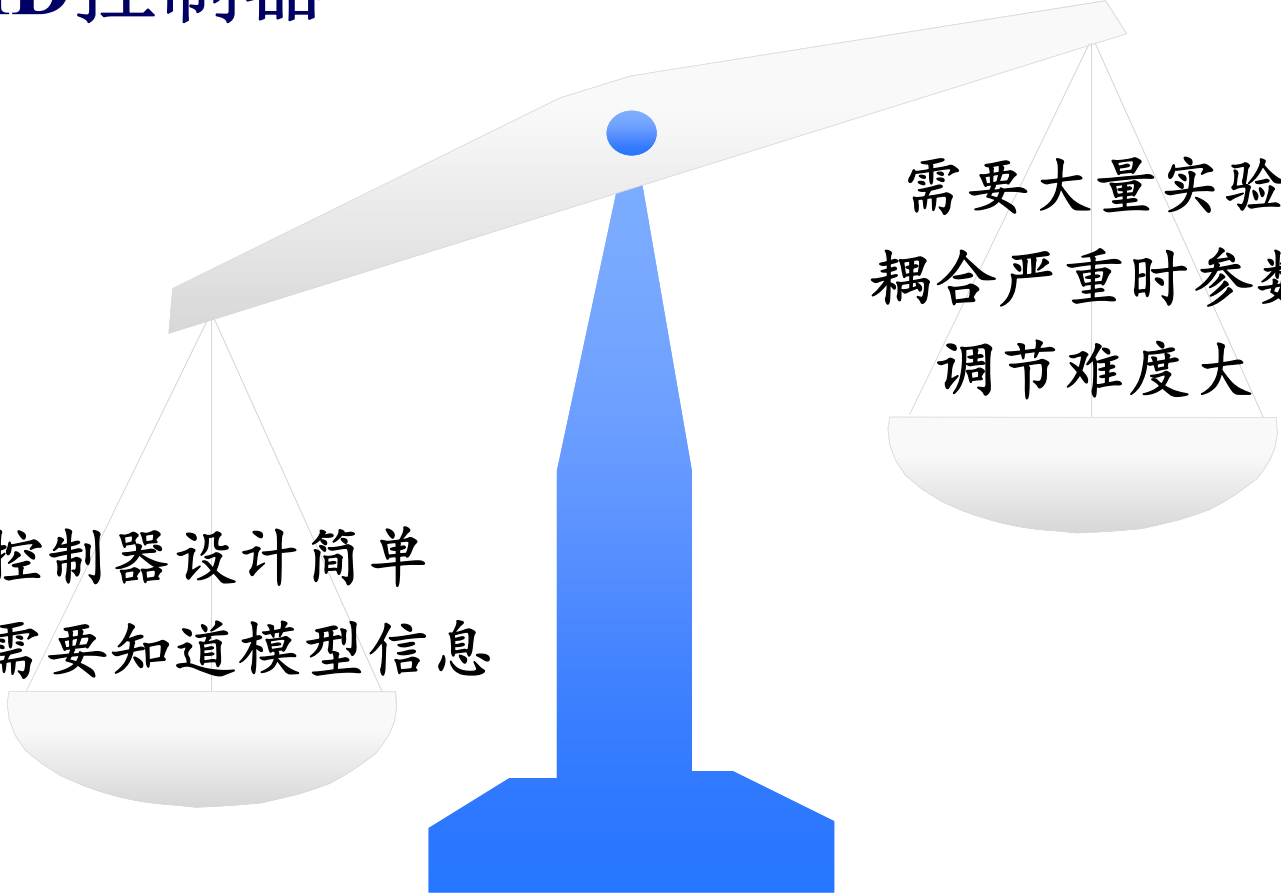
$$u_{\omega_z} = -k_{\psi_p} (\psi - \psi_d) - k_{\psi_d} (\omega_z - \dot{\psi}_d) - k_{\psi_i} \int (\psi - \psi_d)$$

$$\mathbf{u}_h = -\mathbf{K}_{hp} \mathbf{R}_{\psi}^{-1} (\mathbf{p}_h - \mathbf{p}_{hd}) - \mathbf{K}_{hd} \mathbf{R}_{\psi}^{-1} (\dot{\mathbf{p}}_h - \dot{\mathbf{p}}_{hd}) - \mathbf{K}_{hi} \int \mathbf{R}_{\psi}^{-1} (\mathbf{p}_h - \mathbf{p}_{hd})$$



## 3. 位置控制器设计

### □ PID控制器



控制器设计简单  
不需要知道模型信息

需要大量实验  
耦合严重时参数  
调节难度大

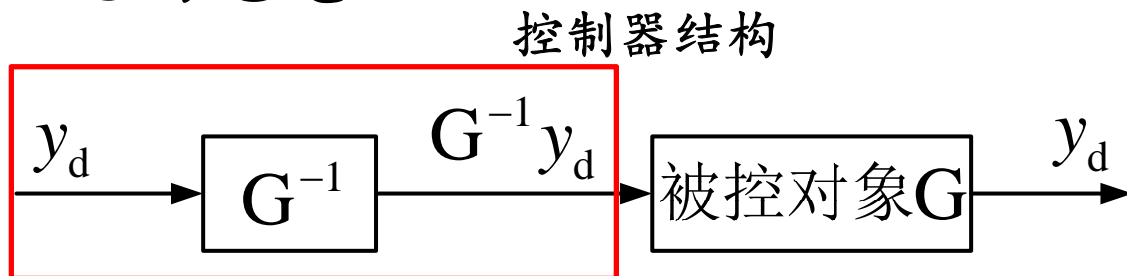


# 3. 位置控制器设计

## □ 基于加性分解的动态逆控制器

基于加性输出分解的动态逆控制器

### (1) DIC的思想



- 1. 实际过程中  $G$  是未知的，可以辨识得到近似的  $\hat{G}$
- 2.  $G$  与  $\hat{G}$  之间往往有差距，如何设计进行弥补？



## 3. 位置控制器设计

### □ 基于加性分解的动态逆控制器

#### (2) 加性分解过程

对于传递函数的加性输出分解:

$$\text{原系统: } y = Gu + d$$

$$\begin{array}{l} \text{主系统: } y_p = G_p u_p \quad \text{辅系统: } y_s = Gu + d - G_p u_p \end{array}$$

$$y_s \triangleq y - y_p$$

$$y = y_p + y_s$$

Quan Quan, Kai-Yuan Cai. Additive-Output-Decomposition-Based Dynamic Inversion Tracking Control for a Class of Uncertain Linear Time-Invariant Systems. The 51st IEEE Conference on Decision and Control, 2012, Maui, Hawaii, USA, 2866-2871.

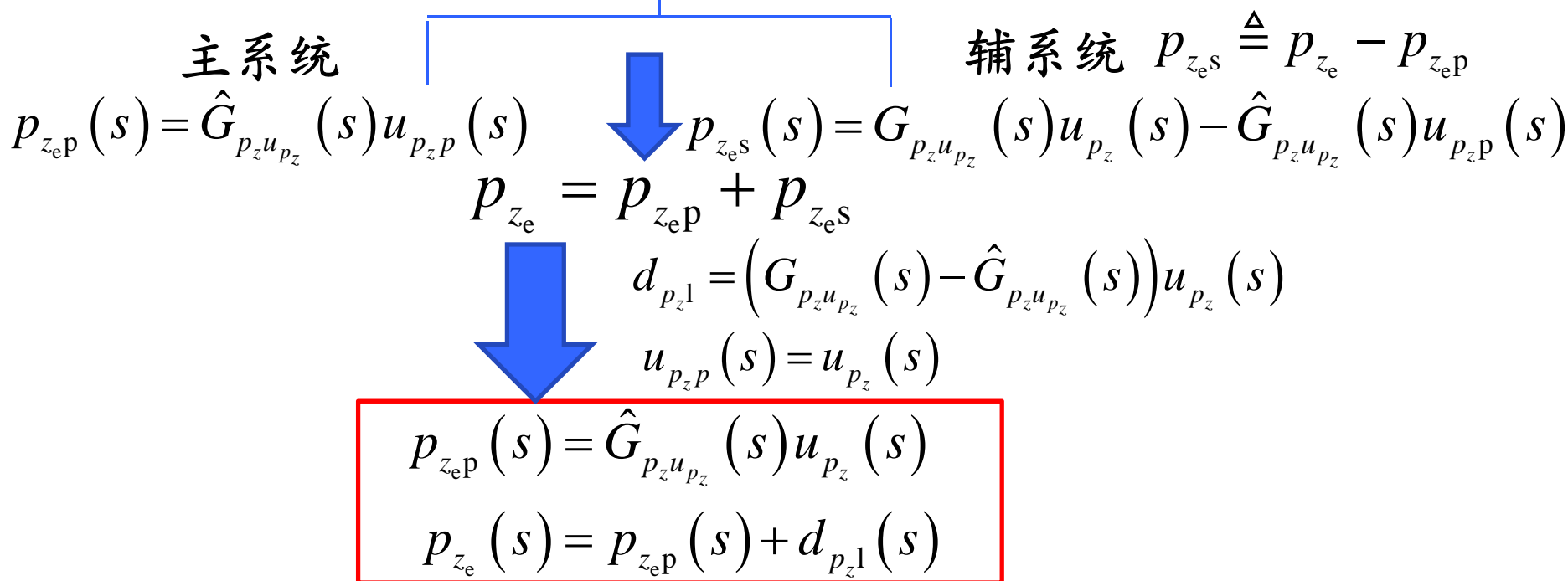


### 3. 位置控制器设计

#### □ 基于加性分解的动态逆控制器

#### (3) 以高度通道为例进行设计

$$\text{原系统: } p_{z_e}(s) = G_{p_z u_{p_z}}(s) u_{p_z}(s)$$





### 3. 位置控制器设计

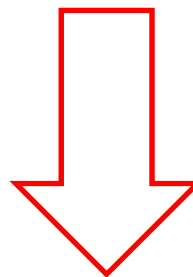
#### □ 基于加性分解的动态逆控制器

#### (3) 以高度通道为例进行设计

基于加性分解的动态逆控制器： $u_{p_z}(s) = \hat{G}_{p_z u_{p_z}}^{-1}(s) (p_{z_e d}(s) - d_{p_z 1}(s))$

物理不可实现，引入低通滤波器  $Q_{p_z u_{p_z}}(s)$  使得

$Q_{p_z u_{p_z}}(s) \hat{G}_{p_z u_{p_z}}^{-1}(s)$  物理可实现，且  $Q_{p_z u_{p_z}}(0) = 1$



$$u_{p_z}(s) = Q_{p_z u_{p_z}}(s) \hat{G}_{p_z u_{p_z}}^{-1}(s) (p_{z_e d}(s) - d_{p_z 1}(s))$$

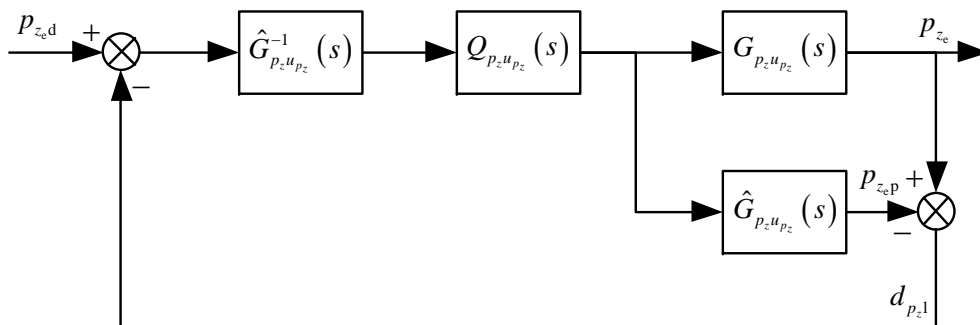


图12.6 基于加性输出分解方法的控制器设计





## 3. 位置控制器设计

### □ 基于加性分解的动态逆控制器

#### (3) 以高度通道为例进行设计

收敛性分析:

若满足 (1)  $\hat{G}_{p_z u_{p_z}}(s)$  是最小相位的;

(2)  $Q_{p_z u_{p_z}}(s)$  和  $G_{p_z u_{p_z}}(s)$  是稳定的, 且  $Q_{p_z u_{p_z}}(0) = 1$ ;

(3)  $\sup_{\omega} \left| \left( 1 - G_{p_z u_{p_z}}(j\omega) \hat{G}_{p_z u_{p_z}}^{-1}(j\omega) \right) Q_{p_z u_{p_z}}(j\omega) \right| < 1$ ;

(4)  $p_{z_e d}$  为常数。

那么,  $u_{p_z}$  是有界的, 且当  $t \rightarrow \infty$  时,  $|e_{p_z}(t)| \rightarrow 0$ , 其中  $e_{p_z} \triangleq p_{z_e} - p_{z_e d}$

Quan Quan, Kai-Yuan Cai. Additive-Output-Decomposition-Based Dynamic Inversion Tracking Control for a Class of Uncertain Linear Time-Invariant Systems. The 51st IEEE Conference on Decision and Control, 2012, Maui, Hawaii, USA, 2866-2871.



### 3. 位置控制器设计

#### □ 基于加性分解的动态逆控制器

#### (4) 另外两个通道

$$u_{\psi}(s) = Q_{\psi u_{\psi}}(s) \hat{G}_{\psi u_{\psi}}^{-1}(s) (\psi_d(s) - d_{\psi 1}(s))$$

$$d_{\psi 1}(s) = \psi(s) - \hat{G}_{\psi u_{\psi}}(s) u_{\psi}(s)$$

$$\mathbf{u}_{\mathbf{v}_h}(s) = \mathbf{Q}_{\mathbf{v}_{hb} \mathbf{u}_{vh}}(s) \hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{v}_{hb} \mathbf{u}_{vh}}^{-1}(s) (\mathbf{v}_{hb d}(s) - \mathbf{d}_{\mathbf{v}_h 1}(s))$$

$$\mathbf{d}_{\mathbf{v}_h 1}(s) = \mathbf{v}_{hb}(s) - \hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{v}_{hb} \mathbf{u}_{vh}}(s) \mathbf{u}_{\mathbf{v}_h}(s)$$



## 3. 位置控制器设计

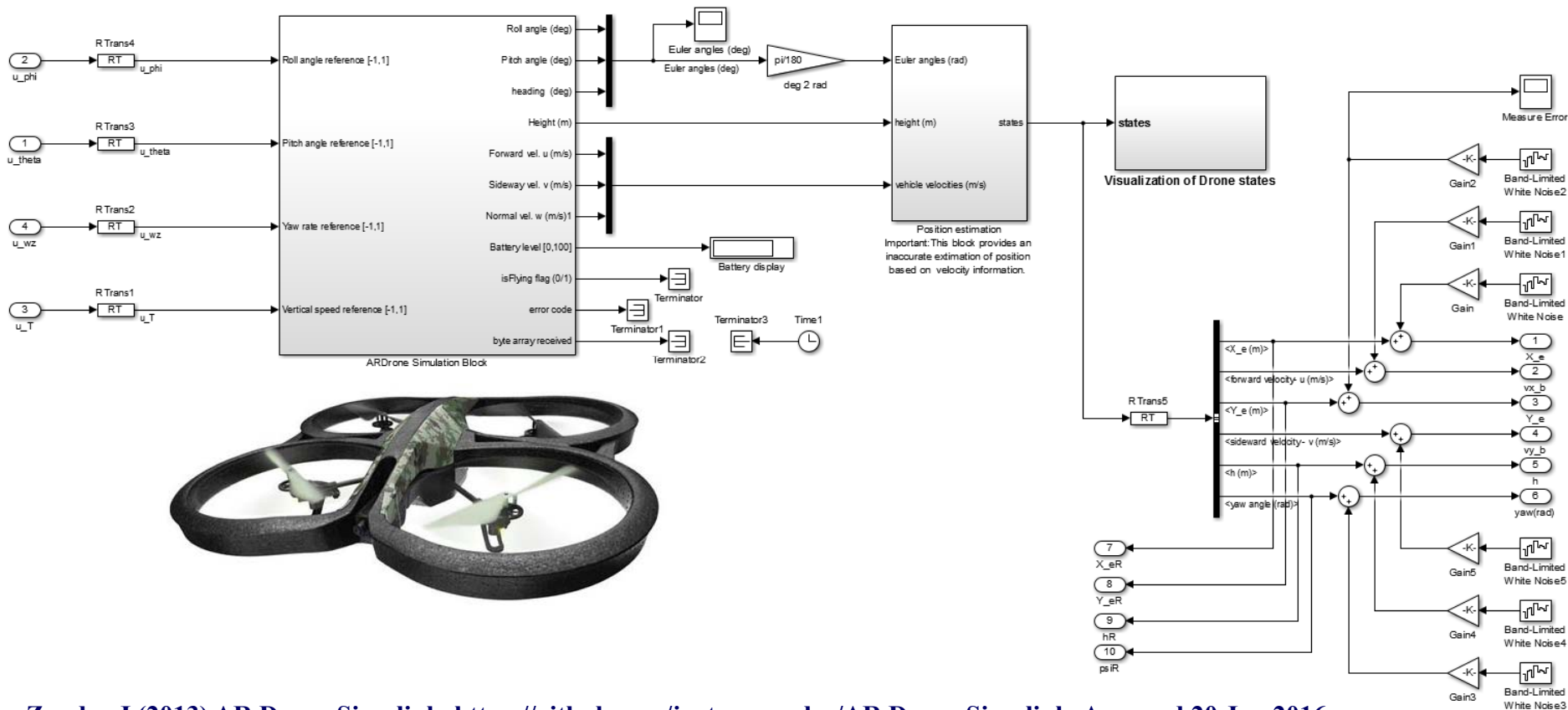
### □ 基于加性分解的动态逆控制器





# 4. 仿真研究

## 被控对象——内部参数当做未知



Zander J (2013) AR Drone Simulink. [https://github.com/justynazander/AR Drone Simulink](https://github.com/justynazander/AR_Drone_Simulink). Accessed 20 Jan 2016



## 4. 仿真研究

### □ 系统辨识

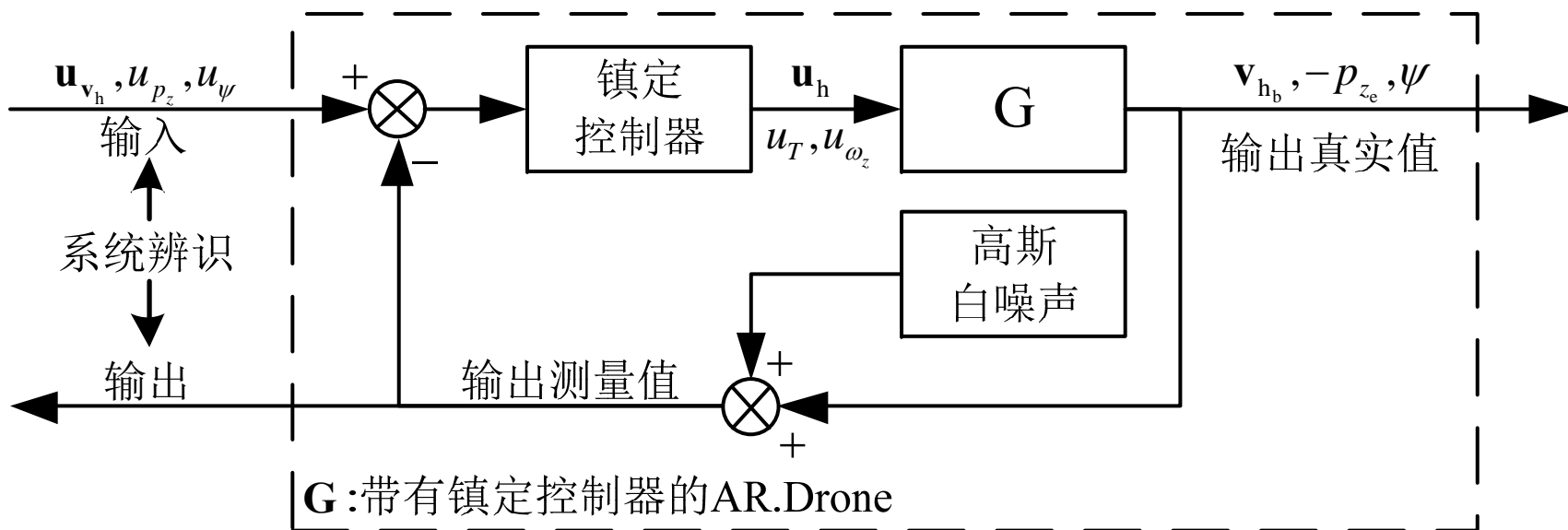


图12.7 系统辨识仿真实验



## 4. 仿真研究

### □ 系统辨识

1. 先验知识：之前所述的模型，可以得到阶数等信息。

高度通道

$$\dot{p}_{z_e} = v_{z_e}$$

$$\dot{v}_{z_e} = -k_{v_z} v_{z_e} - k_{u_T} u_T$$

$$\dot{\psi} = \omega_z$$

偏航通道

$$\dot{\omega}_z = -k_{\omega_z} \omega_z + k_{u_{\omega_z}} u_{\omega_z}$$

$$\dot{\mathbf{p}}_h = \mathbf{R}_{\psi} \mathbf{v}_{h_b}$$

水平通道

$$\dot{\mathbf{v}}_{h_b} = -\mathbf{K}_{v_{h_b}} \mathbf{v}_{h_b} - g \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Theta_h$$

$$\dot{\Theta}_h = \omega_{h_b}$$

$$\dot{\omega}_{h_b} = -\mathbf{K}_{\Theta_h} \Theta_h - \mathbf{K}_{\omega_{h_b}} \omega_{h_b} + \mathbf{K}_{u_h} \mathbf{u}_h$$



## 4. 仿真研究

### □ 系统辨识

2. 实验设计：首先设计PD或P控制器使相应的通道稳定。

$$u_T = k_{p_z} p_{z_e} + u_{p_z}$$

$$u_{\omega_z} = -k_{\psi} \psi + u_{\psi}$$

$$\mathbf{u}_h = -\mathbf{K}'_{v_{hb}} \mathbf{v}_{hb} + \mathbf{u}_{v_h}$$

其中，令  $\psi_d = 0$ ，则  $\mathbf{R}_{\psi} = \mathbf{I}_2$ ，此时水平位置通道解耦为  $x, y$  两个通道。

$$\mathbf{v}_{hb}(s) = \mathbf{G}_{v_{hb} u_{v_h}}(s) \mathbf{u}_{v_h}(s) = \begin{bmatrix} G_{v_x u_{v_x}}(s) u_{v_x}(s) \\ G_{v_y u_{v_y}}(s) u_{v_y}(s) \end{bmatrix}$$

选取  $k_{p_z} = 1, k_{\psi} = 1, \mathbf{K}'_{v_{hb}} = \text{diag}(0.1, 0.1)$ 。

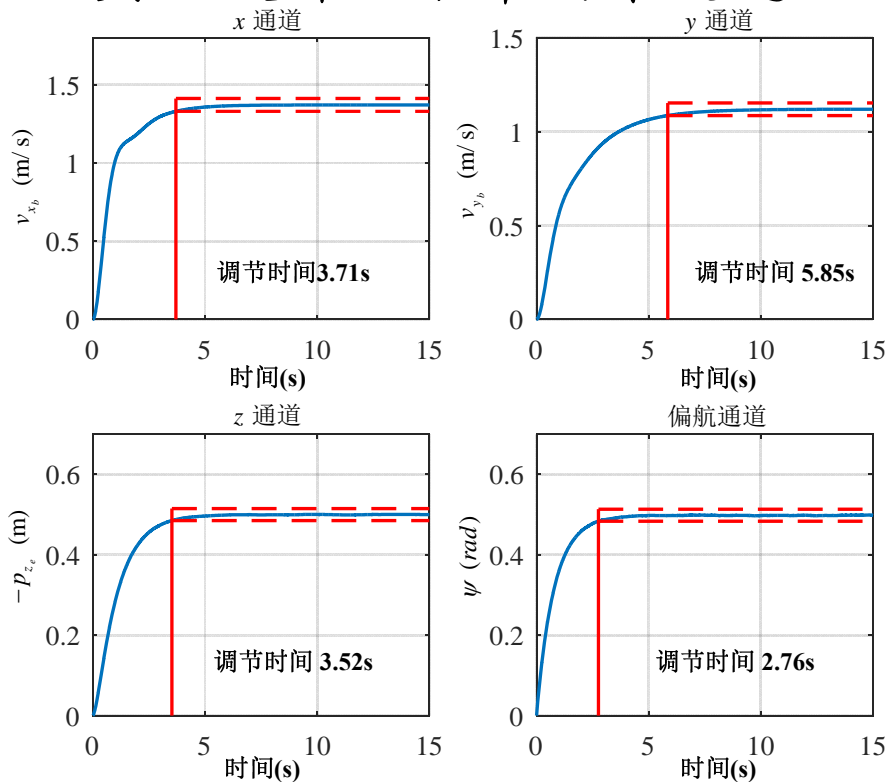




# 4. 仿真研究

## □ 系统辨识

2. 实验设计：水平两个通道的阶跃响应(不含测量噪声)。



所有通道都是稳定的，但调节时间太长的，不满足要求

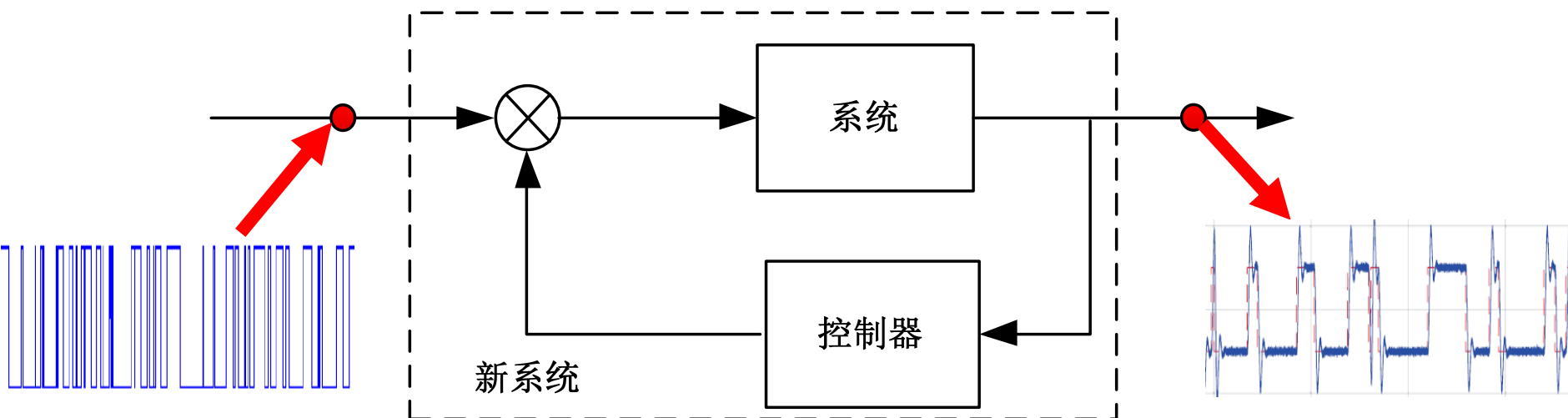
图12.8 加入镇定控制器后各通道的阶跃响应



## 4. 仿真研究

### □ 系统辨识

3. 数据采集：采用伪随机二进制白噪声 (Pseudo-Random Binary Signals, PRBS) 对系统进行激励，并记录输入输出。



改进的开环实验方法



# 4. 仿真研究

## □ 系统辨识

### 3. 数据采集

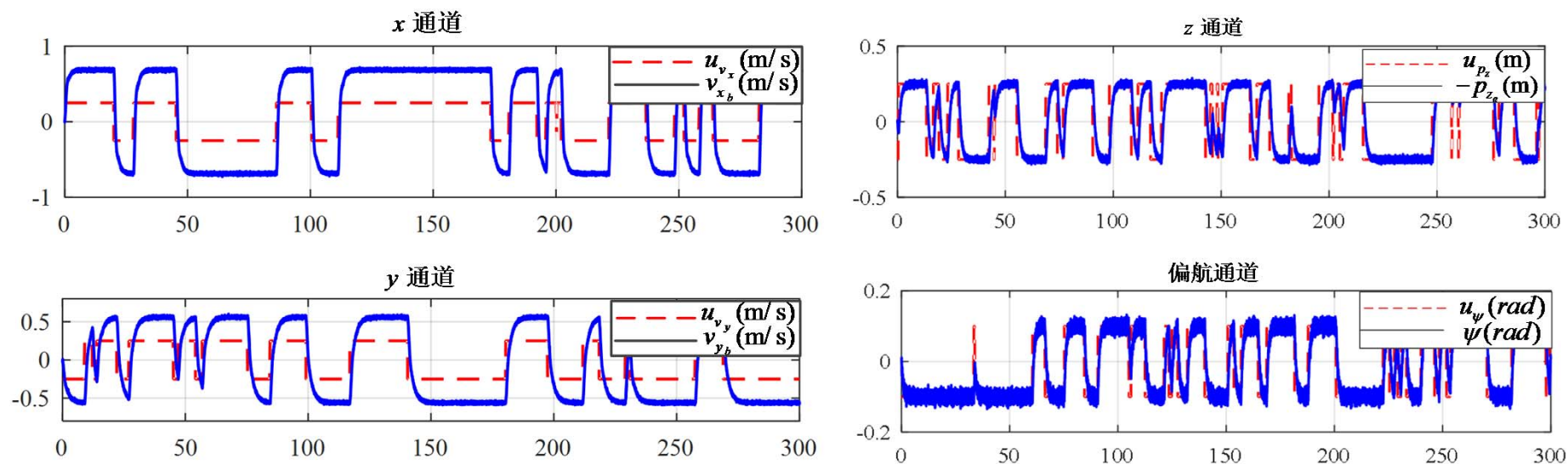


图12.9 用于系统辨识的输入输出数据



## 4. 仿真研究

---

### □ 系统辨识

4. 模型结构：由于基本可以认为系统是线性的，所以采用传递函数来进行辨识。其阶数的选择原则如下：

- (1) 阶数的选择需要保证辨识出的系统是最小相位的。
- (2) 阶数的选择需要保证辨识的结果能通过检验标准。
- (3) 在以上两条都满足的情况下，阶数越低越好。

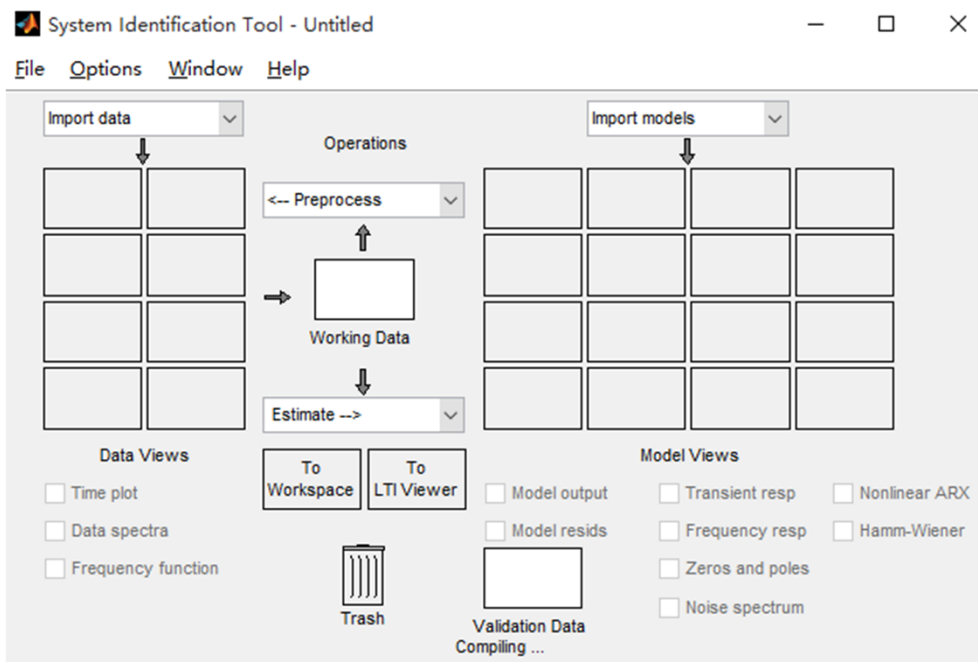
从先验知识中，我们可以了解，水平两个通道的阶数为4，另外两个通道阶数为2。可以在此基础上根据实际情况微调。



## 4. 仿真研究

### □ 系统辨识

5. 模型计算：采用Matlab的系统辨识工具箱。



The math works. System identification toolbox. <http://www.mathworks.com/help/ident/index.html>. Accessed 20 Jan 2016



## 4. 仿真研究

### □ 系统辨识

5. 模型计算：辨识结果。

$$G_{v_x u_{v_x}}(s) = \frac{15.48s + 29.9}{s^3 + 4.642s^2 + 16.09s + 10.91}$$

$$G_{v_y u_{v_y}}(s) = \frac{7.086s + 17.02}{s^3 + 4.742s^2 + 15.49s + 7.063}$$

$$G_{p_z u_{p_z}}(s) = -\frac{6.25}{s^2 + 7.077s + 6.249}$$

$$G_{\psi u_{\psi}}(s) = \frac{1.277s + 3.506}{s^2 + 4.045s + 3.522}$$



## 4. 仿真研究

### □ 系统辨识

6. 模型检验：以拟合度Fitness作为标准，越接近1说明效果越好。

$$1 - \|y - \hat{y}\| / \|y - \bar{y}\|$$

四个通道的拟合度分别为：98.56%, 98.08%, 95.84%, 90.40%。



由于仿真环境比较理想，所以可以把标准定到80~90%，但在实际实验中由于其他扰动因素的存在，**一般辨识到达70%**就可以了，太高会出现过拟合现象。





## 4. 仿真研究

### □ 基于加性分解的动态逆控制器

需要注意的是，水平通道用基于加性输出分解的动态逆控制器来控制水平速度而不是水平位置，因此期望的水平速度可根据期望水平位置与当前位置计算得到。首先，过渡过程若满足

$$\dot{\mathbf{p}}_h - \dot{\mathbf{p}}_{hd} = -\mathbf{K}_{p_h} (\mathbf{p}_h - \mathbf{p}_{hd})$$

其中， $\mathbf{K}_{p_h} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \cap \mathcal{D} \cap \mathcal{P}$ ，则有  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}_h(t) - \mathbf{p}_{hd}(t)\| = 0$



## 4. 仿真研究

### □ 基于加性分解的动态逆控制器

因为  $\dot{\mathbf{p}}_h = \mathbf{R}_\psi \mathbf{v}_{h_b}$ ，期望的水平速度应满足

$$\mathbf{R}_\psi \mathbf{v}_{h_b d} = \dot{\mathbf{p}}_{hd} - \mathbf{K}_{p_h} (\mathbf{p}_h - \mathbf{p}_{hd}).$$

由于  $\dot{\mathbf{p}}_{hd}$  很小，于是期望的水平速度可以简化为

$$\mathbf{v}_{h_b d} = -\mathbf{R}_\psi^{-1} \mathbf{K}_{p_h} (\mathbf{p}_h - \mathbf{p}_{hd}).$$

这样便可设计基于加性分解的动态逆控制器了。



## 4. 仿真研究

### □ 基于加性分解的动态逆控制器

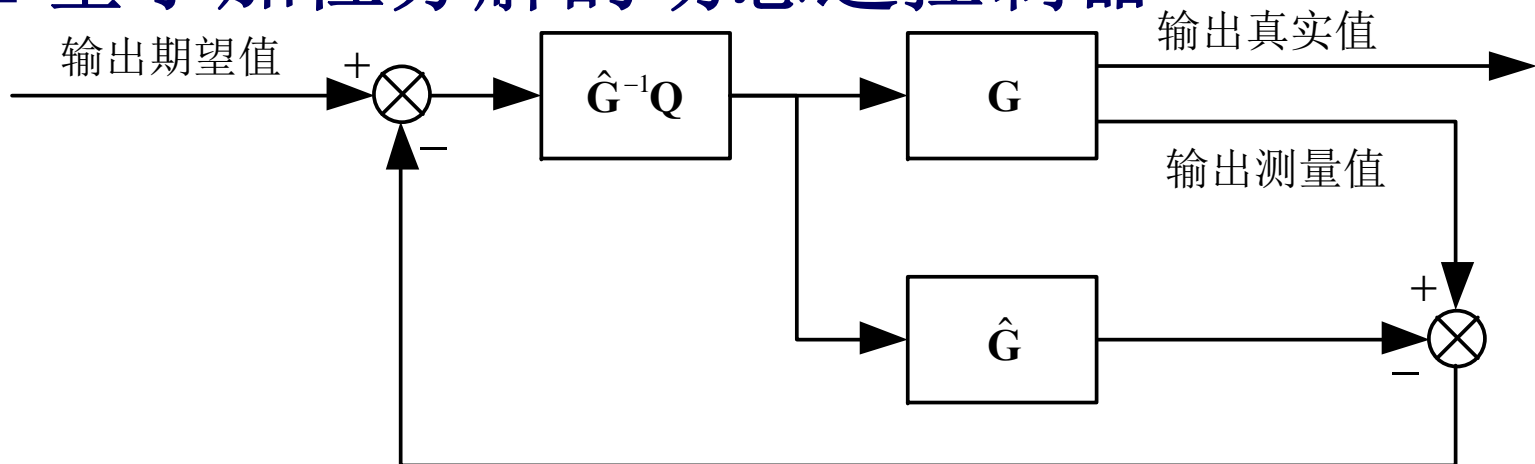


图12.10 基于加性输出分解方法的控制器设计

$$\mathbf{Q}_{v_{hb}} \mathbf{u}_{v_h}(s) = \text{diag} \left( \frac{1}{(\eta_x s + 1)^2}, \frac{1}{(\eta_y s + 1)^2} \right)$$

$$Q_{p_z u_{p_z}}(s) = \frac{1}{(\eta_z s + 1)^2}$$

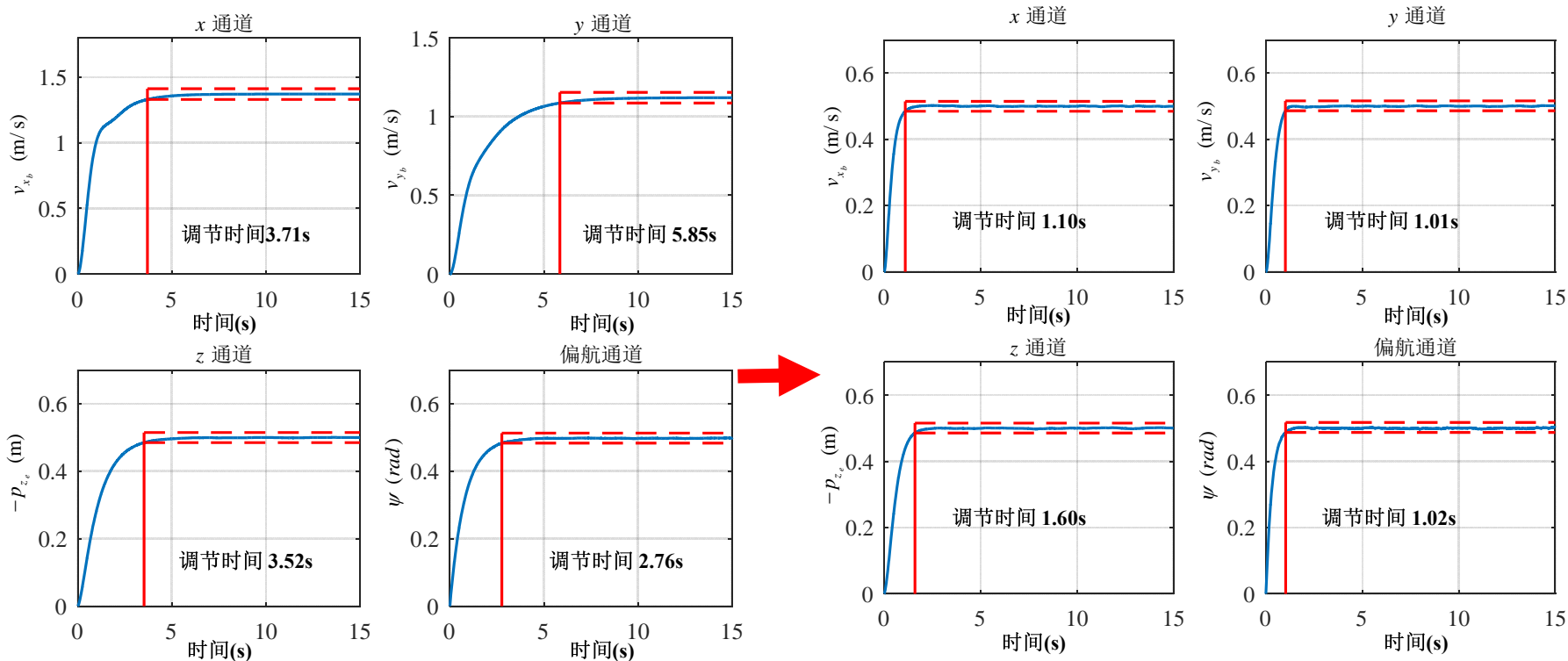
$$Q_{\psi u_{\psi}} = \frac{1}{(\eta_{\psi} s + 1)^2}$$

$$\eta_x = 0.2, \eta_y = 0.2, \eta_z = 0.3, \eta_{\psi} = 0.3$$



# 4. 仿真研究

## 基于加性分解的动态逆控制跟踪性能得到提高



简单的PID镇定控制

基于加性分解的动态逆控制器



## 5. 本讲小结

---

1. 有大量成熟的四旋翼产品或自驾，他们已经完成了良好的内环控制，在此基础上进行二次开发一方面可以获得良好的硬件基础，也能节省工作量。
2. 本讲给出了两种二次开发中用到的位置控制器设计方法，并比较了二者的优缺点和试用场合。
3. 由于基于加性分解的动态逆控制器的设计需要，本讲还详细介绍了对于多旋翼的基本系统辨识方法，有助于使用者了解带有半自主飞控平台的多旋翼的内部信息。



# 资源

---

(1) 可靠飞行控制研究组主页课程中心(全部课件下载)

<http://rfly.buaa.edu.cn/course>

(2) 关注可靠飞行控制研究组公众号 buaarfly(文章、资讯等)

(3) 多旋翼设计与控制交流QQ群:183613048

(4) 视频课程(MOOC)同步发布, 网易云课堂搜索 “多旋翼”

<http://study.163.com/course/introduction/1003715005.htm>

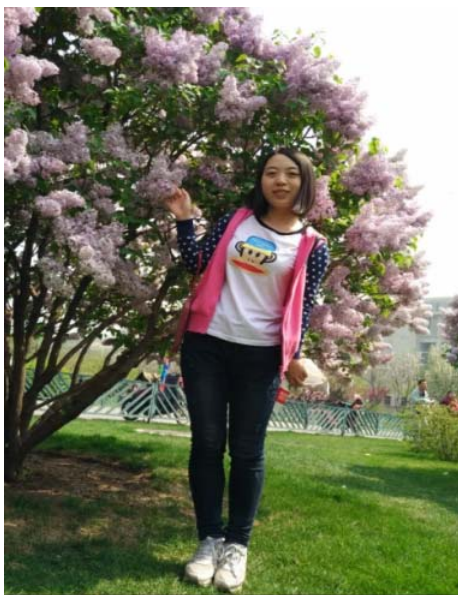
(5) 同名中文书本教材《多旋翼飞行器设计与控制》即将在电子工业出版社出版, 敬请期待

(6) 有疑问可联系课程总助教戴训华, 邮箱: [dai@buaa.edu.cn](mailto:dai@buaa.edu.cn)

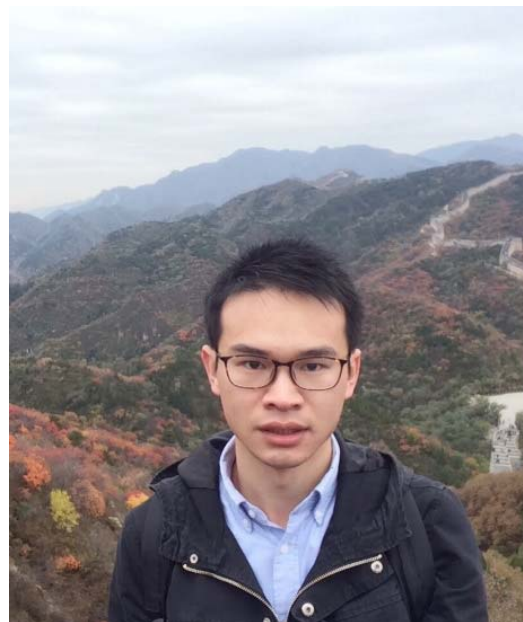


# 致谢

## 感谢控制组同学



张婧



戴训华

为本节课程准备作出的贡献。





---

# 谢谢！



---

# 多旋翼飞行器设计与控制

## 第十三讲 任务决策

全权 副教授

qq\_buaa@buaa.edu.cn

自动化科学与电气工程学院

北京航空航天大学



# 东方智慧



## 博弈



# 核心问题

---

多旋翼在全自主控制和半自主控制下的  
任务决策机制分别是什么？



# 大纲

---

1. 全自主控制
2. 半自主控制
3. 本讲小结



# 1. 全自主控制

## □ 总体介绍

(1) **任务规划** 通常由操作人员离线完成，主要进行任务的阶段划分，以及在各航路点的任务分配。

(2) **路径规划** 根据飞行任务点给定期望的可飞路径，即期望的飞行器空间三维坐标。可以是连续的路径，也可以是离散的目标点。

(3) **底层控制** 控制电机转动，实现对可飞路径的跟踪。

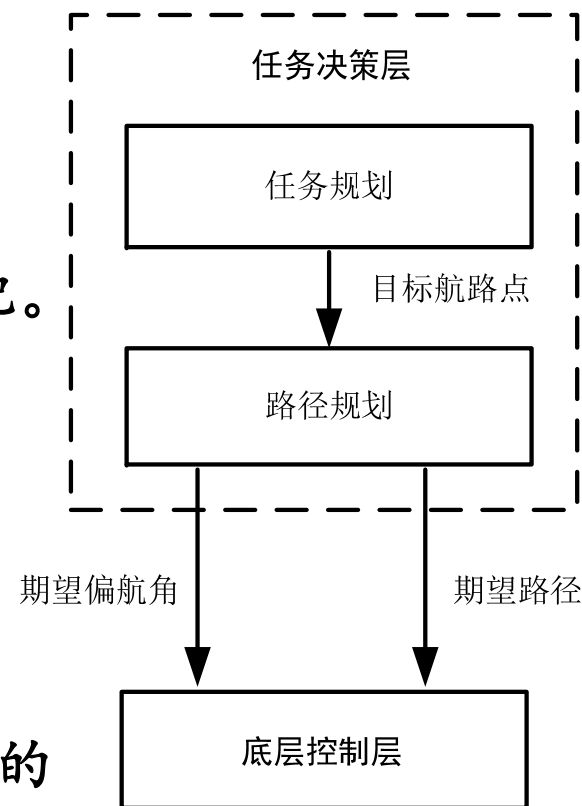


图13.1 多旋翼全自主控制层次



# 1. 全自主控制

## □ 总体介绍

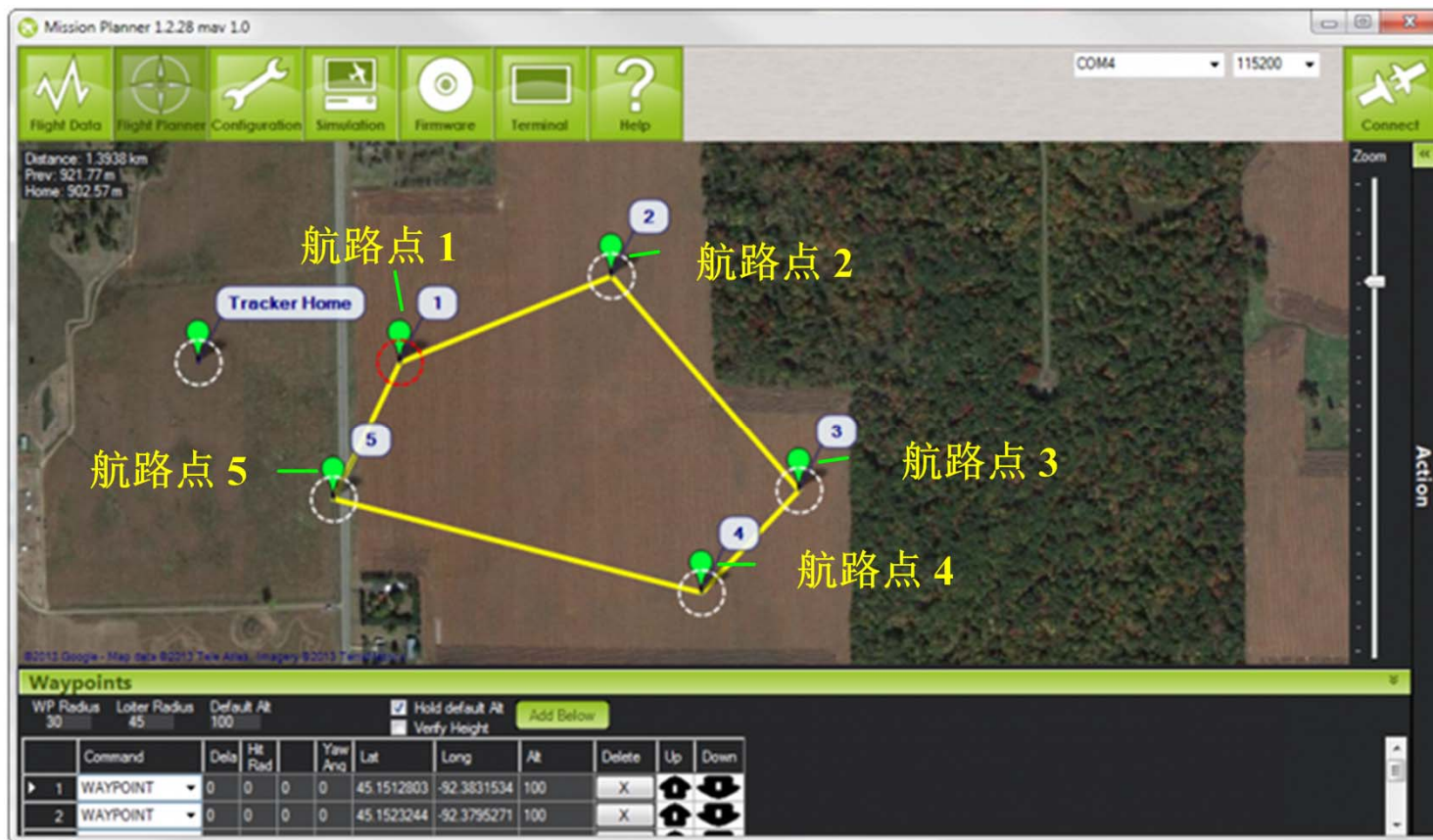


图13.1 Mission Planner地面站多旋翼航路规划






# 1. 全自主控制

## □ 总体介绍

Multi-Quadrotor Programming System



Simu Timer: 70.1

	State	High	Fuel
1	disable	0.00	0.0
2	working	3.00	30.1
3	working	3.00	30.1
4	working	3.00	30.1

**CONFIGURATION**

Team  Field Length:  Stop  th drone  s  
Field Width:  Atom Width:  Step:

视频: 多无人机协同农田喷洒协议设计, <https://youtu.be/fkp043jE5fQ>



# 1. 全自主控制

## □ 任务规划

### (1) 任务需求

#### 1) 给定条件

#### ① 已知期望航路点

$\mathbf{p}_{wp,0}, \mathbf{p}_{wp,1}, \dots, \mathbf{p}_{wp,k}, \dots, \mathbf{p}_{wp,n_{wp}}$

$\in \mathbb{R}^3, k = 0, \dots, n_{wp};$

#### ② 已知多旋翼实时位置 $\mathbf{p}$

和电量  $b$ 。

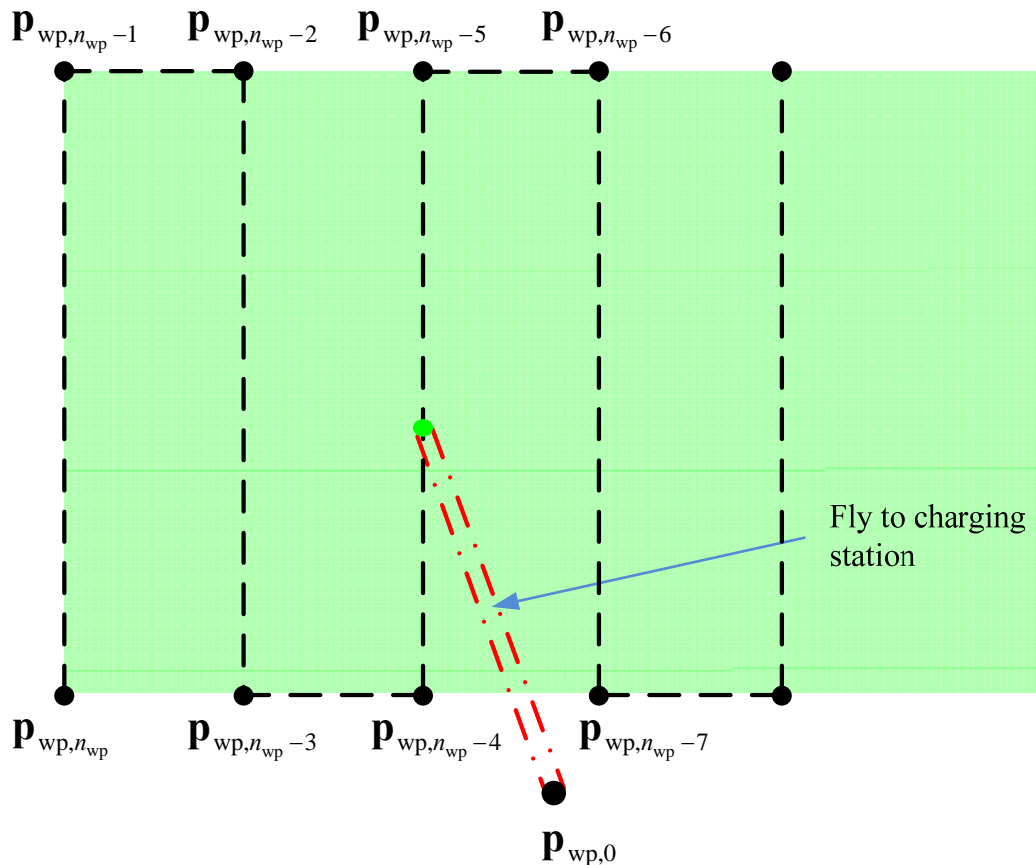


图13.2 S形遍历任务规划示意图



# 1. 全自主控制

## □ 任务规划

### 2) 任务需求

- ①多旋翼从充电站  $P_{wp,0}$  出发，按S型遍历所有期望航路点；
- ②期望偏航角指向下一个航路点；
- ③当电量低于门限值时，多旋翼保存当前位置并返回充电站充电，充电完成后飞回原地继续完成任务；
- ④遍历完所有航路点后多旋翼飞回充电站。

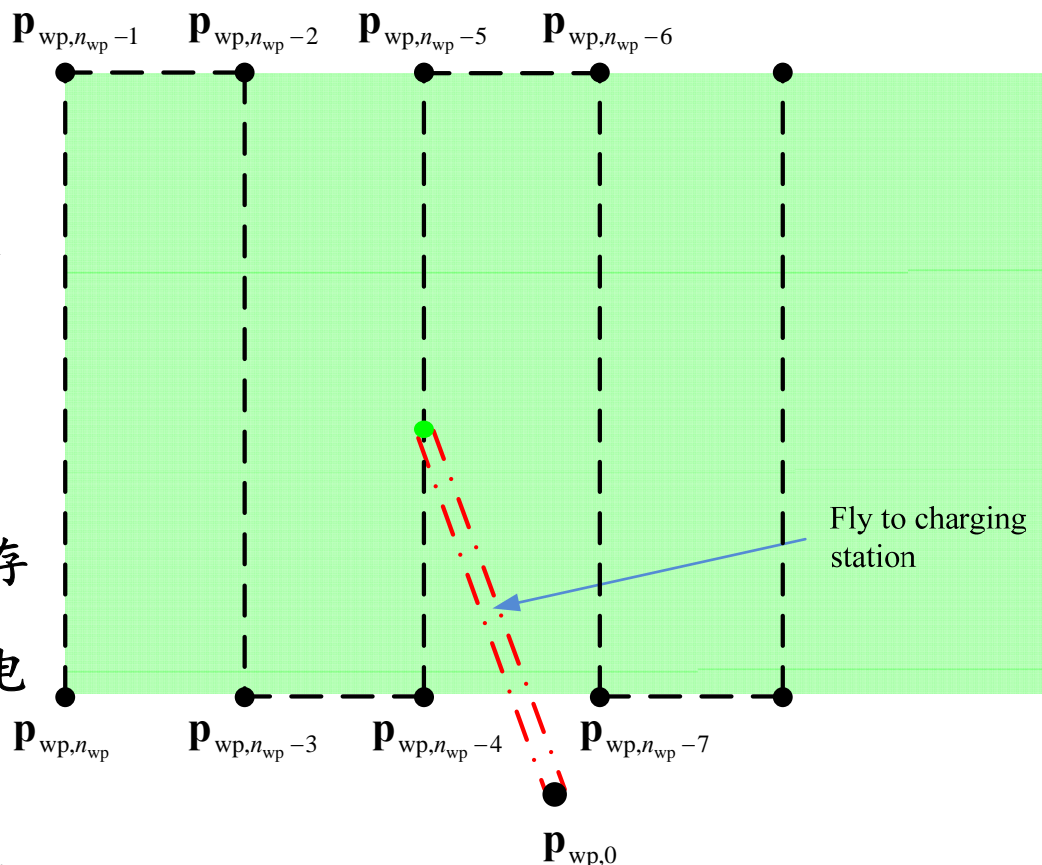


图13.3 S形遍历任务规划示意图



# 1. 全自主控制

## □ 任务规划

### (2) 算法设计

输入：多旋翼实时位置信息  $\mathbf{p}$ ，实时电量信息  $b$ 。

输出：实时目标位置  $\mathbf{p}_d$ （作为位置控制器期望输入）。

初始化阶段

1) 确定矩形区域坐标系；

2) 根据任务需求生成需要遍历的航路点

$\mathbf{p}_{wp,1}, \dots, \mathbf{p}_{wp,k}, \dots, \mathbf{p}_{wp,n_{wp}}$  坐标及充电站坐标  $\mathbf{p}_{wp,0}$ ，**并将所有航路点坐标依次压入栈中；**

3) 令  $k = n_{wp}$ ，并令当前目标航路点为  $\mathbf{p}_d = \mathbf{p}_{wp,k}$ ，设置  $\varepsilon > 0, b_{th} > 0$ ，其中  $\varepsilon$  用于判断多旋翼是否到达航路点， $b_{th}$  是电量门限值；

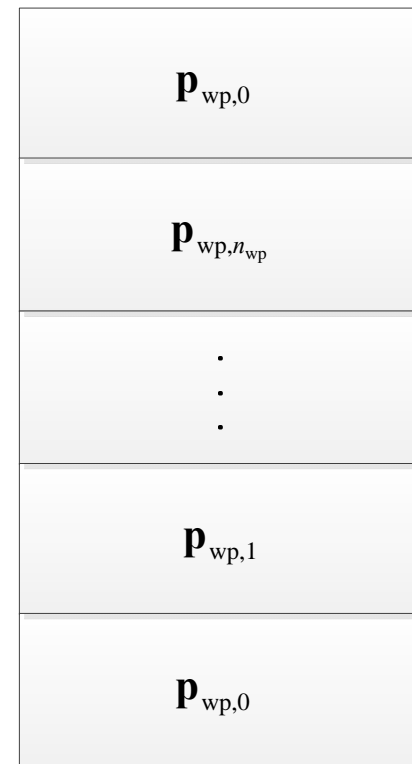


图13.4 航路点入栈示意图



# 1. 全自主控制

## □ 任务规划

### (2) 算法设计

4) 如果  $\|p_d - p\| \leq \varepsilon$ ，说明多旋翼已进入目标航路点，转至 5) 否则转至 6)；

5) 如果  $p_d = p_{wp,0} \ \& \ k = 0$ ，说明多旋翼已遍历完航路点，结束任务；如果  $p_d = p_{wp,0} \ \& \ k \neq 0$ ，说明任务还没完成，只是电池电量过低返回充电。当多旋翼充电完成后，停在原地等待起飞指令。一旦接收到起飞指令，则执行  $k = k - 1$ ， $p_d = p_{wp,k}$  并跳转至 4) 继续运行；如果  $p_d \neq p_{wp,0}$ ，说明多旋翼任务还未完成且电量充足，执行  $k = k - 1$ ， $p_d = p_{wp,k}$  并跳转至 6) 继续执行；

算法执行过程

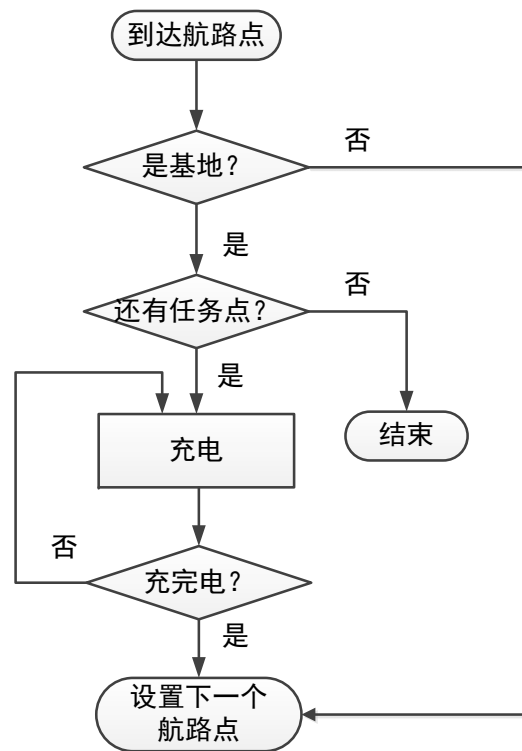


图13.5 算法流程图



# 1. 全自主控制

## □ 任务规划

### (2) 算法设计

6) 如果电池电量  $b < b_{th}$  &  $\mathbf{p}_d \neq \mathbf{p}_{wp,0}$ , 说明多旋翼在飞向航路点的过程中电量过低, 需要将当前位置作为航路点加入栈中, 再将充电站位置加入栈中, 以使多旋翼先飞回充电站充电再返回当前位置继续完成任务, 该过程通过执行以下指令实现:

$$k = k + 1, \mathbf{p}_{wp,k} = \mathbf{p}$$

$$k = k + 1, \mathbf{p}_{wp,k} = \mathbf{p}_{wp,0}$$

$$\mathbf{p}_d = \mathbf{p}_{wp,k}$$

否则跳转至 4) 继续运行。

电量不足, 保护现场

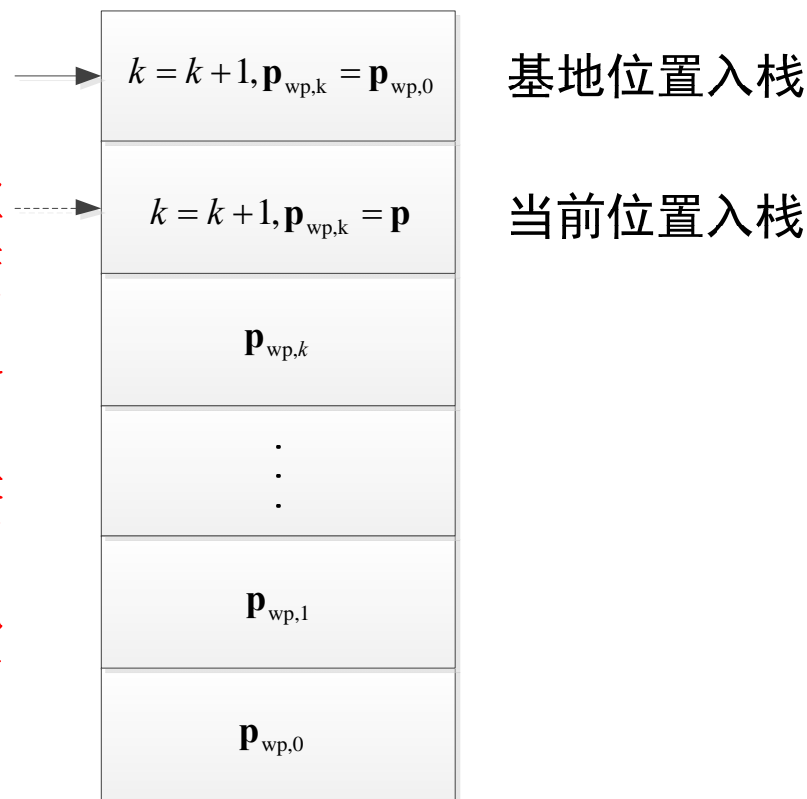


图13.6 电量不足时算法的处理过程示意图





# 1. 全自主控制

## □ 路径规划

### (1) 基本概念

1) 路径规划：多旋翼在飞行中不仅受到自身约束的限制，还会受到环境约束的影响。路径规划是为了给多旋翼提供既满足自身约束又满足环境约束的可飞路径。

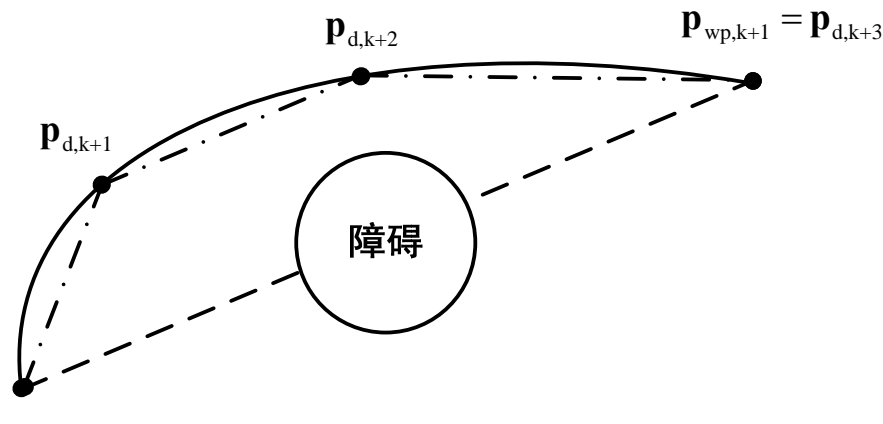


图13.7 全局路径规划和局部路径规划

2) 全局路径规划和局部路径规划[1]：根据任务生成航路点，并用直线将航路点连接起来，这一过程称为全局路径规划；根据局部环境条件和多旋翼的动力学运动学约束将直线路径提炼为可飞路径，这一过程称为局部路径规划。

[1] Tsourdos A, White B, Shanmugavel M. Cooperative path planning of unmanned aerial vehicles[M]. John Wiley & Sons, 2010. 2-12.





# 1. 全自主控制

## □ 路径规划

### (1) 基本概念

3) **人工势场法**：给目标航路点和直线路径分配吸引势场，给障碍物分配排斥势场，使三维飞行区域处于目标航路点、直线路径和障碍物的叠加势场中，飞行在该区域中的多旋翼将会被目标航路点和直线路径同时吸引，而被障碍物排斥，使得多旋翼在飞向目标航路点的同时沿着直线飞行，且能避开障碍物[2]。

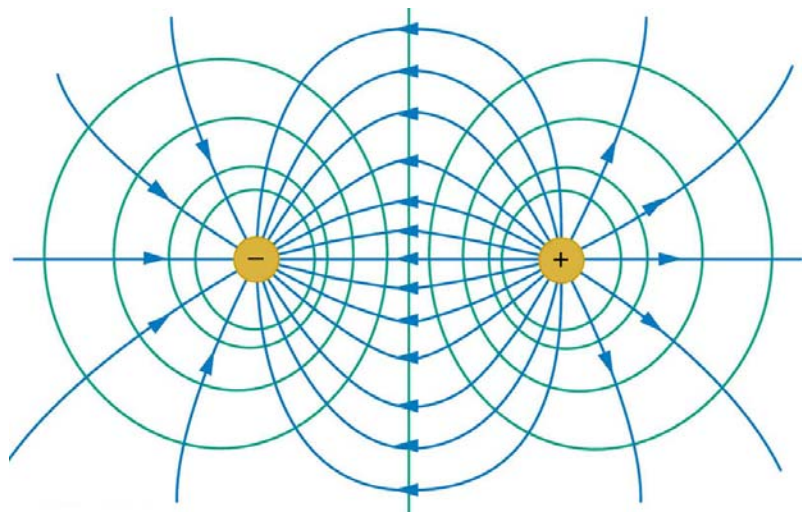


图13.8 势场示意图

[2] Khatib O. Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots. The international journal of robotics research, 1986, 5(1): 90-98



# 1. 全自主控制

## □ 路径规划

### (2) 直线路径跟随

1) 问题描述：令  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$  表示多旋翼当前位置， $\mathbf{p}_{wp} \in \mathbb{R}^3$  表示目标航路点， $\mathbf{p}_{wp,last} \in \mathbb{R}^3$  表示上一个航路点。设计局部路径规划器实时地生成期望位置  $\mathbf{p}_d \in \mathbb{R}^3$ ，引导多旋翼沿着  $\mathbf{p}_{wp,last} \in \mathbb{R}^3$  和  $\mathbf{p}_{wp} \in \mathbb{R}^3$  之间的直线路径飞行直到到达目标航路点  $\mathbf{p}_{wp}$ 。

### 2) 算法设计

将多旋翼看作质点模型，其满足牛顿第二定律

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v}$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{u}$$

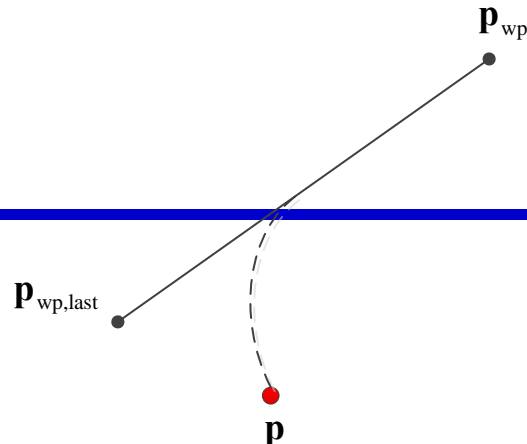


图13.9 直线路径跟随示意图



# 1. 全自主控制

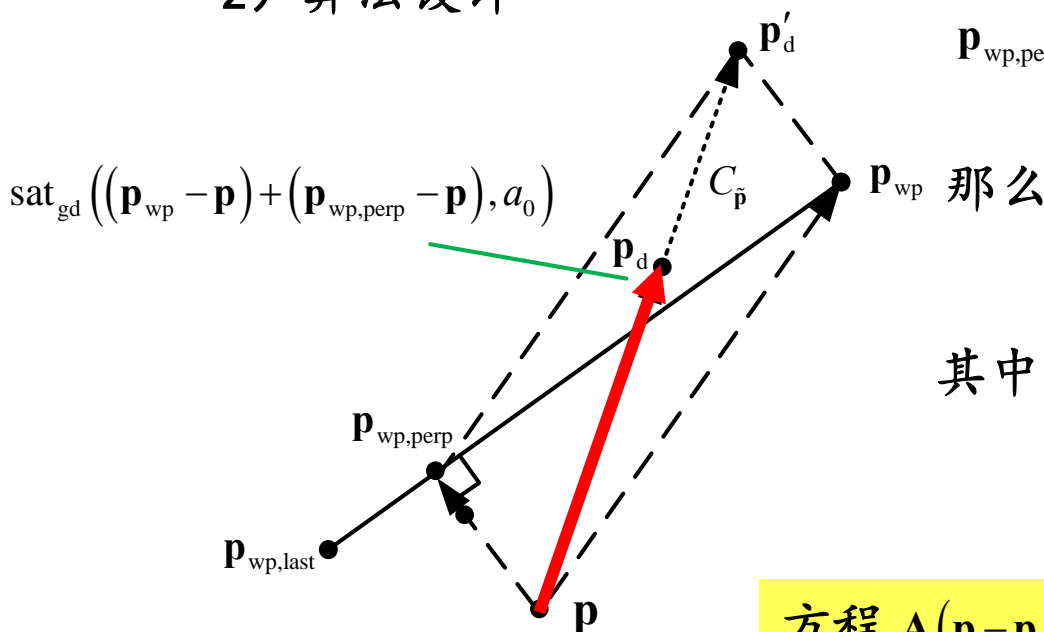
## □ 路径规划

### (2) 直线路径跟随

#### 2) 算法设计

垂足可以表示为

$$\mathbf{p}_{wp,perp} = \mathbf{p}_{wp} + (\mathbf{p}_{wp,last} - \mathbf{p}_{wp}) \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{wp})^T (\mathbf{p}_{wp,last} - \mathbf{p}_{wp})}{\|\mathbf{p}_{wp} - \mathbf{p}_{wp,last}\|^2}$$



$$\mathbf{p} - \mathbf{p}_{wp,perp} = \mathbf{A} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_{wp})$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}_3 - \frac{(\mathbf{p}_{wp,last} - \mathbf{p}_{wp})(\mathbf{p}_{wp,last} - \mathbf{p}_{wp})^T}{\|\mathbf{p}_{wp} - \mathbf{p}_{wp,last}\|^2}$$

方程  $\mathbf{A}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{wp}) = 0$  表示  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$  位于直线航路上。

图13.10 直线路径跟随几何关系



# 全自主控制

## □ 路径规划

### (2) 直线路径跟随

#### 2) 算法设计

若定义李雅普诺夫函数为

$$V_1 = \underbrace{k_0 \tilde{\mathbf{p}}_{\text{wp}}^T \tilde{\mathbf{p}}_{\text{wp}}}_{\text{靠近目标航路点}} + \underbrace{k_1 \tilde{\mathbf{p}}_{\text{wp}}^T \mathbf{A} \tilde{\mathbf{p}}_{\text{wp}}}_{\text{靠近期望路径}} + \frac{k_2}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{v}$$

其中  $\tilde{\mathbf{p}}_{\text{wp}} \triangleq \mathbf{p} - \mathbf{p}_{\text{wp}}$ ，那么  $k_0, k_1, k_2 \in \{0\} \cup \mathbb{R}_+$  意味着多旋翼能同时靠近目标航路点和期望路径。



# 全自主控制

## □ 路径规划

### (2) 直线路径跟随

#### 2) 算法设计

然而，这里需要考虑控制量的饱和，因而需要对李雅普诺夫函数进行修改。定义  $\text{sat}_{\text{gd}}(k_0\tilde{\mathbf{p}}_{\text{wp}} + k_1\mathbf{A}\tilde{\mathbf{p}}_{\text{wp}}, a_0)$  为沿着  $C_{\tilde{\mathbf{p}}}$  分布的向量场，其中  $C_{\tilde{\mathbf{p}}}$  表示由  $\tilde{\mathbf{p}}_{\text{wp}}$  参数化的平滑曲线。李雅普诺夫函数可以设计为

$$V_1' = \underbrace{\int_{C_{\tilde{\mathbf{p}}}} \text{sat}_{\text{gd}}(k_0\tilde{\mathbf{p}}_{\text{wp}} + k_1\mathbf{A}\tilde{\mathbf{p}}_{\text{wp}}, a_0)^T d\tilde{\mathbf{p}}_{\text{wp}}}_{\text{靠近目标航路点并靠近直线航路}} + \frac{k_2}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{v}$$

其中  $k_0, k_1, k_2 \in \{0\} \cup \mathbb{R}_+$ ,  $a_0 \in \mathbb{R}_+$ 。  $V_1$  对时间求一阶导数得

$$\dot{V}_1' = \text{sat}_{\text{gd}}(k_0\tilde{\mathbf{p}}_{\text{wp}} + k_1\mathbf{A}\tilde{\mathbf{p}}_{\text{wp}}, a_0)^T \mathbf{v} + k_2 \mathbf{v}^T \mathbf{u}$$



# 全自主控制

## □ 路径规划

### (2) 直线路径跟随

#### 2) 算法设计

如果虚拟控制量  $\mathbf{u} = -\frac{1}{k_2} \text{sat}_{\text{gd}}(k_0 \tilde{\mathbf{p}}_{\text{wp}} + k_1 \mathbf{A} \tilde{\mathbf{p}}_{\text{wp}}, a_0) - \frac{1}{k_2} \text{sat}_{\text{gd}}(\mathbf{v}, a_1)$

那么  $\dot{V}'_1 = -\mathbf{v}^T \text{sat}_{\text{gd}}(\mathbf{v}, a_0) \mathbf{v}$ , 当且仅当  $\mathbf{v} = \mathbf{0}_{3 \times 1}$  时  $\dot{V}'_1 = 0$ 。  $\mathbf{v} = \mathbf{0}_{3 \times 1}$  意味着

$$\frac{1}{k_2} \text{sat}_{\text{gd}}(k_0 \tilde{\mathbf{p}}_{\text{wp}} + k_1 \mathbf{A} \tilde{\mathbf{p}}_{\text{wp}}, a_0) = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (1)$$

根据不变集理论可知系统将全局收敛到  $(\mathbf{p}, \mathbf{v})$ , 其中  $\mathbf{p}$  是方程 (1) 的解,  $\mathbf{v} = \mathbf{0}_{3 \times 1}$ 。 调节参数  $k_0, k_1$  可以调整多旋翼靠近到直线航路和靠近到目标航路点的相对快慢



# 全自主控制

## □ 路径规划

### (2) 直线路径跟随

#### 2) 算法设计

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{k_2} \text{sat}_{\text{gd}} \left( k_0 \tilde{\mathbf{p}}_{\text{wp}} + k_1 \mathbf{A} \tilde{\mathbf{p}}_{\text{wp}}, a_0 \right) - \frac{1}{k_2} \text{sat}_{\text{gd}} \left( \mathbf{v}, a_1 \right)$$

将虚拟控制量写成PD控制器的形式

$$\mathbf{u} = -\frac{k'_1}{k_2} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_d) - \frac{1}{k_2} \text{sat}_{\text{gd}} \left( \mathbf{v}, a_1 \right)$$

其中

$$\mathbf{p}_d = \mathbf{p} + \frac{1}{k'_1} \text{sat}_{\text{gd}} \left( k_0 (\mathbf{p}_{\text{wp}} - \mathbf{p}) + k_1 (\mathbf{p}_{\text{wp,perp}} - \mathbf{p}), a_0 \right)$$

令  $1/k'_1 = k_0 = k_1 = 1$ ，则  $\mathbf{p}_d$  的物理意义如右图所示。

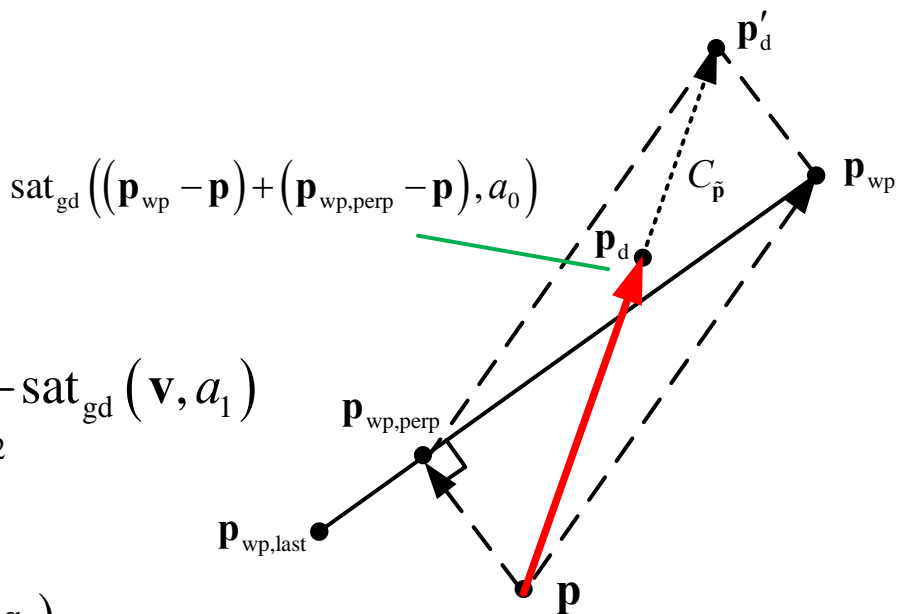


图13.11 直线路径算法跟随物理意义





# 全自主控制

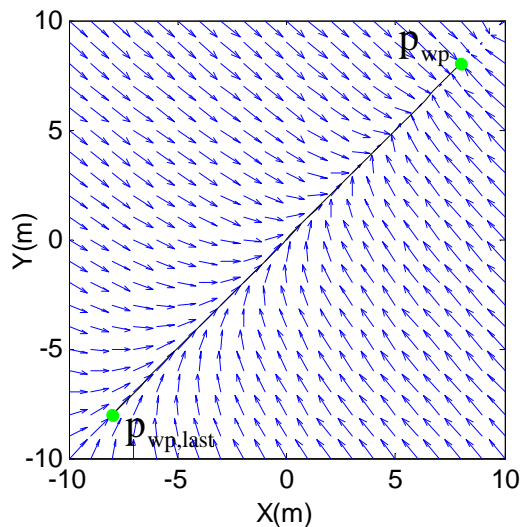
## □ 路径规划

$$\mathbf{p}_d = \mathbf{p} + \frac{1}{k_1'} \text{sat}_{\text{gd}} \left( k_0 (\mathbf{p}_{\text{wp}} - \mathbf{p}) + k_1 (\mathbf{p}_{\text{wp,perp}} - \mathbf{p}), a_0 \right)$$

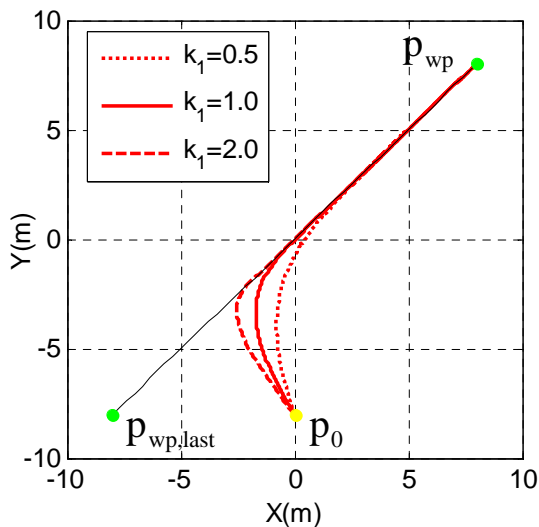
(2) 直线路径跟随

3) 算法仿真

**k1 越大，多旋翼靠近到直线航路的速度越快!**



(a) 人工势场



(b) 从  $\mathbf{p}_0$  出发在  $\mathbf{p}_{\text{wp}}$  结束的三条飞行路径

图13.12 直线路径跟随算法仿真结果



# 全自主控制

## □ 路径规划

### (3) 避障

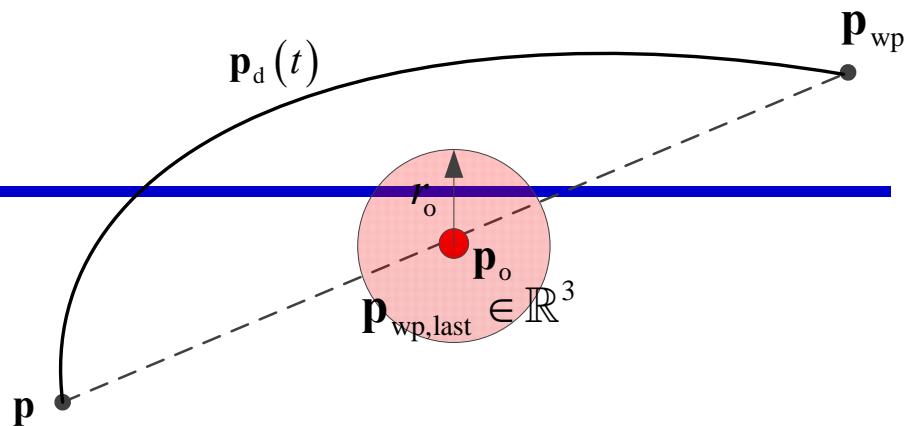


图13.13 避障示意图

1) 问题描述 令  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$  表示多旋翼当前位置， $\mathbf{p}_{wp} \in \mathbb{R}^3$  表示目标航路点。设计局部路径规划器实时地生成期望位置  $\mathbf{p}_d \in \mathbb{R}^3$ ，引导多旋翼飞向目标航路点  $\mathbf{p}_{wp} \in \mathbb{R}^3$  并避开半径为  $r_o \in \mathbb{R}_+$ ，球心位于  $\mathbf{p}_o \in \mathbb{R}^3$  处的障碍物。

- 1. 飞行器刚开始不在障碍区域内；
- 2. 目标位置离障碍足够远。

### 2) 两个假设

假设1: 多旋翼的初始位置  $\mathbf{p}_o \in \mathbb{R}^3$  满足  $(\mathbf{p}_o - \mathbf{p}_o)^T (\mathbf{p}_o - \mathbf{p}_o) - r_o^2 > 0$ ;

假设2: 目标航路点  $\mathbf{p}_{wp}$  满足  $\frac{1}{(\mathbf{p}_o - \mathbf{p}_{wp})^T (\mathbf{p}_o - \mathbf{p}_{wp}) - r_o^2} \approx 0$ 。



# 全自主控制

## □ 路径规划

### (3) 避障

#### 3) 算法设计

定义  $\tilde{\mathbf{p}}_o = \mathbf{p} - \mathbf{p}_o$ ，考虑到饱和处理，定义函数

$$V_2 = \underbrace{k_0 \int_{C_{\tilde{\mathbf{p}}}} \text{sat}_{\text{gd}}(\tilde{\mathbf{p}}_{\text{wp}}, a_0)^T d\tilde{\mathbf{p}}_{\text{wp}}}_{\text{靠近目标航路点}} + \underbrace{\frac{k_1}{2} \frac{1}{\tilde{\mathbf{p}}_o^T \tilde{\mathbf{p}}_o - r_o^2}}_{\text{避障}} + \frac{k_2}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{v}$$

根据假设1，“避障”项在初始时刻是有界的，如果函数一直有界，则  $(\mathbf{p}_o - \mathbf{p})^T (\mathbf{p}_o - \mathbf{p}) > r_o^2$ ，即多旋翼不会与障碍物发生碰撞。



# 全自主控制

## □ 路径规划

### (3) 避障

#### 3) 算法设计

对  $V_2$  求一阶导数得  $\dot{V}_2 = k_0 \text{sat}_{\text{gd}}(\tilde{\mathbf{p}}_{\text{wp}}, a_0)^T \mathbf{v} - \frac{k_1}{(\tilde{\mathbf{p}}_o^T \tilde{\mathbf{p}}_o - r_o^2)^2} \tilde{\mathbf{p}}_o^T \mathbf{v} + k_2 \mathbf{v}^T \mathbf{u}$

如果虚拟控制量

$$\mathbf{u} = -\frac{k_0}{k_2} \text{sat}_{\text{gd}}(\tilde{\mathbf{p}}_{\text{wp}}, a_0) + \frac{k_1}{k_2 (\tilde{\mathbf{p}}_o^T \tilde{\mathbf{p}}_o - r_o^2)^2} \tilde{\mathbf{p}}_o - \frac{1}{k_2} \text{sat}_{\text{gd}}(\mathbf{v}, a_1)$$

那么  $\dot{V}_2 = -\mathbf{v}^T \text{sat}_{\text{gd}}(\mathbf{v}, a_1) \leq 0$ 。由于  $V_2(0) > 0$  且  $\dot{V}_2 \leq 0$ ，函数满

足  $V_2(t) \leq V_2(0), t \in [0, \infty)$ ，这意味着  $0 < \frac{k_1}{2V_2(0)} \leq \tilde{\mathbf{p}}_o^T \tilde{\mathbf{p}}_o - r_o^2$ ，即，在虚拟控制量  $\mathbf{u}$  的控制下，多旋翼能避开障碍物。



# 全自主控制

## □ 路径规划

### (3) 避障

#### 3) 算法设计

$$\mathbf{u} = -\frac{k_0}{k_2} \text{sat}_{\text{gd}}(\tilde{\mathbf{p}}_{\text{wp}}, a_0) + \frac{k_1}{k_2 (\tilde{\mathbf{p}}_o^T \tilde{\mathbf{p}}_o - r_o^2)^2} \tilde{\mathbf{p}}_o - \frac{1}{k_2} \text{sat}_{\text{gd}}(\mathbf{v}, a_1)$$

当且仅当  $\mathbf{v} = \mathbf{0}_{3 \times 1}$  时  $\dot{V}_2 = 0$ 。  $\mathbf{v} = \mathbf{0}_{3 \times 1}$  意味着  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  进一步

$$a\tilde{\mathbf{p}}_{\text{wp}} + b\tilde{\mathbf{p}}_o = 0 \quad (2)$$

其中

$$a = -\frac{k_0}{k_2} \kappa_{a_0}(\tilde{\mathbf{p}}_{\text{wp}}), b = \frac{k_1}{k_2 (\tilde{\mathbf{p}}_o^T \tilde{\mathbf{p}}_o - r_o^2)^2}, \kappa_a(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & , \|\mathbf{x}\|_\infty \leq a \\ \frac{a}{\|\mathbf{x}\|_\infty} & , \|\mathbf{x}\|_\infty > a \end{cases}$$

根据不变集原理，系统将全局收敛到  $(\mathbf{p}, \mathbf{v})$ ，其中  $\mathbf{v} = \mathbf{0}_{3 \times 1}$ ， $\mathbf{p}$  是方程 (2) 的解。参数  $k_0, k_1$  可以调整多旋翼靠近到目标航路点和避障的相对快慢。



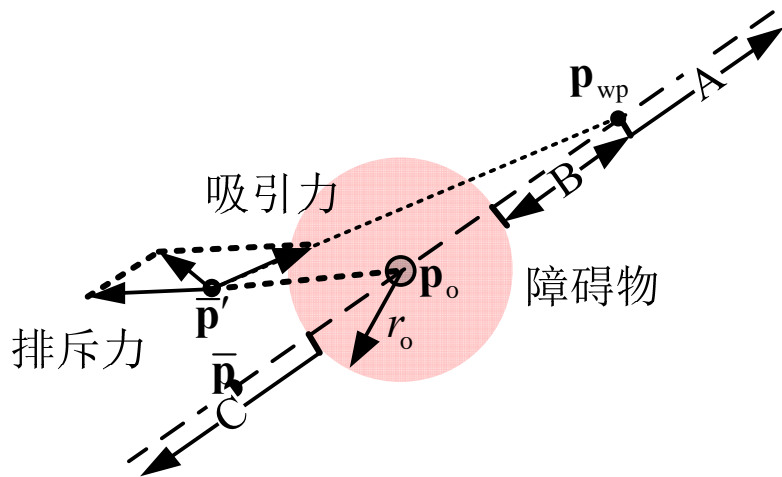
# 全自主控制

## □ 路径规划

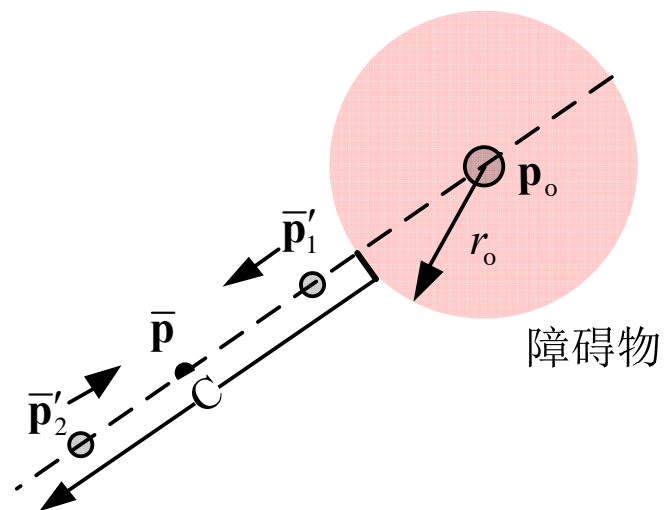
### (3) 避障

$$a\tilde{\mathbf{p}}_{wp} + b\tilde{\mathbf{p}}_o = 0 \quad (2)$$

$\bar{\mathbf{p}}$  是不稳定的平衡点  
 $\mathbf{p}_{wp}$  是唯一稳定的平衡点



(a) 多旋翼不在“射线C”上运动



(b) 多旋翼在“射线C”上运动

图13.14 平衡点示意图



# 全自主控

## □ 路径规划

### (3) 避障

#### 3) 算法设计

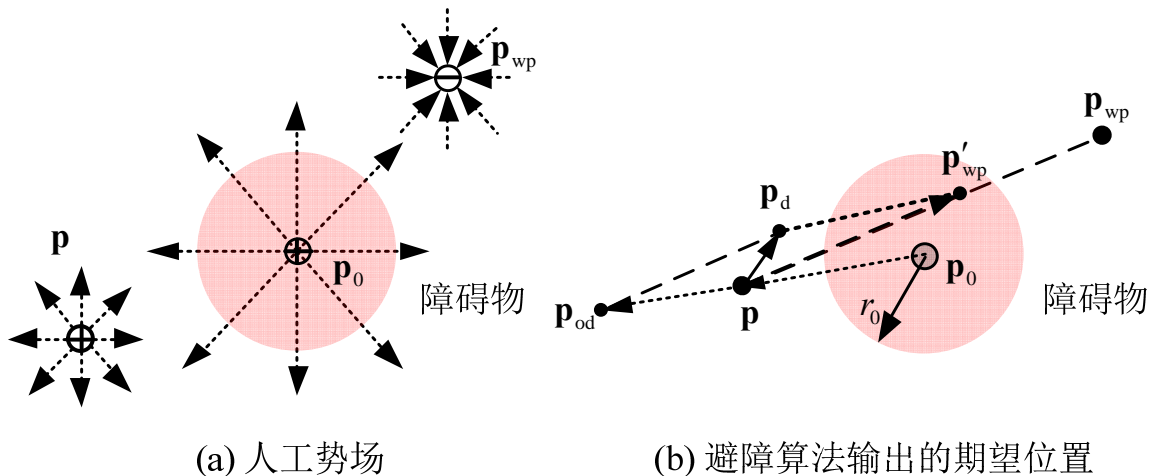


图13.15 避障算法物理意义

把虚拟控制量写成PD控制器的形式

$$\mathbf{u} = -\frac{k'_1}{k_2}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_d) - \frac{1}{k_2} \text{sat}_{\text{gd}}(\mathbf{v}, a_1)$$

其中

$$\mathbf{p}_d = \mathbf{p} + \frac{k_0}{k'_1} \text{sat}_{\text{gd}}(\mathbf{p}_{\text{wp}} - \mathbf{p}, a_0) - \frac{k_1}{k'_1} \frac{1}{\left( (\mathbf{p} - \mathbf{p}_o)^T (\mathbf{p} - \mathbf{p}_o) - r_o^2 \right)^2} (\mathbf{p}_o - \mathbf{p})$$

令  $k_0/k'_1 = k_1/k'_1 = 1$ , 则  $\mathbf{p}_d$  的物理意义如图 (b) 所示。





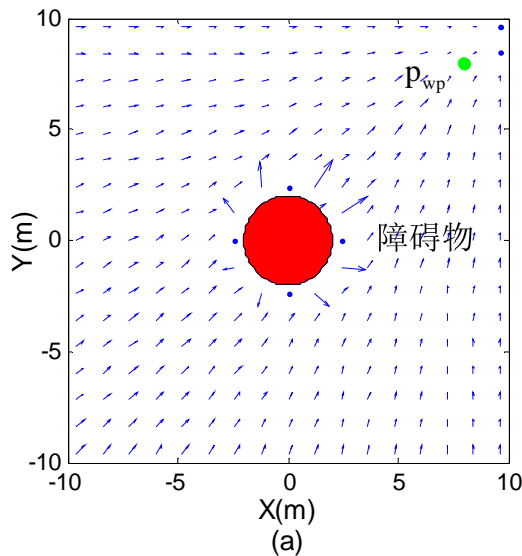
# 全自主控制

## □ 路径规划

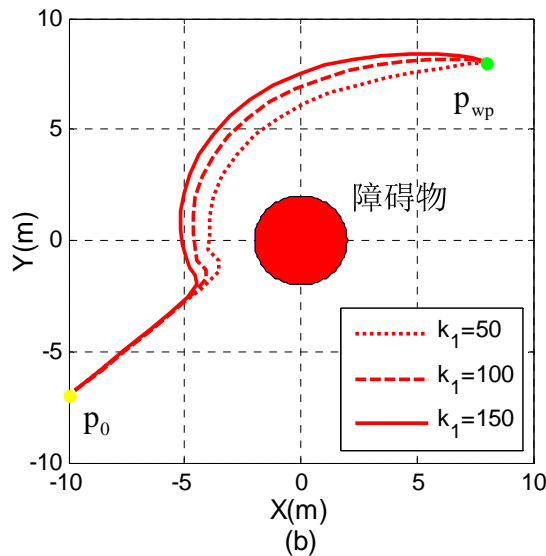
**$k_1$  越大，多旋翼越早做出避障行为！**

### (3) 避障

#### 4) 算法仿真



(a) 人工势场



(b) 从  $P_0$  出发在  $P_{wp}$  结束的3条避障路径

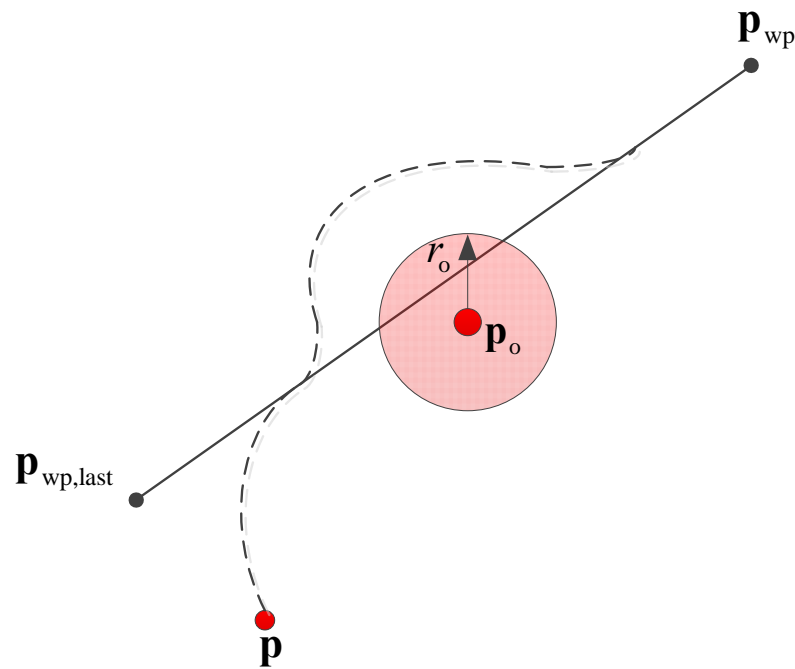
图13.16 避障算法仿真结果



# 全自主控制

## □ 综合

实际的任务中需要多旋翼沿直线飞行，遇到障碍时还能避开。通过以上讲解，我们可以通过**叠加**直线路径、目标位置和障碍物的**势场**来设计算法。具体可以参考本门课程给定的参考书。



综合算法示意图



# 半自主控制

---

## □ 半自主控制的三种模态

通常，根据自驾仪自主控制的程度，把处于半自主控制下的多旋翼分为3种模态：

- 自稳定模态 (Stabilize Mode)
- 高度保持模态 (Altitude Hold Mode)
- 定点模态 (Loiter Mode)



# 半自主控制

## □ 半自主控制的三种模态

通常，根据自驾仪自主控制的程度，把处于半自主控制下的多旋翼分

为3种模态：

- 自稳定模态 (Stabilize Mode)
- 高度保持模态 (Altitude Hold Mode)
- 定点模态 (Loiter Mode)

- 在遥控 (RC) 模式下飞控手可以利用遥控器的滚转/俯仰摇杆控制多旋翼的滚转/俯仰角，从而控制其前后左右飞行，此时，如果不同时调整升降摇杆，多旋翼的高度会改变，若想使多旋翼保持定点悬停，飞控手需要不断调整遥控器的所有摇杆。
- 当飞控手释放摇杆时，多旋翼自动进入自动 (AC) 模式，多旋翼会自动保持自身水平，但是位置会漂移。此外，飞控手可以利用遥控器的偏航摇杆控制多旋翼的偏航角。当飞控手释放偏航摇杆时，多旋翼会保持当前机头方向。



# 半自主控制

## □ 半自主控制的三种模态

通常，根据自驾仪自主控制的程度，把处于半自主控制下的多旋翼分为3种模态：

- 自稳定模态 (Stabilize Mode)
- 高度保持模态 (Altitude Hold Mode)
- 定点模态 (Loiter Mode)

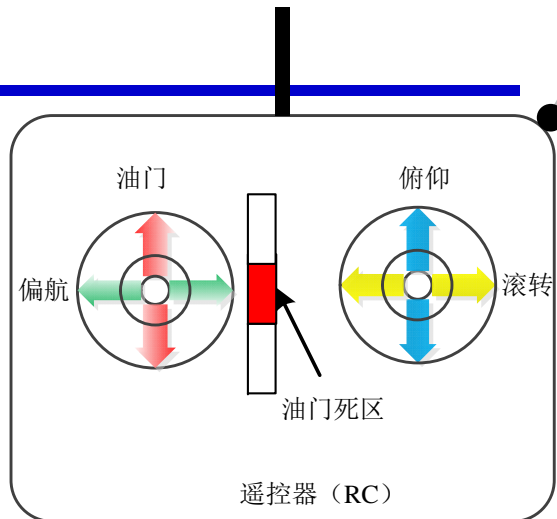


图13.17 遥控器摇杆示意图

- 如图所示，当油门摇杆位于死区范围时，多旋翼自动进入**自动模式**，然后油门被自动地调整来保持当前的高度，飞控手需要不断地调整遥控器的滚转/俯仰摇杆保持悬停。
- 一旦油门摇杆离开死区范围，多旋翼将进入**遥控模式**，也就是说此时多旋翼是上升还是下降取决于油门摇杆朝哪个方向偏移。高度保持模态需要高度传感器的支持才能实现，例如气压计、超声波测距仪等。



# 半自主控制

## □ 半自主控制的三种模态

通常，根据自驾仪自主控制的程度，把处于半自主

控制下的多旋翼分为3种模态：

- 自稳定模态 (Stabilize Mode)
- 高度保持模态 (Altitude Hold Mode)
- 定点模态 (Loiter Mode)

- 定点模态下多旋翼能自动保持当前的水平位置、航向和高度。当飞控手释放滚转/俯仰摇杆，偏航摇杆，并将油门摇杆推到死区范围时，多旋翼自动进入**自动模式**，并保持当前的水平位置、航向和高度。高精度的GPS位置信息、磁罗盘信息以及机身低振动对获得良好的定点效果非常重要。
- 飞控手可以通过推动摇杆使多旋翼进入**遥控模式**来实现对多旋翼水平位置、航向和高度的控制。定点模态需要测高仪器和位置传感器的支持才能实现，例如GPS和摄像机等。



# 半自主控制

## □ 遥控模式

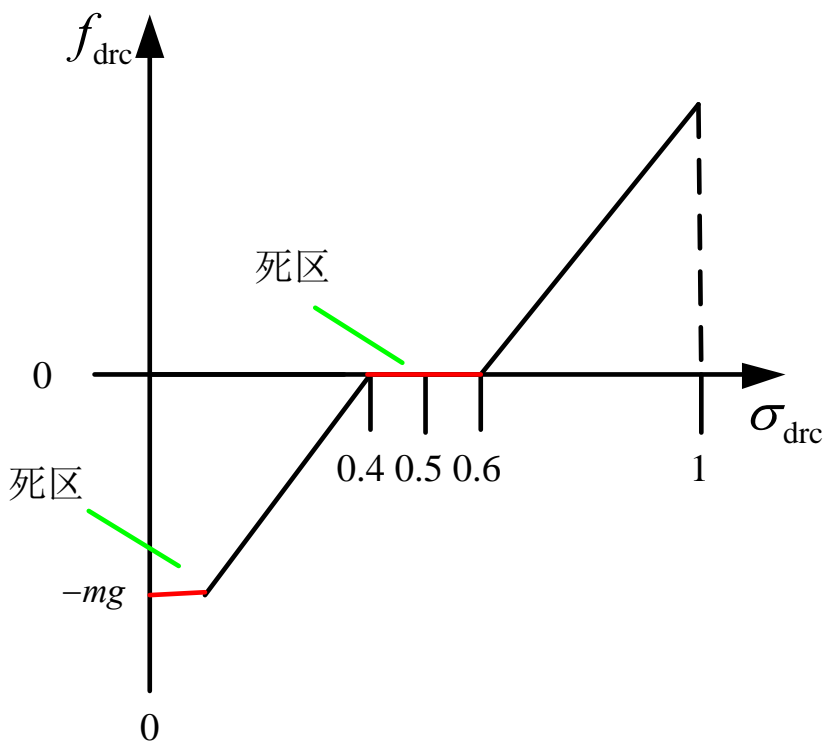
定义  $(\cdot)_d, (\cdot)_{\text{drc}}$  分别表示期望值和遥控器输出值。在半自主控制下，油门/偏航摇杆和滚转/俯仰摇杆分别用来输出期望总拉力  $f_{\text{drc}} = u_T$ ，期望偏航角速率  $\dot{\psi}_{\text{drc}} = u_{\omega_z}$ ，期望滚转角  $\phi_{\text{drc}} = u_{\phi}$  和期望俯仰角  $\theta_{\text{drc}} = u_{\theta}$ 。在**直接式油门**中，遥控器输出的**总拉力指令与油门摇杆的偏移量成正比**。此外，一些多旋翼产品，例如大疆的小精灵，采用**增量式油门**，这种油门有两个特点：①飞控手释放油门摇杆时油门摇杆能自动弹回死区位置；②油门摇杆的偏移量与期望的垂直方向速率或者拉力变化率成正比。





# 半自主控制

## □ 遥控模式



这里,  $\sigma_{drc} \in [0,1]$ 是油门摇杆的偏移量, 其中  $\sigma_{drc} = 0.5$ 表示油门摇杆的中间位置。如果  $\sigma_{drc} \in [0.4,0.6]$ , 那么  $f_{drc}(\sigma_{drc}) = 0$ , 然后自动控制器开始引入高度反馈进行高度保持。在这里, 前馈控制量  $mg$  由自动控制器给出, 所以, 如图所示,  $f_{drc}$  从  $-mg$  开始。死区用来消除油门摇杆微弱变化带来的影响。

图13.18 油门摇杆偏移量与油门控制量的关系



# 半自主控制

## □ 自动控制模式

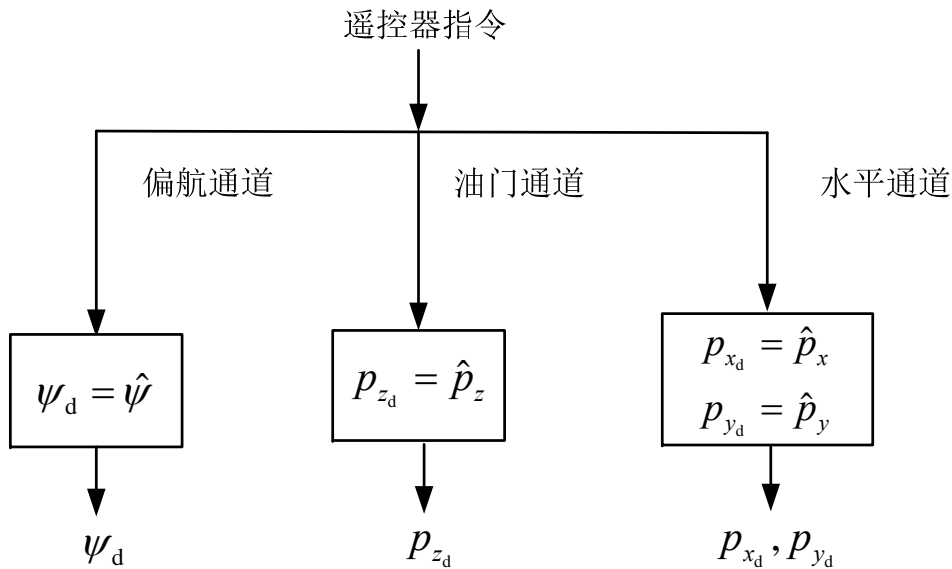
当所有摇杆都处在中间位置的时候，自驾仪的自动控制（AC）将接管多旋翼的控制。事实上，无论多旋翼处于自稳定模态、高度保持模态还是定点模态，任务决策模块都会产生期望姿态或者期望位置  $\mathbf{p}_{\text{dac}}$  和偏航角  $\psi_{\text{dac}}$ ，状态估计模块都会产生位置估计量  $\hat{\mathbf{p}} = [\hat{p}_x \ \hat{p}_y \ \hat{p}_z]^T$  和姿态估计量  $\hat{\Theta} = [\hat{\phi} \ \hat{\theta} \ \hat{\psi}]^T$ ，自动模式的任务都是控制多旋翼飞行使得  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\mathbf{p}}(t) - \mathbf{p}_{\text{dac}}(t)\| = 0$  和  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\psi}(t) - \psi_{\text{dac}}(t)\| = 0$ 。因此，**对于3种模态来说AC控制的结构是一样的**。然而，由于3种模态采用不同的传感器，导航信息的估计精度会有所不同。



# 半自主控制

## □ 自动控制模式

### (1) 自稳定模态 ( Stabilize Mode )



自稳定模态根据期望位置  $\mathbf{p}_d = \hat{\mathbf{p}}$  和期望偏航角  $\psi_d = \hat{\psi}$  生成期望总拉力和力矩。如图所示，自驾仪根据遥控器指令生成期望位置  $\mathbf{p}_d$  和期望偏航角  $\psi_d$ 。

图13.19 自稳定模态下期望位置和偏航角的生成原理



# 半自主控制

## □ 自动控制模式

### (1) 自稳定模态 ( Stabilize Mode )

回想第十一讲介绍的控制器，水平通道控制器为

$$\Theta_{hd} = -g^{-1} \mathbf{A}_{\psi}^{-1} \left( -\mathbf{K}_{phd} \dot{\hat{\mathbf{p}}}_h - \mathbf{K}_{php} (\hat{\mathbf{p}}_h - \hat{\mathbf{p}}_{hd}) \right)$$

高度通道控制器为

$$f_d = -m \left( -k_{p_z d} \dot{\hat{p}}_z - k_{p_z p} (\hat{p}_z - p_{z_d}) \right)$$

由于  $\mathbf{p}_d = \hat{\mathbf{p}}$ ，水平通道控制器和高度通道控制器变为

$$\Theta_{hd} = g^{-1} \mathbf{A}_{\psi}^{-1} \mathbf{K}_{phd} \dot{\hat{\mathbf{p}}}_h$$

$$f_d = mg + mk_{p_z d} \dot{\hat{p}}_z$$



# 半自主控制

## □ 自动控制模式

### (1) 自稳定模态 ( Stabilize Mode )

由于  $\hat{\mathbf{p}}_h$  不可获取或者不够精确或者磁力计不可用，通常令  $\Theta_{hd} = \mathbf{0}_{2 \times 1}$

这意味着自动控制器能使多旋翼保持水平。此外，自动控制器并不能保持高度。这是因为控制器只是把高度通道的速度控制到零。

对于偏航通道，一个简单的控制器具有以下形式

$$\tau_z = -k_\psi \dot{\psi}$$

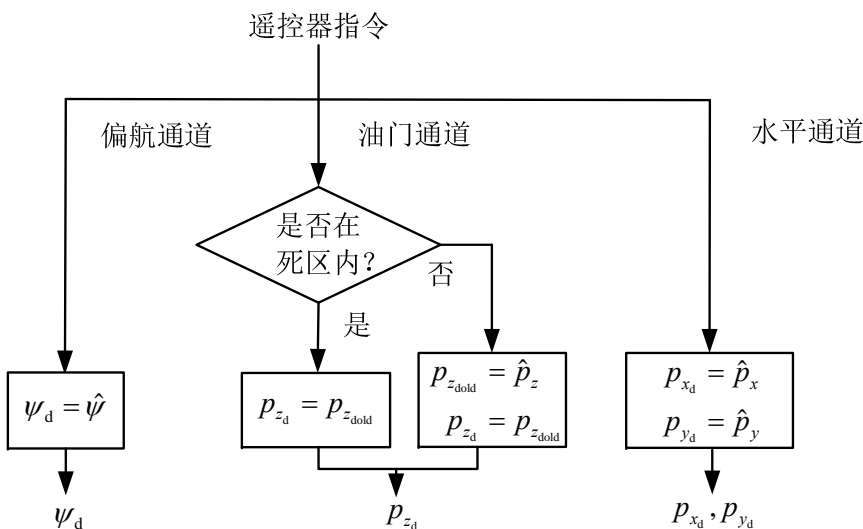
由于缺少位置信息反馈，自稳定模态不能使多旋翼稳定悬停。这个模态通常在没有GPS和高度测量传感器或者这些传感器失效的时候使用。



# 半自主控制

## □ 自动控制模式

### (2) 高度保持模态 ( Altitude Hold Mode )



高度保持模态根据期望高度  $p_{z_d} = p_{z_{dold}}$ ,

期望水平位置  $\mathbf{p}_{hd} = \hat{\mathbf{p}}_h$  和期望偏航角

$\psi_d = \hat{\psi}$  生成期望总拉力和力矩。其中

,  $\mathbf{p}_{hd} = \hat{\mathbf{p}}_h$  意味着  $\theta_d = \phi_d = 0$ 。

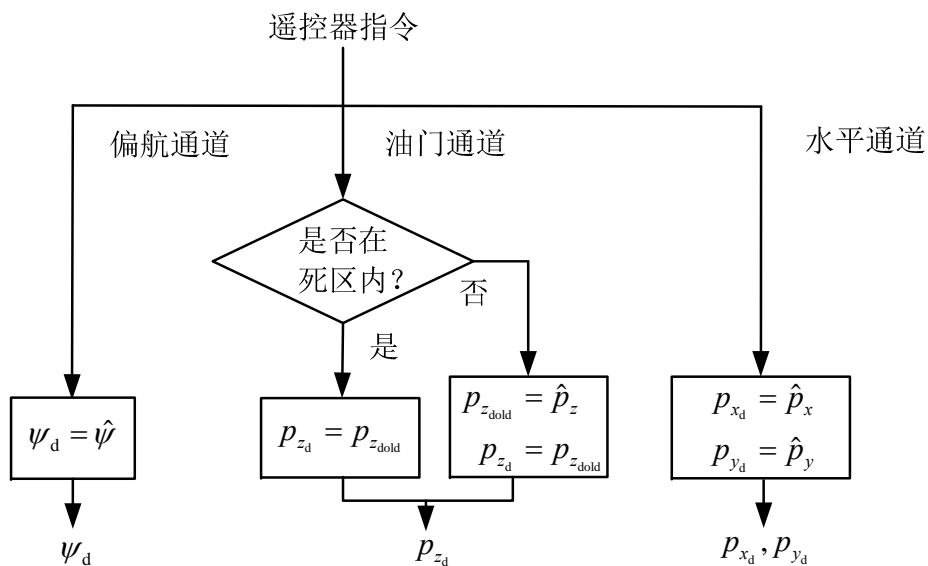
图13.20 高度保持模态下期望位置和偏航角的生成原理



# 半自主控制

## □ 自动控制模式

### (2) 高度保持模态 ( Altitude Hold Mode )



如图所示，将油门摇杆回到中间位置的时刻记为  $t_{zd}$ ，将该时刻的高度估计量记为  $p_{z_{dold}} = \hat{p}_z(t_{zd})$ 。与此同时，高度保持模态将多旋翼的高度保持在  $p_{z_d} = p_{z_{dold}}$ 。与自稳定模态一样，由于缺少水平位置信息反馈，高度保持模态也不能使多旋翼稳定悬停。高度保持模态通常在高度测量传感器可用，而缺少位置传感器或电子罗盘不可用的时候使用。

图13.21 高度保持模态下期望位置和偏航角的生成原理





# 半自主控制

## □ 自动控制模式

### (3) 定点模态 ( Loiter

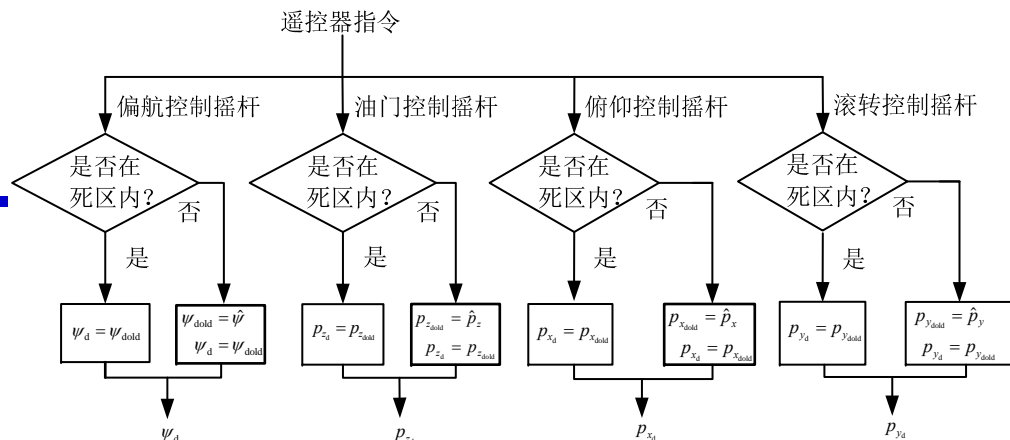


图13.22 定点模态下期望位置和期望偏航角的生成原理

如图所示，定点模态根据期望的位置  $\mathbf{p}_d = \mathbf{p}_{dold}$  和偏航角  $\psi_d = \psi_{dold}$  生成期望总拉力和力矩。将4个摇杆回到中间位置的时刻分别记为  $t_{\psi_d}, t_{z_d}, t_{x_d}, t_{y_d}$ ，将这些时刻的估计量分别记为

$$\psi_{dold} = \hat{\psi}(t_{\psi_d})$$

$$p_{z_{dold}} = \hat{p}_z(t_{z_d})$$

$$p_{x_{dold}} = \hat{p}_x(t_{x_d})$$

$$p_{y_{dold}} = \hat{p}_y(t_{y_d})$$

自主控制器将控制多旋翼悬停在  $\mathbf{p}_d = \mathbf{p}_{dold}$  并保持偏航角为  $\psi_d = \psi_{dold}$ 。定点模态通常在高度测量传感器和位置传感器都可用的时候使用。



# 半自主控制

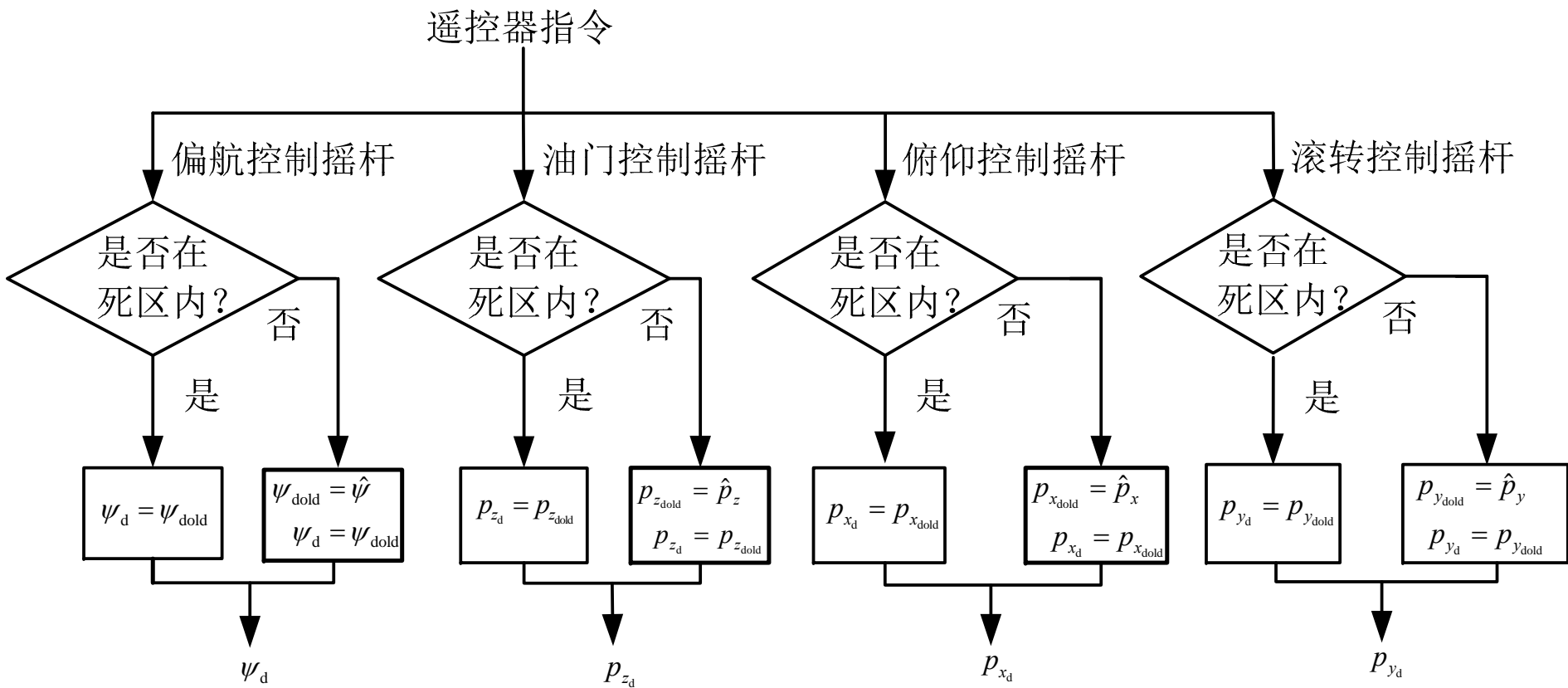


图13.22 定点模式下期望位置和期望偏航角的生成原理



# 半自主控制

## 遥控与自主控制间的切换逻辑

### (1) 偏航指令的切换逻辑

$$\psi_d = \psi_{dap} + \psi_{drc}$$

$$\psi_{dap} = \hat{\psi} \quad \psi_{drc} = \dot{\psi}_{drc} \Delta t$$

遥控器的指令

### (2) 油门指令的切换逻辑

$$f_d = f_{dap} + f_{drc} (\sigma_{drc})$$

自主控制器的指令      遥控器的指令

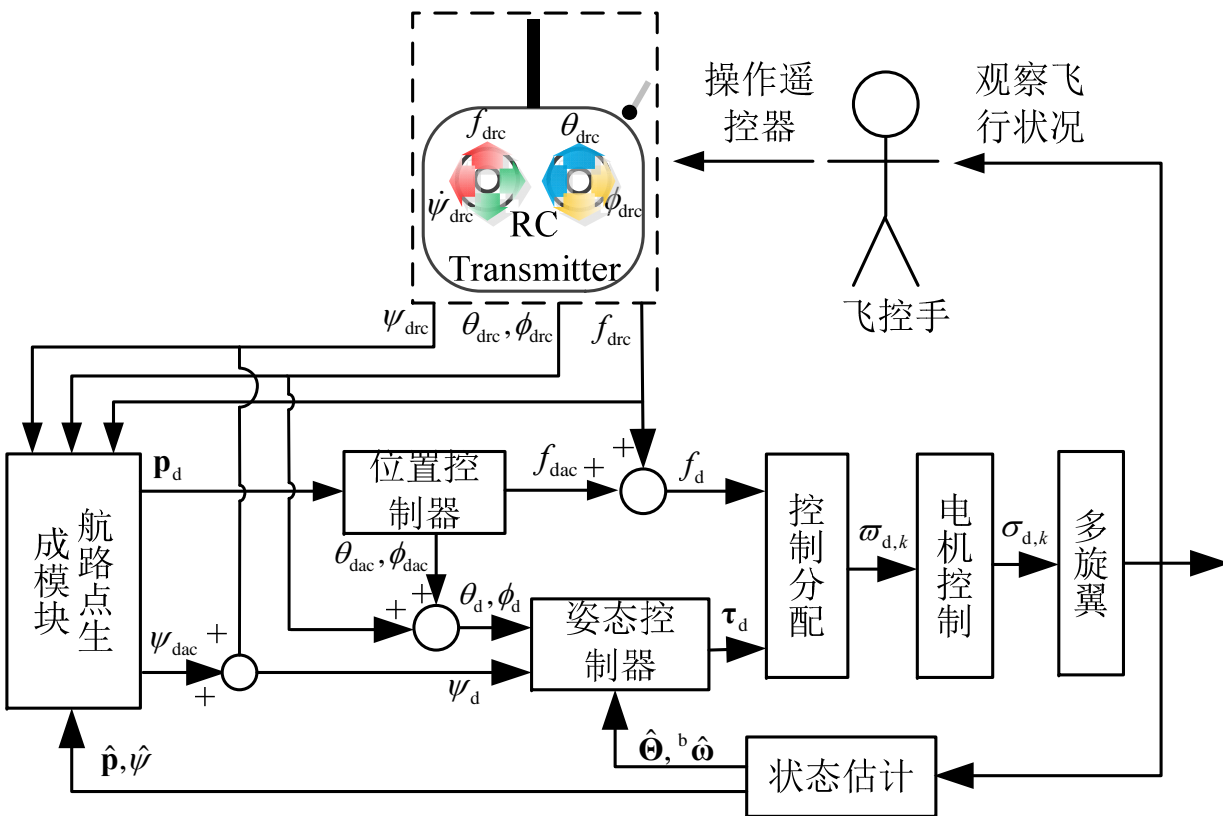


图13.23 半自主控制闭环框图



# 半自主控制

## □ 遥控与自主控制间的切换逻辑

### (3) 滚转/俯仰指令的切换逻辑

当滚转/俯仰摇杆处于中间位置附近时，多旋翼切换到AC模式，

$(p_{x_d}, p_{y_d})$  将保持常值，AC控制器将控制多旋翼保持在水平位置

$p_{x_d} = p_{x_{dold}} (p_{y_d} = p_{y_{dold}})$ ，滚转/俯仰摇杆离开中间位置，则多旋翼切换到RC模式， $(p_{x_{dold}}, p_{y_{dold}})$  将连续地更新，即  $p_{x_{dold}} = \hat{p}_x (p_{y_{dold}} = \hat{p}_y)$ 。滚转/俯仰指令的切换逻辑可以表示为

$$\theta_d = \theta_{dap} + \theta_{drc}$$

$$\phi_d = \phi_{dap} + \phi_{drc}$$

当  $\theta_{drc}(\phi_{drc})$  都非零的时候  $\theta_{dap}(\phi_{dap})$  应该要等于零。当  $\theta_{drc}(\phi_{drc})$  等于零的时候  $\theta_{dap}(\phi_{dap})$  的值由自主控制器确定。



# 本讲小结

1. 单架多旋翼的任务规划或者自主飞行控制相对简单。
2. 多架多旋翼的协同工作可以更高效地完成给定的任务，近年来，多架多旋翼的协同控制在可控实验环境下已经得以实现。
3. 未来要实现多旋翼的全自主任务规划，必须具备以下条件：
  - (1) 每一架多旋翼都要足够可靠。
  - (2) 位置和姿态的估计要十分精确。
  - (3) 要具有足够长的续航时间，且要装配电池管理系统（BMS）评估电池的健康。
  - (4) 要修建具有自动充电功能的快速充电站。



# 资源

---

(1) 可靠飞行控制研究组主页课程中心(全部课件下载)

<http://rfly.buaa.edu.cn/course>

(2) 关注可靠飞行控制研究组公众号 buaarfly(文章、资讯等)

(3) 多旋翼设计与控制交流QQ群:183613048

(4) 视频课程(MOOC)同步发布, 网易云课堂搜索 “多旋翼”

<http://study.163.com/course/introduction/1003715005.htm>

(5) 同名中文书本教材《多旋翼飞行器设计与控制》即将在电子工业出版社出版, 敬请期待

(6) 有疑问可联系课程总助教戴训华, 邮箱: [dai@buaa.edu.cn](mailto:dai@buaa.edu.cn)

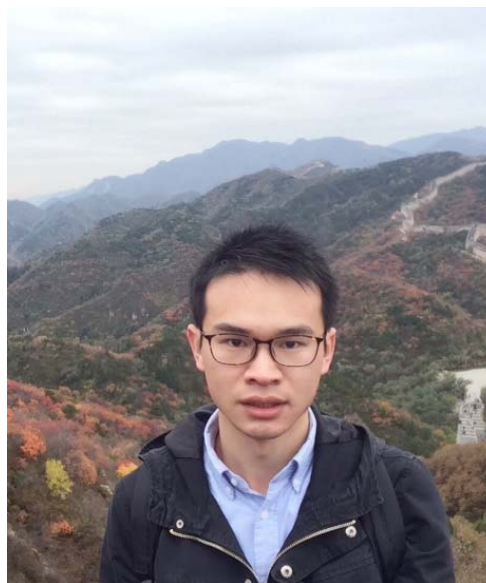


# 致谢

## 感谢控制组同学



颜江



戴训华

为本节课程准备作出的贡献。





---

# 谢谢!



---

# 多旋翼飞行器设计与控制

## 第十四讲 健康评估和失效保护

全权 副教授

qq\_buaa@buaa.edu.cn

自动化科学与电气工程学院

北京航空航天大学



# 东方智慧



## 未雨绸缪



# 核心问题

---

影响安全的事件有哪些？

如何处理这些事件？



# 大纲

---

1. 决策层的目的和意义
2. 安全问题
3. 健康评估
4. 失效保护
5. 安全决策实现
6. 本讲小结



# 1. 决策层的目的和意义

---

分模式决策的意义：

1. **使过程受控**。由于多旋翼需要与人交互，故将多旋翼的行为划分成不同的简单的模式，能够让人在多旋翼飞行过程中掌握飞行器的行为，确定飞行器当前状态。
2. **适应不同的飞行任务**。在手动和自动模式的切换时，多旋翼的模式也应该相应改变，从而使控制器适应不同的控制方式。
3. **适应不同的异常情况**。在多旋翼飞行时，传感器、通信、动力等都可能出现失效的情况。当出现失效情况时，通过多旋翼的模式转换，切换到合适的目标和控制器，保障飞行器安全。
4. **更好地映射出用户需求**，同时也可以方便需求方和实施方理解。



## 2. 安全问题

---

在多旋翼起飞前、飞行中都存在影响多旋翼安全的问题，这些安全问题与多旋翼决策存在着紧密的联系。在这里，主要考虑以下四个方面：

1. 通信故障(Communication Breakdown)
2. 传感器失效(Sensor Failure)
3. 动力系统异常(Power System Anomaly)
4. 参数配置错误(Parameter Configuration Mistake)





## 2. 安全问题

### □ 通信故障

**通信故障**主要是指遥控器（Remote Controller, RC）与多旋翼之间、地面站（Ground Control Station, GCS）与多旋翼之间无法正常通信。该类故障主要分为三个方面：

#### (1) 遥控器未校准

遥控器未校准是指多旋翼在第一次飞行之前，飞控手未对遥控器进行校准，即没有让多旋翼“知道”遥控器每个摇杆和开关的具体作用。若未对遥控器进行校准，则在多旋翼飞行过程中其飞行控制系统无法识别用户的指令，甚至可能识别错误的指令导致飞行事故。



## 2. 安全问题

---

### □ 通信故障

#### (2) 遥控器失联

遥控器失联是指在多旋翼起飞前或飞行过程中，遥控器和机载信号接收器无法正常通信。若使用遥控器控制多旋翼飞行，遥控器失联将导致多旋翼不受控制，产生安全问题。

#### (3) 地面站失联

地面站失联是指在多旋翼起飞前或飞行过程中，地面站与多旋翼无法正常通信。若多旋翼需要完成设定任务，则地面站失联将导致多旋翼无法获取任务点，导致任务无法完成。



## 2. 安全问题

---

### □ 传感器失效

传感器失效主要是指多旋翼上机载传感器测量不准确，无法正常工作，等等。这里介绍四种传感器失效。

#### (1) 气压计(Barometer)失效

气压计失效会导致多旋翼无法准确测量飞行高度，气压计失效主要体现在两个方面：

- 1) 气压计硬件失效；
- 2) 气压计和其他高度测量传感器（超声波测距模块等）对高度的测量结果不一致。



## 2. 安全问题

### □ 传感器失效

#### (2) 电子罗盘(Compass)失效

电子罗盘失效会导致多旋翼无法控制飞机朝向，即无法有效控制偏航通道。

电子罗盘失效问题主要体现在五个方面：

- 1) 电子罗盘硬件失效；
- 2) 电子罗盘未校准；
- 3) 电子罗盘偏移量过高（通常是因为在电子罗盘附近存在金属物体）；
- 4) 区域磁场过高或过低（高于或低于期望值的35%）；

5) 自驾仪中电子罗盘指向与外置电子罗盘（可能是单独的模块，也可能是与GPS封装在一起的模块）指向不同（指向偏差大于45度，通常是因为存在电子罗盘未校正）。



## 2. 安全问题

### □ 传感器失效

#### (3) GPS失效

GPS失效是指GPS模块无法精确测量位置信息，导致多旋翼无法完成设定航路或者定点悬停。多旋翼在失去了GPS模块返回的位置信息之后，仅能依靠惯性传感器给出约10秒的较为精确的位置信息，之后会发生较大的位置测量误差。

#### (4) 惯导系统(Inertial Navigation System)失效

惯导系统失效是指陀螺仪和加速度计无法正确给出姿态角和姿态角速率。主要体现在：

- 1) 硬件故障；
- 2) 未校准；
- 3) 不同的陀螺仪和加速度计测量不一致



## 2. 安全问题

### □ 动力系统异常

动力系统异常主要指**电池**失效，以及**电调**、**电机**和**桨**的硬件故障导致的动力单元失效。

(1) 电池失效。通常是由于电池电量不足或者电池寿命减少导致的多旋翼供电不足。

(2) 电调故障。主要表现在两个方面：1) 电调无法正确识别自驾仪给出的PWM指令；2) 电调无法给电机提供正确的输出电压。

(3) 电机故障。主要表现在一定的输入电压下，输出不正确的转速。

(4) 螺旋桨失效。桨的故障主要表现在桨叶松动，桨叶磨损和折断等。



## 2. 安全问题

### □ 动力系统异常

对于微小型多旋翼飞行器来讲，在飞行过程中出现执行器失效的可能性相对较小。该类失效通常发生在由于飞控手**不正当操作导致摔机**之后，

1) 电机和桨由于强烈碰撞导致硬件遭到破坏，

2) 也可能会出现电调的连接线接触不良；

也可能长时间高电流工作，散热不好，**电机温度较高而发生消磁。**





## 2. 安全问题

---

### □ 参数配置错误

多旋翼参数配置错误主要是指用户对自驾仪相关参数配置错误。比如，姿态角的PID控制各参数，故障保护阈值，滤波器系数等等。



## 3 健康评估

---

健康评估 (Health Evaluation) 是通过监测并分析系统的性能数据，**评估系统当前的工作状态是否正常，以及系统在未来一定时间段内是否存在异常或潜在的故障。**本讲不去具体区分健康评估和故障检测上的概念。健康评估是监测多旋翼安全问题的重要手段，主要包括两个方面：飞行前健康检查（离线）和飞行中健康评估（在线）。



## 3 健康评估

### □ 飞行前健康检查

在用户尝试解锁多旋翼时，自驾仪自动对以上十一项进行检查。若有一项不通过，则自驾仪给出相应提示音（若地面站与多旋翼已连接，则会在地面站提示自检未通过信息及原因）

序号	检查项	对应安全问题
1	遥控器是否已校准	通信故障
2	遥控器连接是否正常	通信故障
3	气压计是否存在硬件故障	传感器失效
4	电子罗盘是否存在硬件故障	传感器失效
5	电子罗盘是否已校准	传感器失效
6	GPS信号是否正常	传感器失效
7	惯导系统是否已校准	传感器失效
8	加速度计是否存在硬件故障	传感器失效
9	陀螺仪是否存在硬件故障	传感器失效
10	电池电压检查	动力系统异常
11	多旋翼关键参数设置是否正确	参数配置错误



## 3 健康评估

### □ 飞行中健康评估

#### (1) 通信实时健康评估

针对遥控器与多旋翼的通信健康评估，若**多旋翼持续x秒（比如5秒）未收到来自遥控器的信号**，则认为遥控器与多旋翼失去连接；针对地面站与多旋翼的通信健康评估，若**多旋翼持续x秒（比如5秒）无法接收地面站发出的航路点位置**，则认为地面站与多旋翼失去连接。



## 3 健康评估

### □ 飞行中健康评估

#### (2) 传感器实时健康评估

除GPS模块之外，其他传感器的实时健康监测通常要求多旋翼处于悬停状态，因为多旋翼在悬停状态下各传感器输出趋于稳定。若多旋翼在悬停时，气压计所获高度值出现较大范围地波动，进而导致多旋翼无法定高，则需要考虑气压计不健康的可能性。若多旋翼出现自转现象，则需要考虑电子罗盘不健康的可能性。若多旋翼出现较大抖动，则需要考虑惯导系统不健康的可能性。



## 3 健康评估

---

### □ 飞行中健康评估

#### (2) 传感器实时健康评估

在APM中，给出了电子罗盘和GPS健康评估的方法。

##### 1) 电子罗盘健康评估。

i) 多旋翼返回的mag\_field值可以反映来自动力系统的磁场干扰。

ii) 电子罗盘的各个方向的补偿量应该在-150~150之间，若不在此范围之内，则认为电子罗盘存在问题。



## 3 健康评估

---

### □ 飞行中健康评估

#### 2) GPS健康评估

对于GPS的健康评估，在多旋翼飞行过程中，利用EKF结合惯性测量单元（IMU）所得数据更新下一步的飞行器位置与GPS得到的飞行器位置相比较，当两个位置的距离小于某阈值时，则认为GPS健康，否则认为不健康。





# 3 健康评估

## 飞行中健康评估

### 2) GPS健康评估

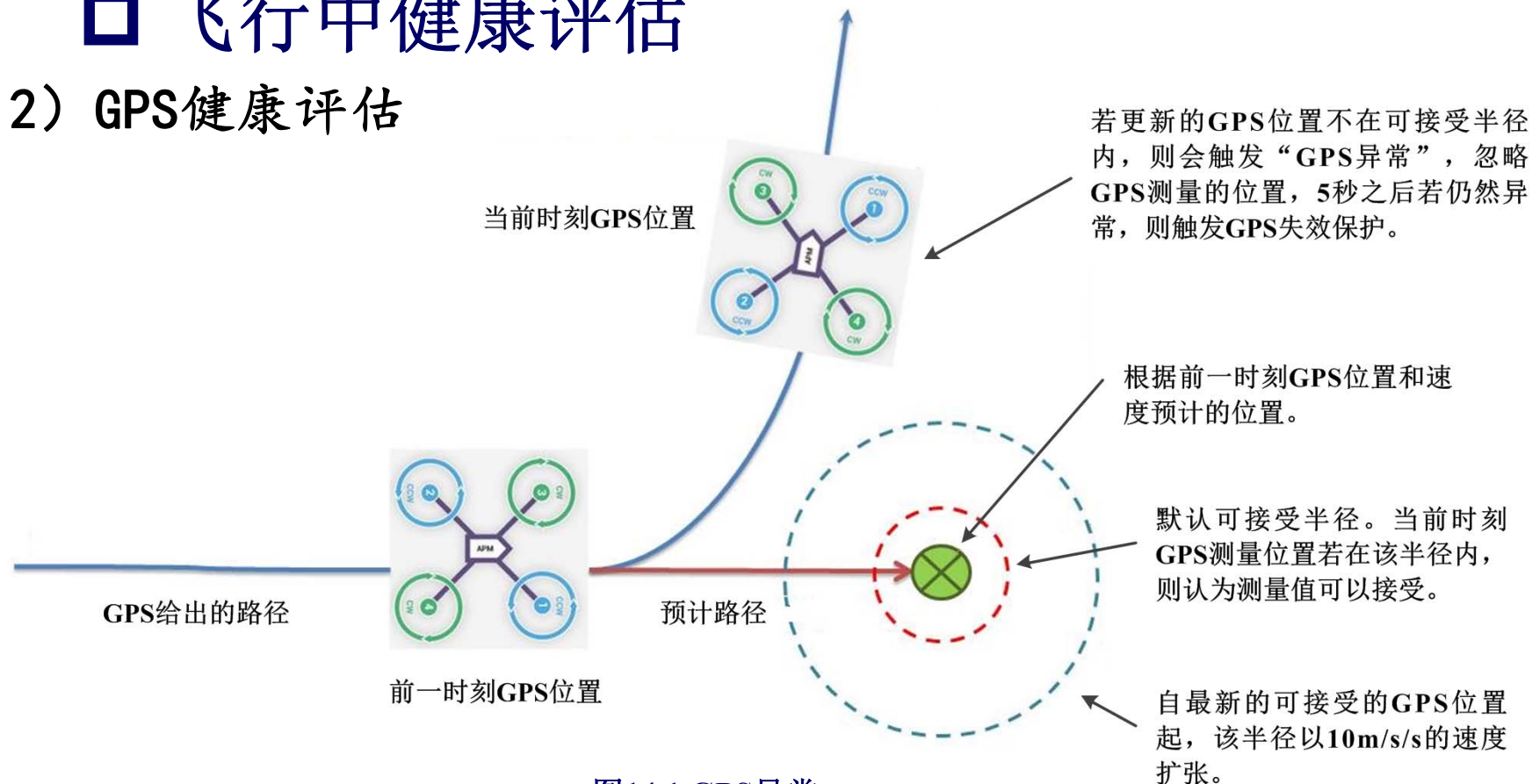


图14.1 GPS异常

<http://ardupilot.org/copter/docs/gps-failsafe-glitch-protection.html#gps-failsafe-glitch-protection>



## 3 健康评估

---

### □ 飞行中健康评估

#### 2) GPS健康评估

从飞行参数的角度来讲，可以通过获取“**可用卫星数目值**”和“**水平精度因子 (HDOP) 值**”来判断GPS是否出现差错 (glitch)。若“可用卫星数目值”小于9，则认为GPS失效。若HDOP值大于1.5，则认为GPS失效。



## 3 健康评估

### □ 飞行中健康评估

#### (3) 动力系统实时健康评估

1) **基于模型的电机和桨的健康评估** (文献中常见的提法是执行器 (actuator) 健康评估)。

多旋翼模型:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{B}\Lambda_k \mathbf{u}_k + \Gamma \mathbf{w}_k$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}^T \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

$$\Lambda = \text{diag}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$$

效率矩阵: 1 健康,  
0.5 亚健康, 0 不健康

执行器的实时健康评估归结于对效率矩阵的实时估计



## 3 健康评估

### □ 飞行中健康评估

在这里，利用增广EKF (Augmented-EKF) 的方法实现  $\boldsymbol{\eta}$  的实时估计。假定  $\boldsymbol{\eta}$  满足

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}_{k+1} = \boldsymbol{\eta}_k + \boldsymbol{\xi}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_{1,k} \\ \boldsymbol{\xi}_{k+1} = \boldsymbol{\xi}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_{2,k} \end{cases}$$

其中， $\boldsymbol{\varepsilon}_{1,k}$  和  $\boldsymbol{\varepsilon}_{2,k}$  为高斯白噪声。进一步，增广系统可写为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \boldsymbol{\eta}_{k+1} \\ \boldsymbol{\xi}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{B}\boldsymbol{\Lambda}_k \mathbf{u}_k + \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{w}_k \\ \boldsymbol{\eta}_k + \boldsymbol{\xi}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_{1,k} \\ \boldsymbol{\xi}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_{2,k} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \boldsymbol{\eta}_{k+1} \\ \boldsymbol{\xi}_{k+1} \end{bmatrix} + \mathbf{v}_k$$



## 3 健康评估

---

### □ 飞行中健康评估

(3) 动力系统实时健康评估。

2) 数据驱动的电机和桨的健康评估。

由叶素理论可知，通过分析机身振动数据的特征可以检测出执行器故障。

这里介绍种基于振动信号的执行器健康监测方法的步骤[1].

[1] Yan J, Zhao Z Y, Liu H X, Quan Q. Fault Detection and Identification for Quadrotor Based on Airframe Vibration Signals: A Data-Driven Method. In: Proceedings of the 34th Chinese Control Conference. Hang Zhou, China: 2015. 6356-6361.



## 3.2 飞行中健康评估

基于振动信号的执行器健康监测方法的步骤：

步骤1. 给出几种健康状态的划分，也就是健康的类型。  
比如：文献中，划分了正常桨叶  $(1, 0, 0)$ ，断桨桨叶  $(0, 1, 0)$ ，切削桨叶  $(0, 0, 1)$  三种健康类型。



图14.2 桨叶形状（自上至下依次为：正常桨叶，断桨桨叶，切削桨叶）

步骤2. 对于每种情况，做多组实验，可利用多旋翼加速度计获取其俯仰或滚转通道的加速度信号。

步骤3. 利用小波包分解对一个时间段的信号进行处理，获得小波包系数和相应的标准差。以四阶小波包分解为例，对振动信号进行小波包分解可获得16组小波包信号系数，对每一组系数计算其标准差，即可得到的标准差向量，该向量就认为是振动信号的特征向量。



## 3.2 飞行中健康评估

基于振动信号的执行器健康监测方法的步骤：

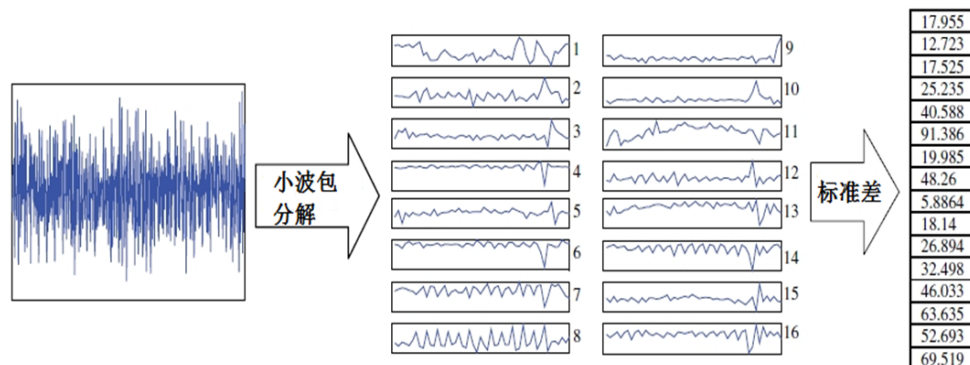


图12.3 小波包分解信号

步骤4. 离线训练人工神经网络作为健康监测器。网络输入为第二步求得的振动信号特征向量，网络输出为该信号对应的健康状态。

步骤5. 利用训练好的人工神经网络进行在线健康监测。将实时采集到的振动信号首先进行小波包分解，并将结果输入到人工神经网络，进一步会输出健康监测结果。





## 3.2 飞行中健康评估

估计基本正确!

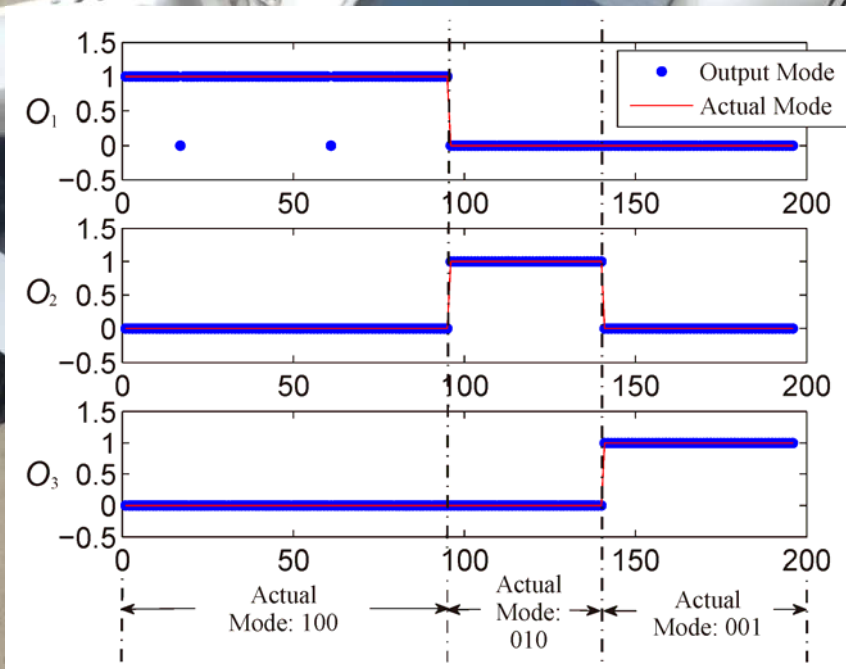


图12.4 第4组实验结果



## 3 健康评估

### □ 飞行中健康评估

#### (3) 动力系统实时健康评估

#### 3) 电池的健康评估

在工程上，常利用电池端电压来作为描述电池电量多少的指标，电池内阻来反映电池寿命。

在文献中，存在关于电池荷电状态（State of Charge, SoC）的研究。SoC用于表征电池电量，取值范围为[0,1]。

SoC=1表示电量充满，SoC=0表示电量耗尽。



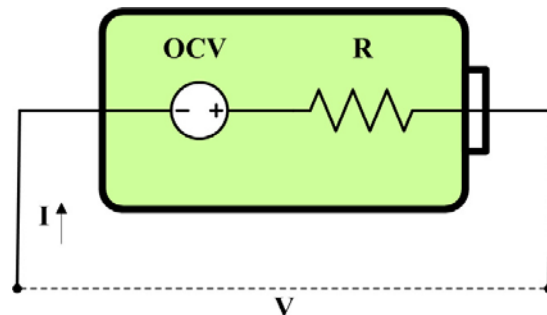
## 3 健康评估

### □ 飞行中健康评估

这里，给出文献中出现的一种基于滤波的SoC和电池内阻估计方法。

在电池放电过程中，SoC和电池内阻的变化满足

$$S_{k+1} = S_k - \frac{i_k \cdot T_s}{Q_{\max}} + w_{1,k}$$
$$R_{k+1} = R_k + w_{2,k}$$



其中 $S$ 为电池的SoC值， $i$ 为放电电流（单位：A）， $R$ 为电池内阻（单位： $\Omega$ ）， $Q_{\max}$ 为电池容量的标称值（单位：Ah）， $T_s$ 为采样时间（单位：h）， $w$ 为系统噪声。进一步，设计测量方程

$$V_k = \text{OCV}(S_k) - i_k \cdot R_k + C + v_k$$

其中， $V$ 为电池端电压（单位：V）， $C$ 为恒定误差偏移量， $v$ 为测量噪声， $\text{OCV}(S)$ 为电池的开路电压-荷电状态（OCV-SoC）变化曲线。



# 3 健康评估

## 3) 电池的健康评估

离线电池充放电实验，得到模型初始参数

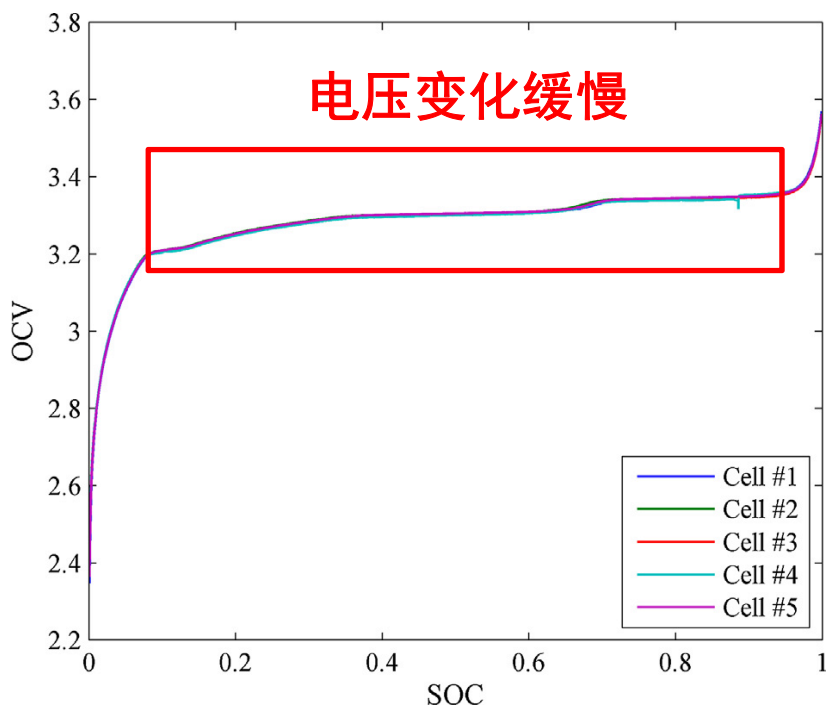


图14.5 电压-荷电状态曲线

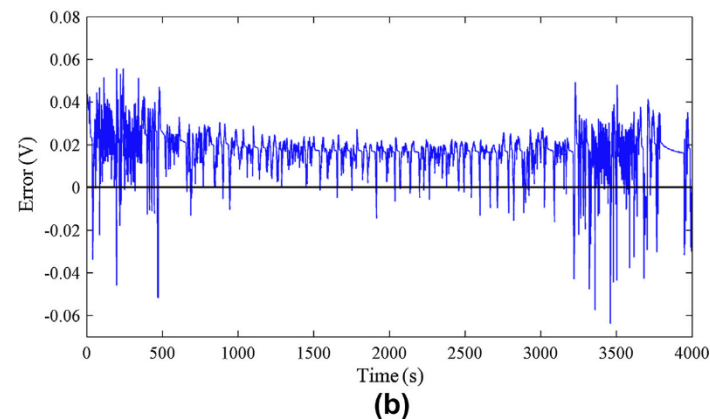
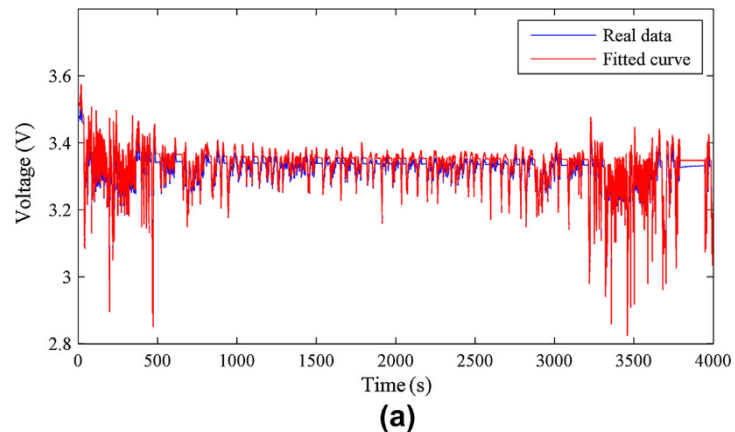


图14.6 充放电数据（电压-时间，电流-时间曲线）



# 3 健康评估

基于以上方程，可利用EKF或UKF实现SoC和R的估计

## 3) 电池的健康评估

根据在线电池放电数据，进行SoC估计

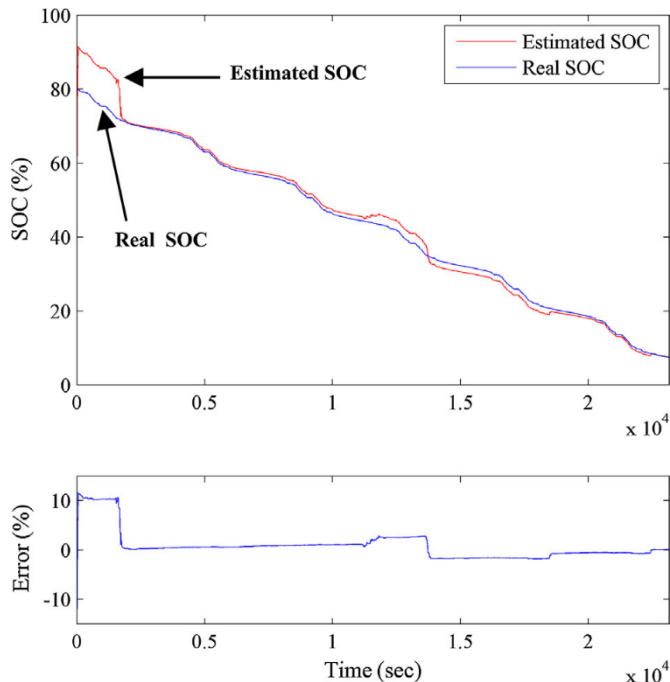


图14.7 基于UKF的SoC在线估计

得到模型参数之后，根据EKF或UKF实现SoC和电池内阻R值的在线估计。给定电池的实时放电电流和路端电压，实时估计出电池的SoC值，右图中可以看出估计的SoC值与真实的SoC值较为接近，说明了该方法的有效性。

[2] He W, Williard N, Chen C, et al. State of charge estimation for electric vehicle batteries using unscented Kalman filtering[J]. Microelectronics Reliability, 2013, 53(6): 840-847



## 4 失效保护

---

在飞行过程中，多旋翼也会对关键部件设置失效保护。这里介绍几种关键部件的失效保护示例：

1. 遥控器失联失效保护
2. 传感器故障失效保护
3. 动力系统异常失效保护





## 4 失效保护

### □ 遥控器失联失效保护

在多旋翼飞行过程中（利用遥控器控制多旋翼时），若遥控器失联，则建议执行以下保护措施：

- 1) 若飞行器**已经锁定**（Disarmed），则不做任何事情；
- 2) 若飞行器**油门为0或已经着陆**，则立即锁定飞行器；
- 3) 若多旋翼**装有GPS模块**，且离起飞点（HOME POSITION）的直线距离**超过**设定阈值，则多旋翼立即返航；
- 4) 若多旋翼**未装有GPS模块**，或者离起飞点的直线距离**小于**设定阈值，则多旋翼直接着陆；

如果遥控器与机上信号接收器通信恢复，多旋翼应该怎么办？





## 4 失效保护

### □ 传感器故障失效保护

(1) 气压计失效保护。若多旋翼监测到气压计故障，则建议多旋翼保持油门不变，从定点模式降级为自稳定模式。

(2) 电子罗盘失效保护。若多旋翼监测到电子罗盘故障，则建议多旋翼根据用户配置，从定点模式降级为定高模式。

(3) GPS失效保护。若多旋翼监测到GPS存在问题，则建议多旋翼根据用户配置，从定点模式降级为定高模式。

(4) 惯导系统失效保护。若多旋翼监测到惯导系统失效，则建议多旋翼以逐渐减少拉力的方式实现紧急着陆。



## 4 失效保护

### □ 动力系统故障失效保护

(1) 若多旋翼监测到电机、电调和桨叶故障，则

- 1) 若飞行器已经锁定 (Disarmed)，则不做任何事情；
- 2) 若飞行器油门为0或已经着陆，则立即锁定飞行器；
- 3) 在其他情况下，多旋翼直接着陆。

若六旋翼监测到某一个动力单元失效严重，多旋翼可能失去悬停模式的可控性，具体可回过头参看第十讲多旋翼的稳定性和可控性。这时，建议多旋翼立即切换到降级控制策略，以放弃控制偏航的方式，实现多旋翼的紧急着陆或返航。如果存在可控性，一般可以采取控制重构，或者将损伤看作扰动，进行抗扰控制等。



## 4 失效保护

---

### □ 动力系统故障失效保护

(2) 在电池失效保护中，用户可以自主配置电池失效保护机制：

- 1) 可以设置电池最低电压阈值 “**Low Battery**”；
- 2) 可以设置电池最低电量阈值 “**Reserved MAH**”；
- 3) 可以设置应对措施为着陆或者返航。



## 5 安全决策实现

利用状态机实现多旋翼的安全决策。状态机是一个通过简单化假设而刻画复杂系统的数学模型。一般地，假定以下条件成立：

- (1) 被模型化的系统具有有限个状态；
- (2) 在一定状态下的行为应是同一的；
- (3) 系统在任何时间段内总停留在某一状态上；
- (4) 系统状态改变的条件是有限的；
- (5) 系统状态改变是系统对事件的反应；
- (6) 系统状态改变所用的时间近似为零。



## 5 安全决策实现

### □ 多旋翼状态和飞行模式定义

在这里，我们首先定义三种多旋翼状态。

(1) **断电状态 (POWER OFF STATE)**。该状态是指飞行器断开电源的状态。该状态下，用户可以对飞行器进行硬件拆卸、改装和替换。

(2) **待命状态 (STANDBY STATE)**。当飞行器连接上电源模块，则立即进入预飞行状态。在本状态下，飞行器起初未解锁，用户可以在该状态下手动尝试解锁飞行器，飞行器会进行安全检查，并根据检查结果跳入下一状态。

(3) **地面错误状态 (GROUND\_ERROR STATE)**。该模式表示飞行器发生了安全问题。在该模式下，蜂鸣器会出警报提醒用户系统发生错误。



# 5 安全决策实现

## □ 多旋翼状态和飞行模式定义

进一步，我们定义三种飞行模式

### (1) 人工手动飞行模式 (MANUAL FLIGHT MODE)

人工手动飞行模式可以让你手动控制多旋翼。该模式包含三个子模式，分别为**定点模式**(LOITER MODE)、**定高模式**(ALTITUDE HOLD MODE)和**自稳定模式**(STABILIZE MODE)。

### (2) 返航模式 (RETURN-TO-LAUNCH MODE)

在该模式下，多旋翼会从当前位置返回到飞机起飞位置，并在此处悬停。

### (3) 自动着陆模式 (AUTO-LANDING MODE)

在该模式下，多旋翼通过调整油门，并结合气压计测量高度，实现多旋翼自动着陆。



## 5 安全决策实现

---

### □ 事件定义

多旋翼事件定义是多旋翼状态和飞行模式的切换的根据，是多旋翼决策的重要基础。在这里，我们主要定义两种事件：**人工输入事件**和**飞行器自身事件**。

**人工输入事件**主要是指飞控手利用遥控器或者地面站发出的指令，并基于此改变多旋翼状态和飞行模式的输入事件。





# 5 安全决策实现

## □ 事件定义

这里主要定义两个人工输入事件：

1) PE1: 解锁和锁定指令

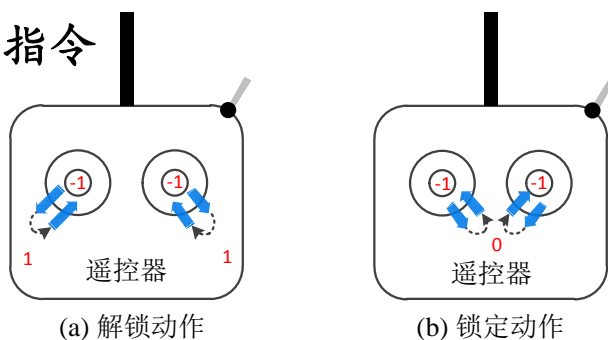


图14.8 解锁/锁定指令示意图

2) PE2: 人工操作指令 (可以在手动飞行、返航和自动着陆之间切换)

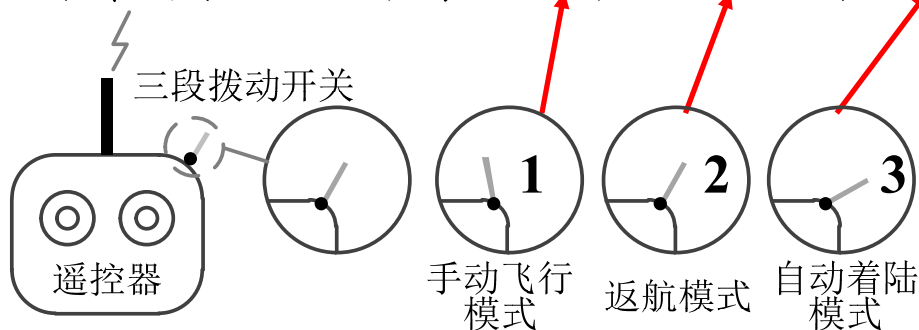


图14.9 人工操作指令示意图



# 5 安全决策实现

## □ 事件定义

**飞行器自身事件**：主要是指在飞行器在飞行过程中，由于飞行器自身原因触发的事件，该类事件与人工操作无关，大多取决于机上各部件的工作状态。

**ATE1**：惯导系统健康状态（1：健康；0：不健康）

**ATE2**：GPS健康状态（1：健康；0：不健康）

**ATE3**：气压计健康状态（1：健康；0：不健康）

**ATE4**：磁罗盘健康状态（1：健康；0：不健康）

**ATE5**：动力单元健康状态（1：健康；0：不健康）

**ATE6**：遥控器连接状态（1：正常；0：异常）

**ATE7**：电池电量状态（1：充足；0：不充足，但支持返航；-1：不充足，且不支持返航）



# 5 安全决策实现

## □ 事件定义

**飞行器自身事件**：主要是指在飞行器在飞行过程中，由于飞行器自身原因触发的事件，该类事件与人工操作无关，大多取决于机上各部件的工作状态。

**ATE8**：多旋翼高度与设定阈值的比较（1：多旋翼高度低于设定阈值；0：多旋翼高度不低于设定阈值）

**ATE9**：多旋翼油门指令与设定阈值在一定时间段内的比较（1：多旋翼油门指令小于设定阈值；0：其他情况）

**ATE10**：多旋翼到起飞点的距离与设定阈值的比较（1：多旋翼到起飞点的距离大于设定阈值；0：多旋翼到起飞点的距离不大于设定阈值）



# 5 安全决策实现

## □ 状态机构建

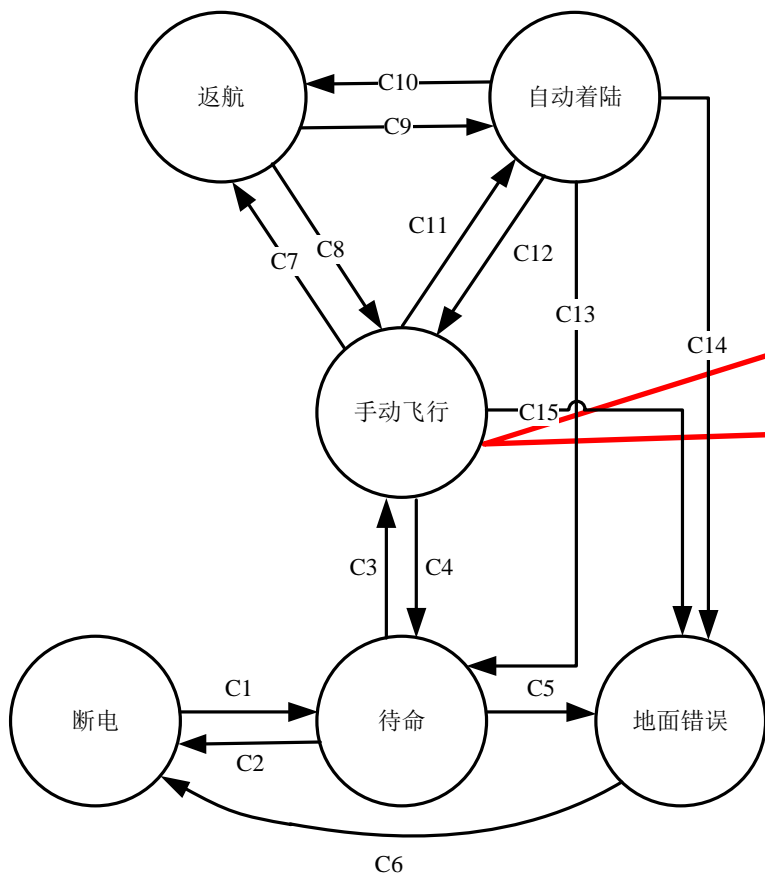


图14.10 状态机

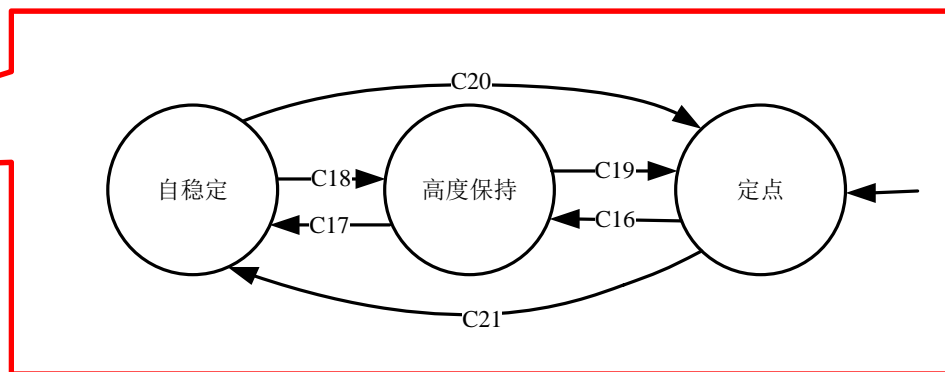


图14.11 手动飞行模态的内部状态机



## 5.3 状态机构建

这里，简单介绍几个跳转条件。

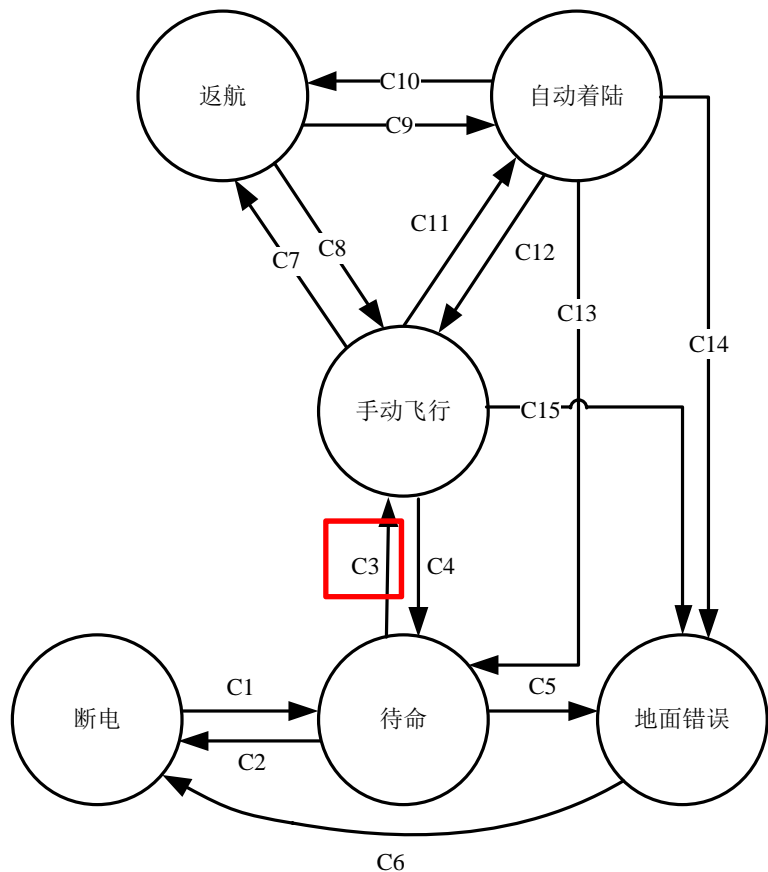


图14.12 状态机

C3:

$(MIE1=1) \& (MIE2=1) \& (ATE1=1) \& (ATE5=1) \& (ATE6=1) \& (ATE7=1)$

该条件描述多旋翼的成功解锁条件。若多旋翼同时满足以下条件：1) 飞控手发出解锁指令 ( $MIE1=1$ )；2) 多旋翼进行自检，且惯导系统和动力单元均健康

( $ATE1=1 \& ATE5=1$ )；3) 遥控器连接正常 ( $ATE6=1$ )；4) 电池电量充足 ( $ATE7=1$ )；5) 飞行模式开关处于手动飞行模式 ( $MIE2=1$ )。那么，多旋翼成功解锁，并从待命状态切换到手动飞行模式。



## 5.3 状态机构建

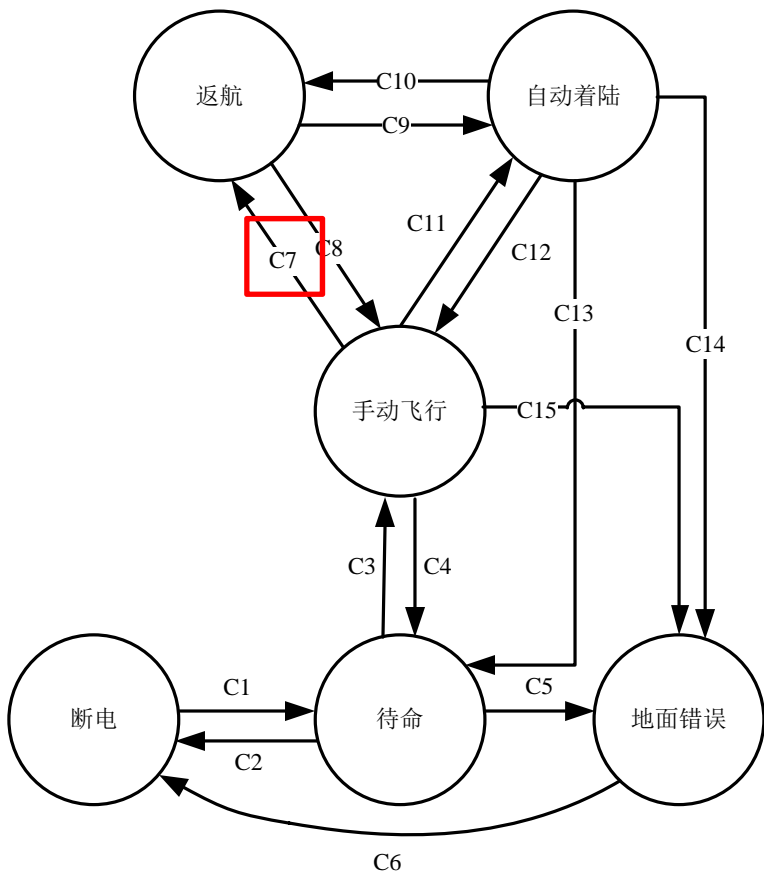


图14.12 状态机

C7:

$(ATE1=1 \& ATE2=1 \& ATE3=1 \& ATE4=1 \& ATE5=1 \& ATE10=1) \& [(MIE2=2 \& ATE7 \geq 0) | (ATE6=0 \& ATE7 \geq 0) | (ATE7=0)]$

该条件描述多旋翼从手动飞行模式切换到返航模式，当以下三种情形之一为真时，该条件发生：1) 飞控手利用遥控器手动将多旋翼切换到返航模式（ $MIE2=2$ ），且电池电量充足（ $ATE7 \geq 0$ ）；2) 遥控器连接异常（ $ATE6=0$ ），且电池电量充足（ $ATE7 \geq 0$ ）；3) 电池电量不足，但可以支持返航（ $ATE7=0$ ）。同时，该条件还需满足惯导系统、GPS、气压计、磁罗盘和动力单元均健康

$(ATE1=1 \& ATE2=1 \& ATE3=1 \& ATE4=1 \& ATE5=1)$ ，且多旋翼距起飞点距离大于设定阈值（ $ATE10=1$ ）。



## 5.3 状态机构建

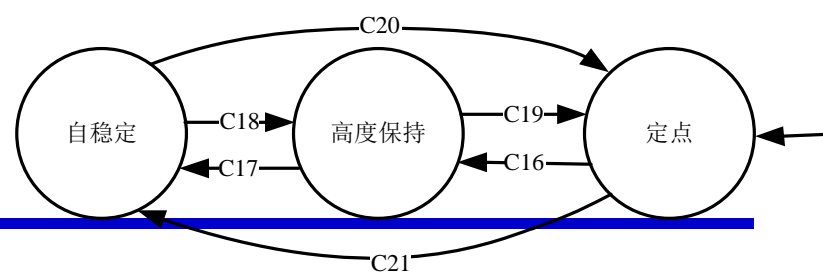


图14.13 手动飞行模态的内部状态机

**C16:**  $ATE2=0|ATE4=0$

该条件是指当GPS或磁罗盘不健康 ( $ATE2=0|ATE4=0$ ) 时，飞行模式从定点模式切换到定高模式。

**C17:**  $ATE3=0$

该条件是指当气压计不健康时 ( $ATE3=0$ )，飞行模式从定高模式切换到自稳模式。

**C18:**  $ATE3=1\&(ATE2=0|ATE4=0)$

该条件是指当气压计健康 ( $ATE3=1$ )，但GPS或磁罗盘不健康 ( $ATE2=0|ATE4=0$ ) 时，飞行模式从自稳模式切换到定高模式。

**C19:**  $ATE2=1\&ATE4=1$

该条件是指当GPS和磁罗盘均健康时 ( $ATE2=1\&ATE4=1$ )，飞行模式从定高模式切换到定点模式。

**C20:**  $ATE2=1\&ATE3=1\&ATE4=1$

该条件是指GPS、磁罗盘和气压计均健康时 ( $ATE2=1\&ATE3=1\&ATE4=1$ )，飞行模式从自稳模式切换到定点模式。

**C21:**  $ATE3=0$

该条件是指当气压计不健康时 ( $ATE3=0$ )，飞行模式从定点模式切换到自稳模式。





## 6. 本讲小结

---

1. 对于安全，这一部分的工作任重道远。对于多旋翼的控制精度，99%的精度到99.9%的精度意义可能微乎其微，但是安全的概率从99%的精度到99.9%将是一个质的飞跃。
2. 飞行前和飞行中两个阶段检测系统不健康的具体方法很多，可以是测量数据的直接判断，也可以是基于模型和数据的综合分析。
3. 检测到不健康的事件发生，则需要进行失效保护。
4. 影响多旋翼的安全事件需要进一步补充和完备。
5. 多旋翼决策状态机的设计多靠经验设计，如何用更科学地方法设计？



# 资源

---

(1) 可靠飞行控制研究组主页课程中心(全部课件下载)

<http://rfly.buaa.edu.cn/course>

(2) 关注可靠飞行控制研究组公众号 buaarfly(文章、资讯等)

(3) 多旋翼设计与控制交流QQ群:183613048

(4) 视频课程(MOOC)同步发布, 网易云课堂搜索 “多旋翼”

<http://study.163.com/course/introduction/1003715005.htm>

(5) 同名中文书本教材《多旋翼飞行器设计与控制》即将在电子工业出版社出版, 敬请期待

(6) 有疑问可联系课程总助教戴训华, 邮箱: [dai@buaa.edu.cn](mailto:dai@buaa.edu.cn)



# 致谢

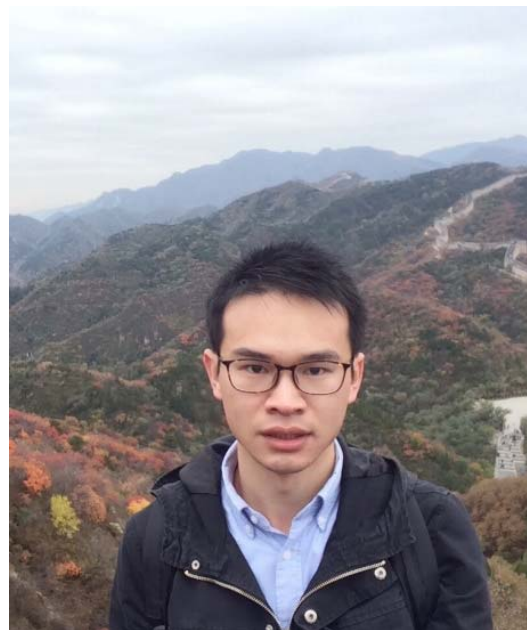
## 感谢控制组同学



赵峙尧



骆遥



戴训华

为本节课程准备作出的贡献。



---

# 谢谢！



---

# 多旋翼飞行器设计与控制

## 第十五讲 展望

全权 副教授

qq\_buaa@buaa.edu.cn

自动化科学与电气工程学院

北京航空航天大学



# 东方智慧



## 古代直升飞机



# 核心问题

---

多旋翼飞行器的该何去何从?





# 大纲

---

1. 新技术展望
2. 需求和技术创新方向
3. 风险分析
4. 机遇和挑战



# 1.新技术展望





# 1.新技术展望

## □ 动力技术

(1) 新型电池。来自加拿大蒙特利尔的EnergyOr技术有限公司报道采用燃料电池的四旋翼进行了3小时43分钟续航飞行。此外，石墨烯、铝空气电池、纳米点电池这三项电池技术有望成为未来电池世界的希望。人们对这些新的电池技术有着十分迫切的需求。它们将首先会被应用到手机和电动汽车，随后可配备于多旋翼。



采用燃料电池的EnergyOr四旋翼



EnergyOr燃料电池



# 1.新技术展望

## □ 动力技术

(2) 混合动力。2015年，美国初创公司Top Flight Technologies报道自己开发混合动力六旋翼。该六旋翼仅需要1加仑汽油，便可以飞行两个半小时，约160公里的距离，最高负重达约9公斤。另外，一家来自德国的公司Airstier推出了一款多旋翼。该多旋翼采用油电混合动力，有效载荷5公斤，可飞行1个小时。



Top Flight Technologies混合动力六旋翼



Airstier year!





# 1.新技术展望

## □ 动力技术

Skysapience视频



(3) 地面供电。系留多旋翼，采用地面供电，通过电缆将电能源源不断输送给多旋翼，比如：以色列公司Skysapience六旋翼。



Skysapience六旋翼

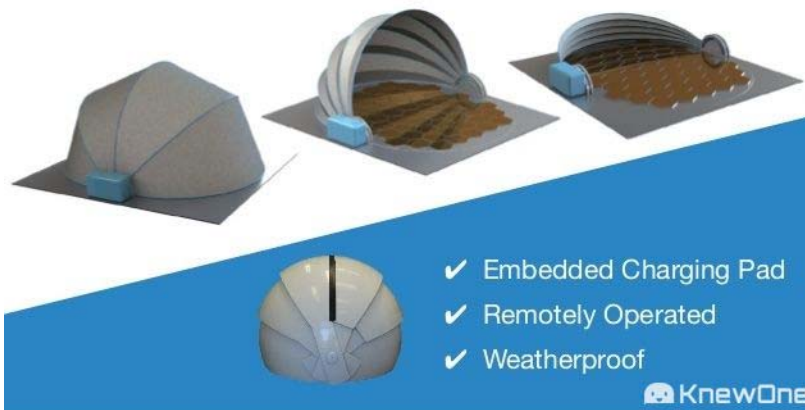


# 1.新技术展望

## □ 动力技术

(4) 无线充电。来自德国柏林的初创公司 SkySense 在无人机户外充电方面提供了一种解决方案。SkySense 研发出一块可以为无人机进行无线充电的平板。SkySense 的最大特点是可以进行远程控制，无人机的降落-充电-起飞全过程可以独立实现，不需要有人在现场进行干预和辅助。如果充电时间更快，那么无线充电技术将会极大地帮助多旋翼进行长途飞行。

Solution: Skysense Droneport



SkySense 无人机场 和 充电平板



# 1.新技术展望

## □ 导航技术

### (1) 定位技术

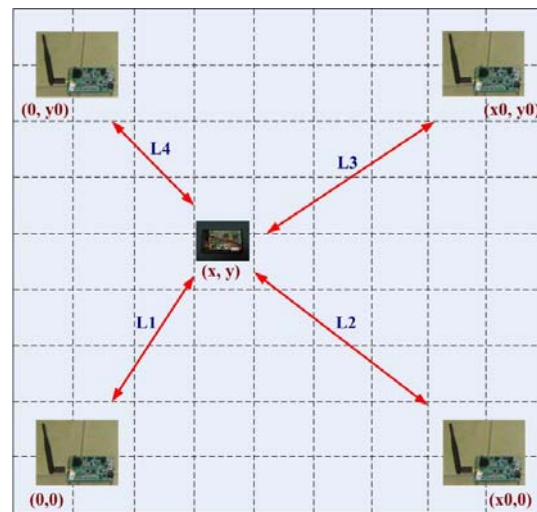
1) GPS载波相位定位。SwiftNavigation公司开发的Piksi; 由日本东京海洋大学开发的RTKLIB开源项目。2015年9月24日,在第四届中国卫星导航与位置服务年会暨中国卫星导航定位展上,具有星基增强的厘米级精度北斗接收机首次亮相。

2)多信息源定位。英国军方BAE最近公布了他们研发的名叫NAVSOP。该技术将利用包括TV、收音机、Wi-Fi等等信息定位,弥补GPS的不足,期望最小误差只有几米。

3) UWB (Ultra Wideband, 超宽带)无线定位[1]。此项技术是基于超宽带脉冲信号到达时间差的原理进行定位,可以提供10厘米精度的二维或三维定位信息。通过与惯性导航传感器融合,可以给出更高的精度且具有更强的鲁棒性[1]。



SwiftNavigation公司开发的Piksi



UWB 无线定位

[1]J D Hol, et al. Tightly coupled UWB/IMU pose estimation. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Ultra-Wideband. New York, USA: IEEE, 2009.





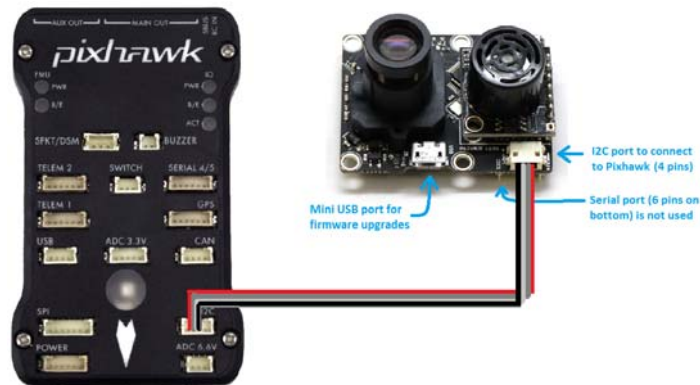
# 1.新技术展望

## □ 导航技术

(2) 测速技术。从安全的角度来说，多旋翼在飞行过程中，快速且准确的获取自身速度十分重要。这是因为速度反馈能有效提高多旋翼控制的稳定性（提高阻尼），从而达到更好的悬停和操控效果，提升了飞行器的可操控性。常用的测速方法大多基于光比较精确的测速方案是通过“视觉（光流）+超声波+惯导”的融合。AR. Drone是最早采用该项技术的多旋翼飞行器，极大提升了飞行器的可操控性，获得了巨大的成功。PX4自驾仪开源项目提供了开源的光流传感器PX4Flow。该传感器可以帮助多旋翼在无GPS情况下精确悬停。大疆公司推出的“悟”和“Phantom 3”同样采用了该项技术。



AR. Drone传感器



PX4Flow传感器



# 1.新技术展望

## □ 导航技术

### (3) 避障技术。

- 1) 深度相机避障技术。
- 2) 声呐系统避障技术。
- 3) “视觉+忆阻器”避障技术。
- 4) 双目视觉避障技术。
- 5) 小型电子扫描雷达。
- 6) 激光扫描测距雷达。
- 7) 四维雷达。



RealSense视频



RealSense传感器



Panoptes的eBumper4（声呐避障）



# 1.新技术展望

## □ 导航技术

### (3) 避障技术。

第一，深度相机避障技术。深度相机由常规相机、红外线激光投影仪和红外线相机组成。红外线投影仪对场景投影结构光，进而通过分析红外传感器接收的反光得到深度信息。微软在2010年11月推出了深度相机Kinect。然而它体积还是较大，并且两米之外才能更好的识别用户手势。在2015年国际消费类电子产品展览会上，英特尔把RealSense 技术也应用到了多旋翼身上，用于感知周围环境，进而供多旋翼进行自主避障。与Kinect相比，英特尔的RealSense相机更小更轻，只有4毫米厚，8克重。除此之外，还有声呐系统避障技术、“视觉+忆阻器”避障技术、双目视觉避障技术、小型电子扫描雷达、激光扫描测距雷达和四维雷达等相关技术。



# 1.新技术展望

## □ 导航技术

### (4) 跟踪技术

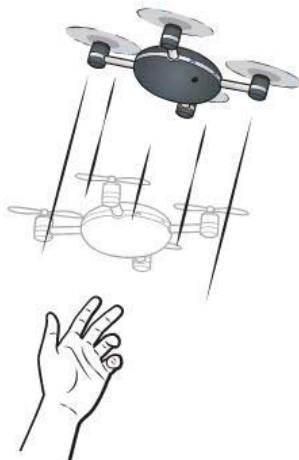
#### 1) GPS跟踪

#### 2) 视觉跟踪

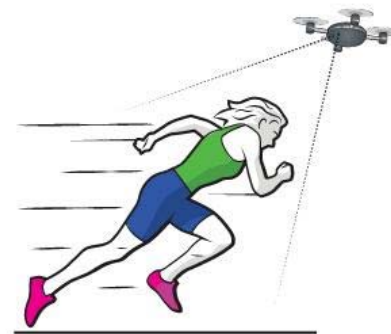
视觉跟踪 视频



Ready.



Throw.



Go!

Lily 四旋翼的GPS跟踪



大疆 四旋翼的视觉跟踪





# 1.新技术展望

## □ 导航技术

### (4) 跟踪技术

常见的跟踪方式为在被跟踪者身上放置GPS接收机，从而进行定位和跟踪。然而，对于非合作目标，比如罪犯，该方式是行不通的。

新的技术可以依赖视觉和雷达。在视觉跟踪方面，3D Robotics公司推出了具有“Follow Me”模式的“Tower Drone Control App”，该模式能够使飞行器跟随用户，并将用户保持在摄像头中心且跟踪用户运动。不仅如此，相机的角度也可以在无人机跟随过程中调整。OpenCV 开源软件也同样有很多跟踪算法供飞行器开发。

尽管视觉跟踪廉价，但是它容易受到复杂天气和光线的影响。对比来讲，雷达跟踪更为鲁棒。在2015年，雷达传感器开发商Oculii发布了RFS-M，并宣称其为第一个实时四维跟踪移动传感器平台。



# 1.新技术展望

## 交互技术

(1) 手势控制技术 (2) 脑机接口的技术。



手势控制臂带控制AR.Drone 视频



手势控制臂带控制AR.Drone



脑电波控制飞行视频



浙江大学CCNT实验室脑电波控制飞行器



# 1.新技术展望

## □ 交互技术

(1) 手势控制技术 (2) 脑机接口的技术。

在2014年国际消费类电子产品展览会上，有人演示了利用MYO手势控制臂带控制AR.Drone四旋翼。类似地，智能手机、手环、手表和戒指等内置惯性传感器，可以识别操作者的手势，同样也可以用于控制多旋翼。

另外，脑-机接口的技术是指在人脑与计算机等外部设备之间建立直接的连接通路。通过对于传感器获取的脑电信息的分析解读，用计算机芯片和程序将其转化为相应的动作，这就是用“意念”操控物体的基本原理。国内外学者都尝试该技术控制无人机。然而，从安全的角度来讲，这些多旋翼离商业应用仍然差得很远。





# 1.新技术展望

## □ 通讯技术

(1) 5G通讯技术

(2) Wifi通讯技术





# 1.新技术展望

## □ 通讯技术

通讯技术十分重要。该项技术有助于信息共享，可以进一步用于交通管理或多旋翼健康评估，在高速通讯技术的支持下，数据可以上传到云端。

### (1) 4G/5G通讯技术

在2015年11月，有报道称美国希望达成一个全球协议来重新分配无线电频段，以迎接移动设备“5G”时代的到来。这将引发世界范围内的飞行跟踪系统和民用无人机发展的新高潮。在未来的十年中，仅仅在美国就会因此出现800亿美元的商机。

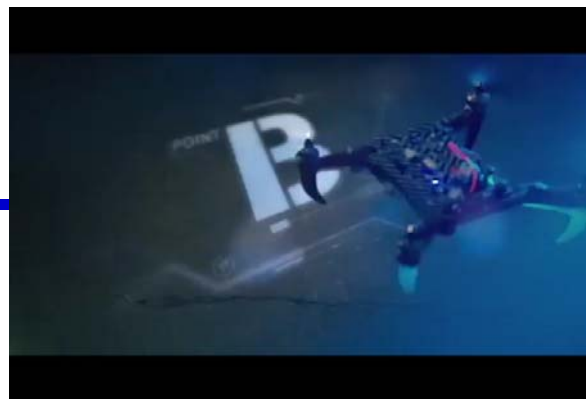
### (2) Wifi通讯技术

2013年，德国的卡尔斯鲁厄理工学院开发出了一项新的Wifi技术，利用更好的硬件配备240GHz无线电频率，实现了在0.6英里内用户的链接速度达到40Gbits/s (5GB/s)。这种技术可以通过无人机的视频发射器提供与地面设备的高速连接。



# 1.新技术展望

## □ 芯片技术



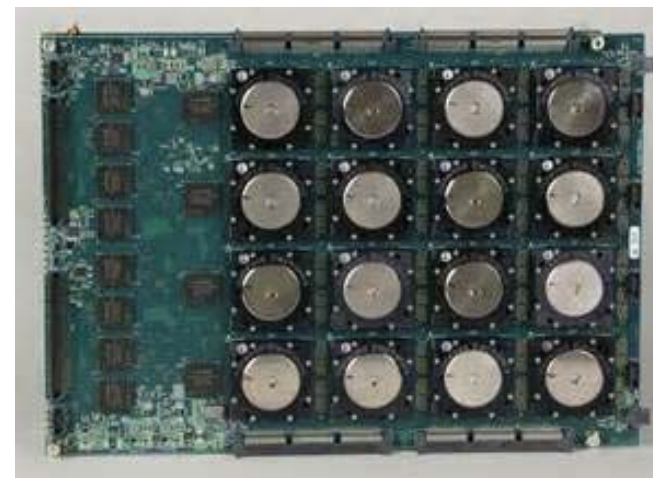
基于高通骁龙处理器的无人机自主导航飞行视频



高通骁龙芯片



英特尔爱迪生芯片



IBM类脑芯片



# 1.新技术展望

## □ 芯片技术

(1) 2014年CES上，高通和英特尔展示了功能更为丰富的多轴飞行器。例如，高通CES上展示的Snapdragon Cargo无人机是基于高通**Snapdragon芯片**开发出来的飞行控制器，它有无线通信、传感器集成和空间定位等功能。2015年9月，据美国科技新闻网站Engadget报道，高通已经为无人机市场推出了一个芯片解决方案，名为“骁龙飞行平台”。英特尔CEO Brian Krzanich也亲自在CES上演示了他们的无人机，采用了**四核的英特尔凌动 (Atom)** 处理器的PCI-express定制卡。此外，活跃在在机器人市场的欧洲处理器厂商XMOS也表示已经进入到无人机领域。

(2) 3DR发表声明与Intel英特尔共同合作开发**Edison芯片**，这是一种新型微型处理芯片。它只有一个硬币的大小，却具有个人电脑一样的处理能力。

(3) 目前，包括IBM在内的多家科技公司都在模拟大脑，开发**神经元芯片**。而一旦类似芯片被应用于无人机，自主反应、自动识别有望会变得轻而易举。

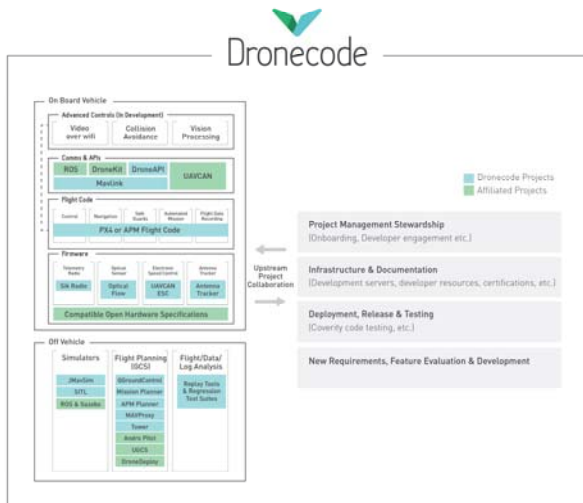




# 1.新技术展望

## □ 平台技术

- (1) “Dronecode”的无人机开源系统。
- (2) Ubuntu 15.04 操作系统。
- (3) Airware发布企业级无人机系统。





# 1.新技术展望

---

## □ 平台技术

2014年10月，著名开源基金会Linux推出了名为“Dronecode”的无人机开源系统合作项目，将3D Robotics、英特尔、高通、百度等科技巨头纳入项目组，旨在为无人机开发者提供所需要的资源、工具和技术支持，加快无人机和机器人领域的发展。

Ubuntu 15.04的物联网版本是Ubuntu目前最小且最安全的版本，非常地精简，适合发行家、科技专业人士与开发者使用，能够在无人机等领域中使用。

Airware公司发布了商业无人机操作系统，宣称该系统可以安全可靠地操纵无人机，符合政府和保险需求，建立面向工业的无人机软件系统。同时，Airware希望让消费者自主选择飞行器，并匹配相应的硬件和软件使无人机可以执行不同任务。

---



# 1.新技术展望

## □ 空管技术

(1) 2015年美国航天局无人机系统交通管理大会UTM于7月28-30日在加州NASA Ames研究中心举行。此次会议给大家一个讨论低空无人机系统交通管理的机会，憧憬低空无人飞行器交通管理的未来。亚马逊和谷歌在会上发表了白皮书，通过ADS-B和V2V通信，探索了管理空域和协调飞行器的策略



NASA空中交通概念图

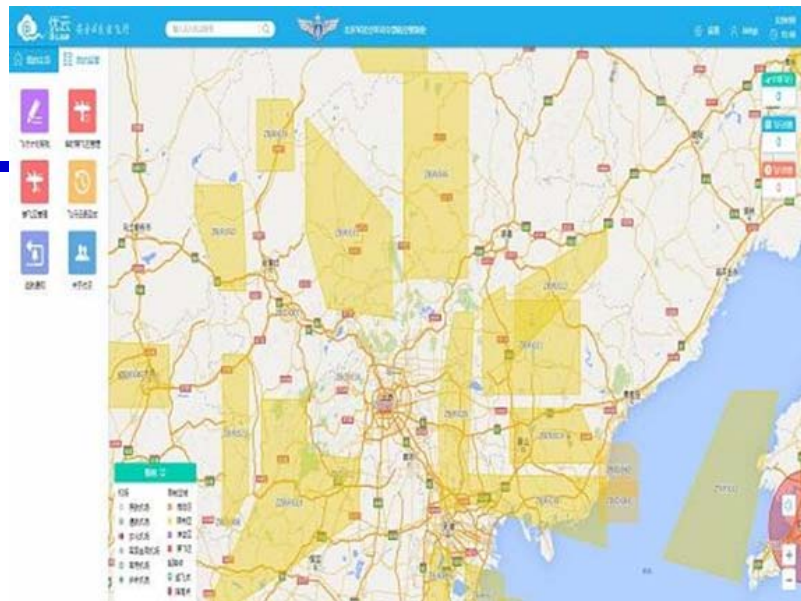




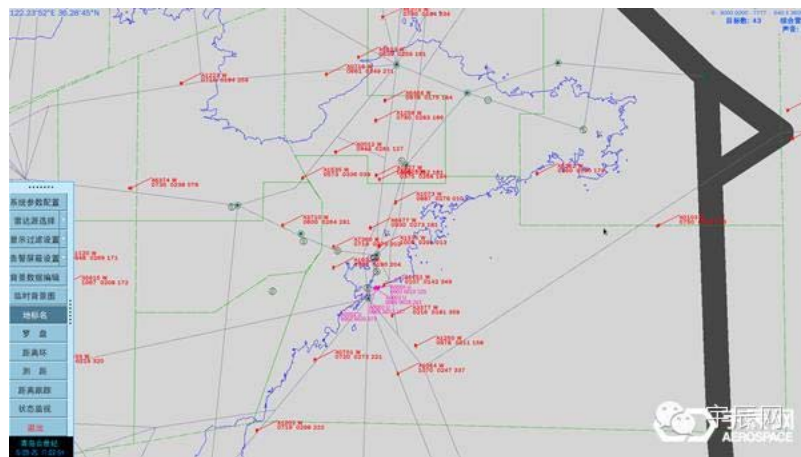
# 1.新技术展望

## □ 空管技术

2015年9月，在第三届AOPA国际飞行训练展会上，AOPA（中国）联合多家企业开发的针对小型无人机的“U Cloud”监管系统上线。除了U Cloud，国内还有“U Care”无人机管理系统等。它们的出现，可以帮助飞控手了解附近的无人机，有助于中国无人机飞行器的管理。



“U Cloud”无人机监管系统

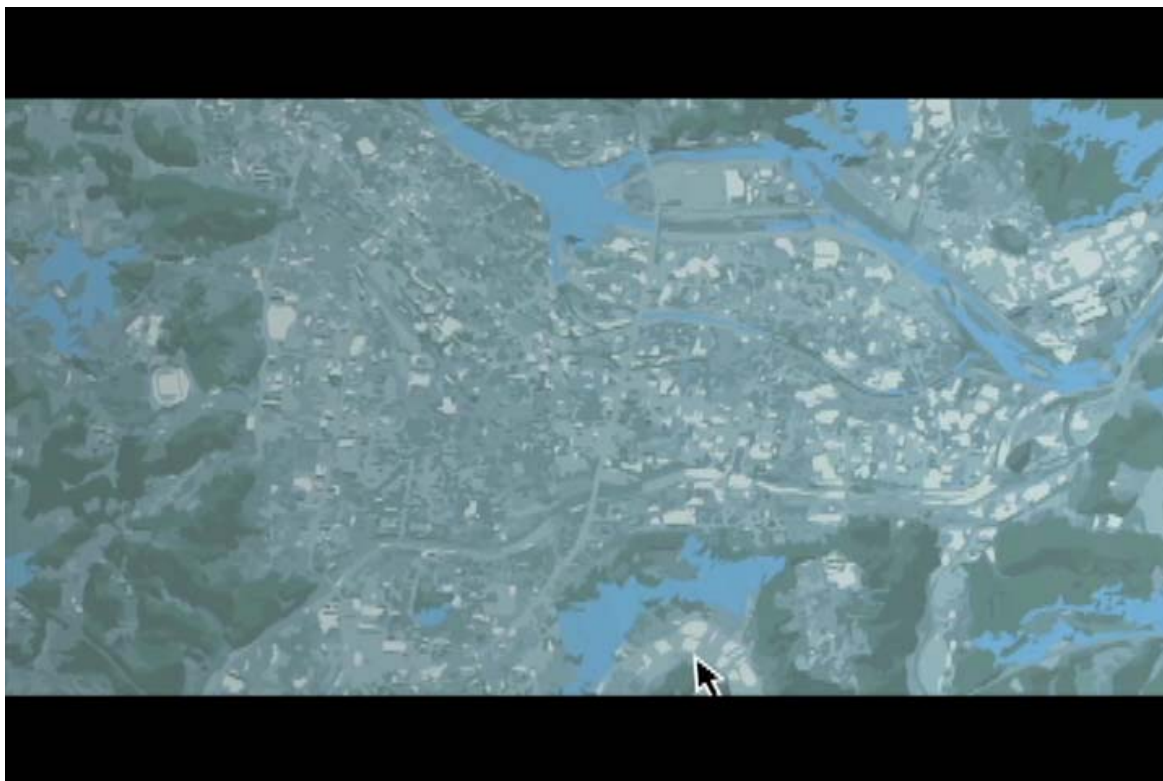


“U Care” 无人机监管系统



# 1.新技术展望

## □ 空管技术



无人机空管系统视频



# 1.新技术展望

---

## □ 总结

在多旋翼的潜在新技术发展进程中，各个技术是相互耦合依存的，比如：芯片、传感器和算法等等。这些技术将构成无人机或者多旋翼的生态环境。在这种情形下，无人机或者多旋翼的发展可能被其中某一项或两项技术的发展引领，这会存在各种可能性，很多是我们目前无法想象的。

同样，无人机或多旋翼的发展也会带动相关行业技术的发展，解决各种实际问题。因此，从多旋翼周边技术的发展来看，多旋翼还有较大的发展空间。



## 2.需求和技术创新方向

### □ 创新层面

从事多旋翼开发，无外乎从需求、方案、技术三个角度入手。从入手的角度，找到一个靠谱的新需求是**上策**；同样的需求，寻求好的方案是**中策**；同样的需求和同样的方案，只是通过技术改进，则是**下策**。需求到技术，遵从

**需求-〉问题（特色）-〉方案-〉技术**

路线。



## 2.需求和技术创新方向

### □ 创新层面

(1) 需求创新不仅需要对用户需求的把握，还要综合把握方案和技术实现的可行性。需求创新将会带来新的问题和特色，这样会立刻形成与其他产品的差异性。新的问题引发新的设计，从而形成新的产品。

(2) 从解决问题的角度，方案是十分重要的。方案创新需要广阔的知识面，包括软件、硬件和算法。在某些情况下，合适的方案会减小技术难度。比如：内置惯性测量单元的智能设备和摄像头都能实现手势识别。操控多旋翼方面，用智能终端还是视觉识别手势就是两种方案。前者开发难度不会太大且鲁棒较好，而工程上用于手势识别的视觉算法往往受限于其应用场景。当然最后应当指出的是，在选择方案时特定的应用环境也需要考虑其中。

(3) 技术创新需要本领域很强的专业知识，难度最大。难度在于需要对多旋翼某种性能有很大提升，让用户真正能感受到。比如：基于光流的测速是一项重要技术，然而，精度上没提高一个百分点都会带来成本的提高。





## 2.需求和技术创新方向

### □ 需求创新

- 多旋翼本身
- 多旋翼+照相机
- 多旋翼+农药
- 多旋翼+货物
- 多旋翼+测绘仪器
- 多旋翼+通信平台
- 多旋翼+武器
- 多旋翼+光源
- 多旋翼+声音
- 多旋翼+读卡器
- 多旋翼+医药
- 多旋翼+绳锁
- 多旋翼+喷火器

亮度 = 新颖程度

深度 = 被追赶时间

广度 = 单价\*数目

加速度 = 发展速度

看好领域

1) 玩具、教育、2) 可穿戴四旋翼、3) 农业无人机、4) 专业领域





## 2.需求和技术创新方向

### □ 技术方案创新

技术性能	机体和外形设计	动力系统设计	信号估计技术	控制器设计	安全决策技术
噪音最小	+++	++	+	+	-
震动最小	+++	++	+	+	-
悬停时间最长	+	+++	+	++	-
飞行距离最远	++	+++	+	+	-
抗风性最强	++	+++	+	++	-
飞行最为精确	-	-	+++	+++	-
自主性最高	-	-	+++	+	++
安全系数最高	-	++	+++	+	+++





## 2.需求和技术创新方向

### □ 技术方案创新-安全系数

■ 基于模型的系统工程；从“以文档为主、模型为辅”向“以模型主、文档为辅”的转变。

■ 健康评估

■ 失效保护

多旋翼属于小型的复杂系统，应该从系统工程的角度设计来保障飞行的安全。2007年，国际系统工程学会（INCOSE）在《系统工程2020年愿景》中，给出了“基于模型的系统工程”的定义：基于模型的系统工程是对系统工程活动中建模方法应用的正式认同，以使建模方法支持系统要求、设计、分析、验证和确认等活动，这些活动从概念性设计阶段开始，持续贯穿到设计开发以及后来的所有的寿命周期阶段。这个概念是与基于文档的系统工程相对应，拟在利用先进的系统建模语言代替自然语言，从而消除不确定性、歧义性和不可计算性等。进而，从“以文档为主、模型为辅”向“以模型主、文档为辅”的转变。这也是国际大型飞机公司，如波音、空客、洛克希德马丁，设计飞机的流程。至今，这是民用大飞机高安全系数的有效途径，只有这样才能够满足国际的适航标准。对于目前有一定实力的多旋翼公司和研究机构，建议采用基于模型的系统工程方法正向设计多旋翼。随着未来多旋翼或无人机的增多，安全系数标准或适航标准必然被公众关注。



## 2.需求和技术创新方向

### □ 技术方案创新-自主级别

表: 多旋翼自主等级示例表

等级	描述	决策	感知	控制	典型场景
2	与外部系统独立的导航(无GPS)	同等级1	在无外界系统帮助下,如GPS,自身传感和状态估计,提前感知故障作好安全保护。感知和态势认知由飞控手判断。	同等级1	无GPS,靠摄像机完成悬停,着陆和跟踪。提前报告故障如遥控器故障,传感器故障和动力系统故障等
1	自动飞行控制	预编程或上传飞行计划如航点、参考轨迹等。由地面站或飞控手进行分析、计划和决策。简单的故障保护	大部分传感和状态估计由多旋翼完成,感知和态势认知由飞控手判断。	由飞控系统计算控制指令	利用GPS,它可以悬停、跟踪目标。可以检测遥控器故障、GPS、电子罗盘故障或电池功率高低。可以切换模式如着陆模式
0	遥控	所有决策功能都是由飞控手完成的	基本的传感可能由多旋翼完成;所有数据由飞控手处理分析	由飞控手给出控制指令	可以由飞控手控制完成悬停、着陆和跟踪目标任务



## 2.需求和技术创新方向

### □ 技术方案创新-自主级别

表: 多旋翼自主等级示例表 (续)

等级	描述	决策	感知	控制	典型场景
4	实时避障/事件检测, 路径规划	危险规避, 实时路径规划与再规划, 事件驱动决策, 任务变化能鲁棒响应	感知障碍、危险、目标, 环境变化检测, 实时建图	精确、鲁棒三维轨迹跟踪	在无GPS情况下, 它可以利用摄像机自主远距离飞行且能返回原处。如果有一个电机故障, 四旋翼可以安全着陆。
3	故障事件自适应	健康诊断, 有限适应, 机载保守低水平决策, 执行预编程的任务	大多数健康和状态感知, 软硬件故障检测	鲁棒飞行控制器, 针对故障、任务和环境变化重新配置和自适应控制	可以评估自身健康状况, 分析故障产生原因。另外, 一个电机故障六旋翼可以返回原处



# 3. 风险分析

## □ 风险

(1) 人身安全

(2) 财产

(3) 公共舆论和道德风险



2015年4月24日坠落日本首相官邸



2015年1月29日多旋翼闯入白宫



2015年6月，3名韩国游客擅自遥控航拍飞行器在教堂顶部拍摄，并在慌乱之中操作失误，让飞行器撞到了教堂外侧，令教堂轻微受损。

2015年9月，在美国网球公开赛，一架黑色多旋翼盘旋看台上空并且坠毁，迫使比赛暂时中断



## 3.风险分析

### □ 建议

#### (1) 生产和设计厂商

- 1) 提高飞行器本身的可靠性。
- 2) 减少飞行器下降带来的冲击。
- 3) 为飞机编写ID号（飞机编号）。
- 4) 设置禁飞区。
- 5) 防欺骗和防入侵。

#### (2) 对于多旋翼运营厂商

- 1) 培养合格的多旋翼飞控手。
- 2) 保险
- 3) 限制飞行器飞行范围。





## 4.机遇和挑战

### □ 机遇



(1) 硬件产业链成熟、成本下降为民用或消费无人机爆发创造条件。地利。中国大陆，特别是珠三角地带，具有较完整的产业链。

(2) 老龄化社会。人力成本会越来越高。

(3) 无人机交通网的新建。

在这个大环境下，可以预见接下来几年中，法律法规将不断完善，多旋翼相关需求会不断被挖掘，平台技术越来越完善，越来越多的人开始接受和使用多旋翼。在这个过程中，将出现越来越多的机遇。



## 4.机遇和挑战

---

### □ 挑战

#### (1) 政策的挑战。

如何制定合理的政策既能保证民用多旋翼或无人机的发展，又能很好地防止多旋翼或无人机危害人们的安全正有待我们去解决。

#### (2) 技术的挑战。

至今，大多数多旋翼的可靠性无法得到保证。如何设计一个高可靠性的**小型多旋翼**也是技术方面的最大挑战。除了多旋翼自身的问题，与防碰撞相关的安全问题也是技术层面上的挑战。





# 资源

---

(1) 可靠飞行控制研究组主页课程中心(全部课件下载)

<http://rfly.buaa.edu.cn/course>

(2) 关注可靠飞行控制研究组公众号 buaarfly(文章、资讯等)

(3) 多旋翼设计与控制交流QQ群:183613048

(4) 视频课程(MOOC)同步发布, 网易云课堂搜索 “多旋翼”

<http://study.163.com/course/introduction/1003715005.htm>

(5) 同名中文书本教材《多旋翼飞行器设计与控制》即将在电子工业出版社出版, 敬请期待

(6) 有疑问可联系课程总助教戴训华, 邮箱: [dai@buaa.edu.cn](mailto:dai@buaa.edu.cn)

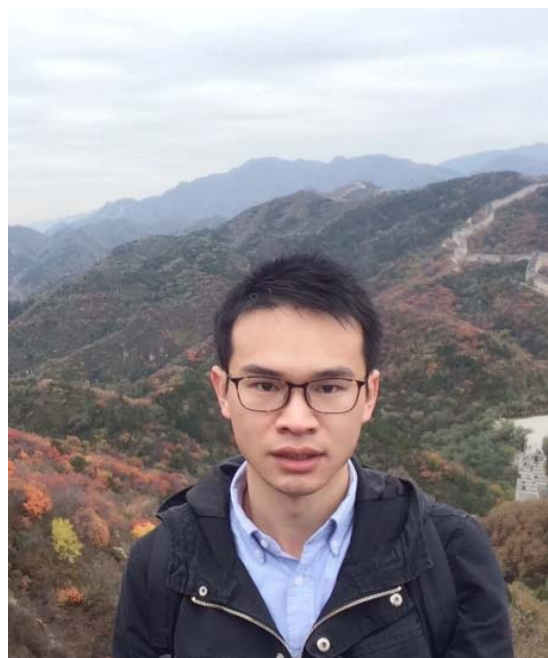


# 致谢

## 感谢控制组同学



杜百会



戴训华

为本节课程准备作出的贡献。



---

# 谢谢！