

输入受限下的可控度分析及其在 六旋翼飞行器设计中的应用

杨斌先, 杜光勋, 全权, 蔡开元

北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院, 北京 100191

E-mail: yangbinxian@asee.buaa.edu.cn; dgx@asee.buaa.edu.cn; qq_buaa@buaa.edu.cn; kycai@buaa.edu.cn;

摘要:系统的可控度在某种程度上反映了系统控制的难易程度。可控度的概念是对可控性概念的推广, 将可控性的二值概念拓展到一个连续的标量概念。可控度目前没有一个统一的定义, 学者们从不同的角度提出了不同的定义。本文对Viswanathan等人提出的可控度定义进行了改进。将原定义的控制输入约束由 $[-1, 1]$ 的对称区间拓展到 $[a, b]$ 非对称区间, 并给出了基于系统离散化的可控度计算方法。最后运用该理论对不同结构布局的六旋翼飞行器姿态可控度进行了比较, 并分析了当六旋翼飞行器有一个和两个旋翼停机时的姿态可控度。

关键词:可控度, 系统离散化, 六旋翼

The Degree of Controllability with Limited Input and an Application for Hexacopter Design

YANG Binxian, DU Guangxun, QUAN Quan, CAI Kai-Yuan

Department of Automatic Control, Beihang University, Beijing 100191

E-mail: yangbinxian@asee.buaa.edu.cn; dgx@asee.buaa.edu.cn; qq_buaa@buaa.edu.cn; kycai@buaa.edu.cn;

Abstract: The degree of controllability is in some sense a measure of how easy it is to control a system. The concept of the degree of controllability is the promotion of controllability. It develops from the binary concept controllability into a continuous scalar concept. The degree of controllability at present does not have a unified definition. Some researchers put forward different definitions from different aspects. In this paper, we improved the definition of the degree of controllability proposed by Viswanathan, extending the control input constraint from $[-1, 1]$ to an asymmetric interval $[a, b]$. And we gave the computation method of the degree of controllability based on system discretization. At last, we compared the degree of controllability of hexacopter's attitude with different structure and analyzed the degree of controllability of the hexacopter's attitude when it has one or two rotors stopped.

Key Words: Degree of controllability, System discretization, Hexacopter

1 引言

可控性的概念是现代控制理论中的一个基本概念, 它反映了系统状态能否被控制的性质。可控性是一个二值概念, 即只有可控和不可控两种情况。为了更好的反映系统状态的控制性能, 有人在可控性的基础上提出了可控度(Degree of Controllability)的概念。可控度的大小反映系统控制的难易程度。然而可控度并没有一个统一的定义, 可以有不同的度量方法。

在1962年Kalman的文章中可控度的概念最早被提及^[1]。其后, Hughes和Skelton提出了可控性模值的概念, 给出了系统可控性矩阵秩的详细信息^[2]。Hamdan和Nayfeh推广了Popov-Belevitch-Hautus检验来度量模态可控性^[3]。Tarokh引入了与频率特性相关的量来对可控性进行度量, 比如零点和留数^[4]。Müller和Weber提出了三种以线性系统可控性克莱姆矩阵的

标量值作为可控度的定义^[5], 这些定义与在有限时间内将系统从初始状态控制到原点所需要的最小能量相关。Roh和Park提出了模态可控度的新颖概念^[6]。模态可控度定义为将初始模态扰动调节到原点时一定数量的作动器所需的最小能量与所有作动器所需最小能量的比值。

Viswanathan等人在文献[7]中提出了以控制输入量的绝对值不大于一的约束下, 一定时间内不能被控制到原点的初始状态的最小模值作为可控度的度量值。由于可控度的准确值很难得到, 文献[7]和[8]中提出了其近似计算方法, 该方法能估计出可控度的上界值, 是一种相对乐观的估计方法。而在文献[9]中的基于系统离散化的计算方法估计出系统可控度的下界值, 是较为保守的估计方法。由于现代控制系统大多数为离散的数字控制系统, 所以基于系统离散化的计算方法更能反映真实系统的可控度, 而且该计算方法相比文献[7]和[8]中的计算方法更易于计算。

*此项工作得到: 国家自然科学基金资助项目(61104012)、973项目(2010CB327904)、教育部博士点基金资助项目(20111102120008)资助。

可控度的概念具有重要的实际应用意义。比如可用于结构控制和振动控制中作动器和传感器位置的优化^[10]；系统输入输出相关性的分析，系统的模型简化与系统解耦分析；作为系统抗干扰能力的一种度量^[11]。然而，由于在文献[7]的定义中控制输入的约束为 $[-1,1]$ 的对称区间内，而在实际的系统中大多数的控制输入的约束并不是关于原点对称的，所以限制了该定义在的应用范围。

本文将文献[7]中可控度定义的控制约束推广到了 $[a,b]$ 非对称的区间，并对文献[9]中计算方法进行了改进以适用于控制约束为非对称区间的情况。最后利用该改进的定义对六旋翼飞行器的姿态控制进行了可控度的分析。六旋翼飞行器作为一种可垂直起降的飞行器在近年来是小型无人飞行器研究领域的一个热点。目前六旋翼具有各种各样的布局形式。通过对不同布局形式的六旋翼飞行器姿态控制的可控度进行分析可以选出可控度相对较大的六旋翼布局形式，为六旋翼的设计做出指导。同时还对六旋翼飞行器在有旋翼停机时的可控度进行了分析，这可作为六旋翼飞行器容错容损控制的理论基础。

2 可控度定义

我们在文献[7]中可控度的定义的基础上做出了一定的改进以增大其适用范围，即将原定义中控制输入的约束由 $[-1,1]$ 的对称区间扩展到 $[a,b]$ 的非对称区间。

考虑如下线性系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1)$$

其中 $x(t) \in R^n$ 为系统状态， $u(t) \in [a,b]^m \in R^m$ 为控制输入。

定义1：恢复域：系统（1）在时间 T 的恢复域定义为：

$$\Omega = \{x(0) | \exists u(t) \in [a,b]^m, t \in [0,T], st x(T) = 0\} \quad (2)$$

定义2：可控度：系统（1）在时间 T 的可控度定义为：

$$\rho = \inf \|x(0)\| \quad \forall x(0) \notin \Omega \quad (3)$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示欧几里得范数。

系统的恢复域 Ω 表示在有限的时间 T 内在有界的控制约束下所有能够被控制到原点的初始状态的集合。而系统的可控度是反映恢复域大小的一个标量。由定义可知这里选择了从原点到恢复域边界的最短距离作为系统的可控度。可控度是对可控性定义的推广，将原来的二值概念推广到用连续的标量来度量系统控制的难易程度。当系统可控度为零时表示系统是不可控的。可控度越大表示系统越容易控制即在一定的时间内能将更大范围的初始状态控制到原点。

3 可控度计算方法

文献[9]中提出了针对控制输入约束为 $[-1,1]$ 的基于系统离散化的计算方法，但是当控制输入的约束为 $[a,b]$ 时该方法并不完全适用。我们在该方法的基础上做出了适当的改进，使其适用于控制输入约束为 $[a,b]$ 的情况。下面详细介绍可控度的具体计算方法。

3.1 系统恢复域的计算

考虑系统（1）的解

$$x(t) = e^{At}x(0) + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \quad (4)$$

将总的恢复时间 T 平均分为 N 等份，每份为 ΔT 并且在 ΔT 内控制输入为常值，则将（4）离散化后从第 k 步到第 $k+1$ 步可表示为：

$$x[(k+1)\Delta T] = e^{A\Delta T}x(k\Delta T) + e^{A\Delta T} \int_0^{\Delta T} e^{-A\tau} Bu(k\Delta T) d\tau \quad (5)$$

进一步简化为：

$$x_{k+1} = e^{A\Delta T}x_k + \int_0^{\Delta T} e^{A\lambda} Bu_k d\lambda \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x[(k+1)\Delta T] \\ u_k &= u(k\Delta T) \\ \lambda &= \Delta T - \tau \end{aligned} \quad (7)$$

定义

$$G(\Delta T) = e^{A\Delta T} \quad (8)$$

$$H(\Delta T) = \int_0^{\Delta T} e^{A\lambda} Bd\lambda \quad (9)$$

则等式（6）可记为

$$x_{k+1} = Gx_k + Hu_k \quad (10)$$

将等式（10）进行迭代可以得到系统最终状态和系统初始状态 x_0 以及离散控制序列 u_i 之间的关系为

$$x_N = G^N x_0 + \sum_{i=0}^{N-1} G^{N-1-i} Hu_i \quad (11)$$

由于 $x_N = x(T) = 0$ ，代入等式（11）得

$$\begin{bmatrix} G^{N-1}H & G^{N-2}H & \cdots & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = -G^N x_0 \quad (12)$$

取

$$F = \begin{bmatrix} G^{N-1}H & G^{N-2}H & \cdots & H \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$U = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix} \in R^{mN} \quad (14)$$

则

$$x_0 = -G^{-N}FU \quad (15)$$

其中 $G^{-N} = (G^N)^{-1}$ 。等式(15)可以看作是从 $m \times N$ 维的控制空间到 n 维状态空间的线性映射。 m 为每一步控制输入 u_k 的维数。 $m \times N$ 维的控制空间中每个点 U 表示整个控制过程中的控制输入, 而不像在连续系统中表示某个瞬时的控制输入。考虑到控制输入的约束, 系统的控制输入为控制空间中的一个 $m \times N$ 维的超立方体, 离散后的系统的恢复域即为该超立方体经过线性映射 $-G^{-N}F$ 产生的像。通常为了不造成恢复域在维度上的缺失, 一般要求取 $m \times N \geq n$ 。

该恢复域具有几个性质^[9]:

- 1) 该离散系统的恢复域是一个凸集。
- 2) 该恢复域是中心对称的。
- 3) 它的边界由一系列超平面围成。
- 4) 组成恢复域的每一个超平面是 $m \times N$ 维的控制超立方体中 $n-1$ 维的边界段的像。

然而, 并不是每个控制超立方体中 $n-1$ 维的边界都映射成恢复域中的边界。如图1所示: 其中 $N=3, m=1, n=2$ 。其中恢复域的六条边界(实线)由控制立方体中的六条边映射而来, 而控制立方体中的其余六条边则映射到恢复域的内部(虚线)。

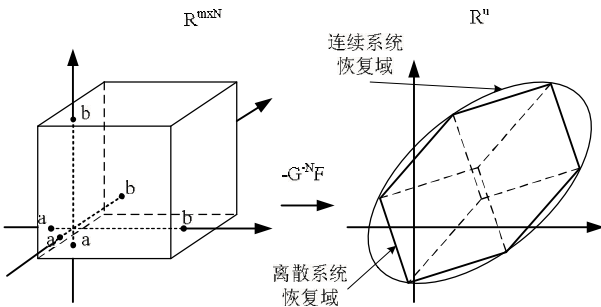


图1: 控制空间到状态空间的映射

3.2 系统可控度的计算

从原点到离散系统的恢复域的超平面边界的垂直距离中的最小值为实际连续系统可控度相对保守的近似。为了计算可控度, 首先要确定恢复域的边界。而每个恢复域边界都是由控制超立方体中 $n-1$ 维的边界映射而来, 但是并不是控制超立方体中每个 $n-1$ 维边界都映射成恢复域中的边界。实际上控制超立方体中每一组平行的 $n-1$ 维边界中只有两个映射成恢复域中的边界, 其余的映射到恢复域内部并与该两个边界平行。如图1中有三组平行的一维边界, 每组中的两条映射为恢复域中的一组平行边界, 其余则映射成恢复域内部与边界平行的线。要计算可控度首先必须确定恢复域的边界。考虑一组由超立方体中 $n-1$ 维的边界映射而来平行的超平面, 恢复域边界是这组超平面中到恢复域中心点距离最远的超平面。所以首先需要计算恢复域中心点到这些超平面的距离, 找出到中心点距离最大的超平面即为边界。在确定边界后即

可计算出恢复域中原点 to 边界的距离, 这些距离中的最小值即为系统的可控度。

3.2.1 恢复域中心点到边界的距离计算

将等式(15)记为

$$x_0 = KU \quad (16)$$

其中 $K = -G^{-N}F$, U 为整个控制过程中控制输入序列。任意选取 U 中的 $n-1$ 个元素组成 U_1 , 其余的元素组成 U_2 。对应的将 K 中在矩阵乘法中与 U_1 对应的元素组成 K_1 , K 中其余的元素组成 K_2 。则控制超立方体中的一个 $n-1$ 维边界可由 U_2 中的元素取边界值 a 或 b , 而 U_1 中的元素在 a 和 b 之间变化时即形成。 U_2 取不同的值则产生不同的 $n-1$ 维边界, 并且这些边界平行。当 U_1 取 U 中的不同元素时则产生不同组平行的 $n-1$ 维边界。

下面考虑其中一组平行的 $n-1$ 维边界。将 U 分块记为 $U = [U_1^T \ U_2^T]^T$, 其中 $U_1 \in R^{n-1}$, $U_2 \in R^{m \times N - (n-1)}$, 即 U_1 取 U 中同前 $n-1$ 个元素的一种特殊情形。同时将 K 对应的分块, 则等式(16)变为

$$x_0 = [K_1 \ K_2] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$x_0 = K_1 U_1 + K_2 U_2 \quad (18)$$

由于 K_1 最大的秩为 $n-1$, 所以必然存在一个非零的 n 维向量 η 使得 $\eta^T K_1 = 0$ 。等式(18)两边同时乘以 η^T 得

$$\eta^T x_0 = \eta^T K_2 U_2 \quad (19)$$

由于 U_2 中的元素取 a 或 b , 等式(19)即为这组 $n-1$ 维边界映射到状态空间中的超平面的方程, 不同的 U_2 对应不同的超平面, η 即是这些超平面的法向量, 令 $\xi = \eta / (\eta^T \eta)^{1/2}$, 则 ξ 是这些超平面的单位法向量。

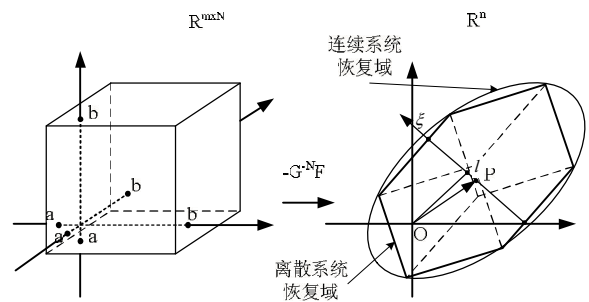


图2: 不对称控制约束控制空间到状态空间的映射

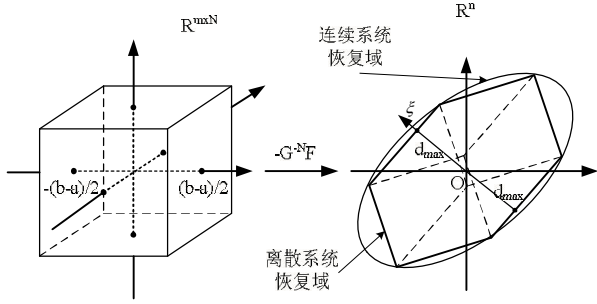


图3: 平移后控制空间到状态空间的映射

在这组超平面中只有两个是恢复域的边界，其余在恢复域的内部。为了确定这组超平面中的边界，先找出恢复域的中心 P （如图2）。由线性映射的性质可知，恢复域的中心为控制超立方体中心点 C 的像。则 P 点坐标为：

$$x_p = KU_c \quad U_c = \begin{bmatrix} \frac{a+b}{2} \\ 2 \\ \vdots \\ \frac{a+b}{2} \end{bmatrix} \quad (20)$$

到中心点距离最远的超平面即为边界。为了求得中心点到边界的距离，将控制超立方体的中心平移到原点，即将 U 中元素的取值范围变为对称的区间 $[-(b-a)/2, (b-a)/2]$ 。这样得到的恢复域即是原恢复域进行平移使其中心 P 平移到了原点（如图3）。所以图2中 P 点到边界的距离即为图3中原点 O 到边界的距离。

下面计算平移后（图3）恢复域中原点到边界的距离。平移后等式（19）同样成立，只是 U_2 中的元素取值为 $\pm(b-a)/2$ 。原点到这些超平面的垂直距离由下式给出：

$$d = |\eta^T K_2 U_2| / (\eta^T \eta)^{1/2} \quad (21)$$

因为 $\xi^T = \eta^T / (\eta^T \eta)^{1/2}$ ，则原点到这些超平面的距离为：

$$d = |\xi^T K_2 U_2| \quad (22)$$

取不同的 U_2 即得到原点到不同超平面的距离。而原点到边界的距离为这些距离中的最大值。若定义向量的符号向量 $sign(\alpha)$ 为当 α 中元素为正则对应元素为1， α 中元素为负则对应元素为-1， α 中元素为零则对应元素为零。则原点到边界的距离为

$$d_{\max} = (sign(\xi^T K_2))^T \xi^T K_2 \frac{b-a}{2} \quad (23)$$

又由于 $\xi^T K_1 = 0$ ，取 $z = \xi^T K$ ，则等式（23）可变为

$$d_{\max} = (sign(z))^T z \frac{b-a}{2} \quad (24)$$

3.2.2 恢复域原点到边界距离的计算

可控度定义中需要计算原点到恢复域边界的距离。对于平移前（图2）原点到边界的距离的计算，由于上面已得到恢复域中心 P 到边界的距离，而 ξ 为边界的法向量，从而可得向量 \overline{OP} 在 ξ 上的投影长度为

$$l = |\xi^T x_p| \quad (25)$$

从而可得原点到两个边界的距离为

$$d_i = d_{\max} \pm l \quad (26)$$

由于在计算可控度时需要计算原点到所有边界的最小距离，所有这里只需取其中较小的一个，即

$$d_i = d_{\max} - l \quad (27)$$

这样就得到了原点到一组边界的距离中的较小值。对于 U_1 取 U 中不同的 $n-1$ 个元素时，即不同组的边界时计算方法相同。由此即可计算出原点到恢复域所有边界的距离。在这些距离中选出最小值即为系统的可控度。

3.2.3 可控度的计算步骤总结

综上所述，可控度的计算可以总结为以下几个步骤：

（1）确定系统离散化时的每步时间间隔 ΔT 和步数 N ，由系统的状态方程根据公式(8)和(9)计算出 G 和 F ，又由 $K = -G^{-N}F$ 计算出矩阵 K 。

（2）在 K 的 $m \times N$ 列中找出所有可能的 $n-1$ 列向量的组合 K_1 。

（3）由 $\xi^T K_1 = 0$ 计算出每一个 K_1 对应的 ξ 。取 $z = \xi^T K$ ，由公式(24)计算出恢复域中心点到所有超平面边界的距离 d_{\max} 。

（4）对每一个 ξ 和 d_{\max} ，由 $l = |\xi^T x_p|$ 计算出一个对应的 l ，其中 x_p 由公式(20)可得。对应计算出原点到一组平行边界的距离中较小值 $d_i = d_{\max} - l$ 。对所有的 ξ 进行计算即可得到原点到所有超平面边界的距离。

（5）在所有 d_i 中取最小值即为系统的可控度。

4 六旋翼姿态控制可控度分析

六旋翼的姿态控制状态方程可近似如下：

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = J_f^{-1} \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix}$$

其中 $(\phi, \theta, \psi)^T$ 表示六旋翼的滚转、俯仰、偏航角， $(p, q, r)^T$ 为六旋翼绕机体轴旋转的角速度， $(L, M, N)^T$ 为绕机体轴的转动力矩。 J_f 为六旋翼的惯性矩阵。而 L 、 M 和 N 可表示如下

$$L = db_l f \quad M = db_m f \quad N = k_u b_n f \quad (29)$$

其中 d 表示旋翼到质心的距离， k_u 为一个与空气密度、旋翼的尺寸、形状、扭转角以及一些其他因素有关的参数，在此假设为常值 0.1。

$f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^T$ 表示旋翼产生的升力。 b_l 、 b_m 和 b_n 为与旋翼和机体坐标系相对位置有关的力到力矩的映射系数，不同的六旋翼布局形式其取值不同。如图4中的旋翼布局形式，在此称其为常规布局形式，则其取值为：

$$\begin{aligned} b_l &= \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ b_m &= \left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ b_n &= (-1, 1, -1, 1, -1, 1) \end{aligned} \quad (30)$$



图4: 六旋翼

对图4中的六旋翼进行测量，旋翼到质心的距离 $d = 0.28m$ ，惯性矩阵取为 $J_f = \text{diag}\{J_x, J_y, J_z\} = \text{diag}\{0.0411, 0.0478, 0.0599\}$ ，其单位为 $kg \cdot m^2$ 。控制输入的约束：每个旋翼产生的升力约束 $0 \leq f_i \leq 6N$ 。

六旋翼具有其它各种不同的结构布局，如图5所示的常规型、H型、Y型以及“四加二”型布局。其中“四加二”型布局为在四旋翼上方加一个共轴双旋翼。其中旋翼的不同颜色代表了其旋转方向不同。

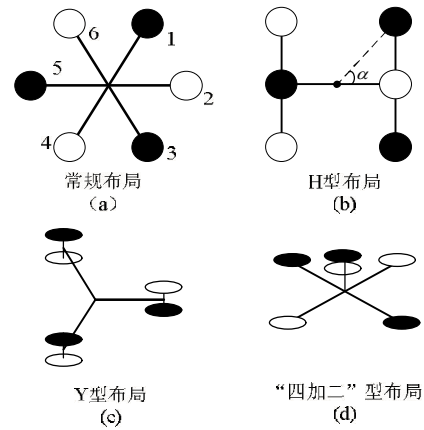


图5: 六旋翼不同的结构布局

通过对每种结构布局计算其姿态控制的可控度可以选择出相对最优的结构布局。为了具有可比性，让每一种布局的六旋翼尺寸一致，即其外接圆半径相同，质量、转动惯量以及采用的电机与图4中的六旋翼相同。对于H型布局，如图5(b)中所示，角度 α 取不同的值，其姿态可控度不同，在此我们分别取 α 为 60、45和30度时进行计算。对于Y型和“四加二”型布局中共轴的两个旋翼，由于相互之间的干扰其产生的力会有所减小。参考文献[12]的研究结果，在此取共轴旋翼产生的力为原单旋翼的85%，计算时可在相应的系数 b_l, b_m, b_n 上乘以0.85来修正。在计算系统可控度时取每份时间间隔 $\Delta T = 0.2$ ，份数 $N = 4$ 。在Matlab上编程进行计算的结果如表1。

由表1的结果可知常规布局的六旋翼在姿态控制方面相对较优，在相同的时间 T 内它能将距离原点更远的初始状态控制到原点。

表1. 六旋翼不同布局的姿态可控度

构型	H型		
	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 30^\circ$
可控度 ρ	2.5744	2.7089	2.7586
构型	常规型	Y型	“四加二”型
可控度 ρ	3.7363	3.4833	2.6591

对于图4中常规布局的六旋翼在一个旋翼停机时，可计算得到 $\rho = 0$ ，即当六旋翼有一个旋翼停机时，它的姿态是不可控的。但是不考虑偏航通道时，即在计算可控度是只考虑 $(\phi, \theta, p, q)^T$ 这四个状态时，可得到有一个旋翼停机时其可控度为 $\rho = 5.6315$ ，即在时间 T 内，在不考虑偏航通道时，可将由状态量 (ϕ, θ, p, q) 组成的空间中与原点距离小于等于5.6315的初始状态控制到原点。由此可知当常规布局的六旋翼有一个旋翼停机时其俯仰和滚转通道依然是可控的，即当六旋翼有一个旋翼停机时放弃偏航通道可实现六旋翼的安全着陆。同理对于常规布局的六旋翼有两个旋翼停机时放弃偏航通道时的可控度计算结果如表2，表2中的编号表示所停旋翼的编号，其编号顺

序如图5(a)所示。如表中第3行第2列中(灰底)0表示停1号和2号旋翼时六旋翼放弃偏航通道的可控度为0。

由表2可知当六旋翼所停的两个旋翼不相邻时，放弃偏航通道六旋翼的俯仰和滚转通道依然可控。当停机的两个旋翼相邻时放弃偏航通道六旋翼的俯仰和滚转通道不可控。

表2. 六旋翼有两个旋翼停机放弃偏航通道后的可控度

编号	1	2	3	4	5	6
1	--					
2	0	--				
3	4.5052	0	--			
4	4.5052	4.5052	0	--		
5	4.5052	4.5052	5.0660	0	--	
6	0	5.0660	4.5052	4.5052	0	--

5 结论

本文对Viswanathan等人提出的可控度定义进行了推广，将控制输入约束的范围从[-1,1]的对称区间拓展到[a,b]的非对称区间。并给出了基于系统离散化的可控度计算方法。最后运用该可控度的概念对六旋翼姿态控制可控度进行了分析讨论。通过对不同结构布局的六旋翼姿态控制可控度进行比较选出了相对较优的结构布局。同时分析了六旋翼有一个和两个旋翼停机时的姿态可控度，为六旋翼的容错容损控制提供了理论基础。在本文中只对六旋翼姿态控制的可控度进行了讨论，在下一步工作中将对六旋翼可控度进行更为全面的讨论，将对姿态控制与位置控制的可控度进行综合研究。

参考文献

- [1] R. E. Kalman, Y.-C. Ho, K. S. Narendra, Controllability of Linear Dynamical Systems. *Contributions to Differential Equations*, 1962, 1(2): 189-213
- [2] P. C. Hughes, R. E. Skelton, Controllability and Observability of Linear Dynamical Systems. *Journal of Applied Mechanics*, 1980, 47(2): 21-39.
- [3] A. M. A. Hadman, A. H. Nayfeh, Measures of Modal Controllability and Observability for First- and Second-Order Linear Systems. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1989, 12(3): 421-428.
- [4] M. Tarokh, Measures for Controllability, Observability and Fixed Modes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, 37(8): 1268-1273.
- [5] P. C. Müller, H. I. Weber, Analysis and Optimization of Certain Qualities of Controllability and Observability for Linear Dynamical System. *Automatic*, 1972, 8(3): 237-246.
- [6] H. Roh, Y. Park, Actuator and Exciter Placement For Flexible Structures. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1997, 20(5): 850-856.
- [7] C. N. Viswanathan, R. W. Longman, P. W. Likins, A Degree of Controllability Definition : Fundamental Concepts and Application to Modal Systems. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1984, 7(2): 222-230.
- [8] C. N. Viswanathan, R. W. Longman, The Determination of the Degree of Controllability for Dynamic Systems with Repeated Eigenvalues. *Proceedings of the NCKU/AAS Symposium on Engineering Science and Mechanics*, 1981.
- [9] G. Klein, Jr. R. E. Lindberg, R. W. Longman, Computation of a Degree of Controllability via System Discretization. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1982, 5(6): 583-589.
- [10] R. W. Longman, K. T. Alfrined, Actuator Placemant from Degree of Controllability Criteria for Regular Slewing of Flexible Spacecraft. *Acta Astronautica*, 1981, 8(7): 703-718.
- [11] O. Kang, Y. Park, Y. S. Park, M. Suh, New Measure Representing Degree of Controllability for Disturbance Rejection. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2009, 32(5): 1658-1661.
- [12] 邓彦敏, 陶然, 胡继忠, 共轴式直升机上下旋翼之间气动干扰的风洞实验. *航空学报*, 2003, 24(1): 10-14.