

输入受限系统的可控度 及其在飞行控制中的应用*

杜光勋 全权

(北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院, 北京 100191)

摘要 可控性是现代控制理论中最重要的概念之一, 但是可控性只能给出系统可控或不可控的结论, 而不能给出系统可控的程度. 要回答这个问题, 需要对可控性进行定量化描述. 文章针对可控性的定量化指标的研究进行了调研和综述. 在调研的基础上, 将可控度主要分为三类: 基于可控性矩阵的可控度, 模态可控度, 状态范数可控度. 另外, 文章重点讨论了输入受限系统的可控度问题以及可行的研究. 最后, 分析研究了可控度在飞行控制中飞行器执行器配置, 容错控制分析, 航路规划以及飞行安全监控中的应用.

关键词 可控性, 可控度, 飞行控制.

MR(2000) 主题分类号 47N70, 58E25

DEGREE OF CONTROLLABILITY AND ITS APPLICATION IN AIRCRAFT FLIGHT CONTROL

DU Guangxun QUAN Quan

(School of Automation Science and Electrical Engineering, Beihang University, Beijing 100191)

Abstract In this paper, the degree of controllability (DOC), an important concept in control theory, is investigated. Traditional theories are often related to whether a system is controllable, whereas the DOC can show how controllable a system is. Based on the survey on existing literature, the DOC is classified into three kinds: The Gramian-matrix-based DOC, the mode-based DOC, and the state-norm-based DOC. Furthermore, the DOC subject to control constrains is investigated, based on which the future possible work is also proposed. Finally, the idea that apply the DOC

* 国家自然科学基金 (61473012), 北京高等学校青年英才计划 (YETP1071) 资助课题.

通讯作者: 杜光勋, Email: dgx@buaa.edu.cn.

收稿日期: 2014-07-01, 收到修改稿日期: 2014-10-09.

to aircraft design, fault tolerant control, path planning and flight safety evaluation is given.

Keywords Controllability, degree of controllability, flight control.

1 引言

可控性^[1]的概念由 Kalman 首次提出, 并且通过验证可控性矩阵是否满秩来验证系统可控性. 可控性是现代控制理论中最重要的概念之一, 并对设计控制系统以及深入分析物理系统的性质具有非常重要的意义. 可控性是个二值概念, 一个系统要么可控要么不可控. 设计者在设计系统时, 可能会遇到这样的问题: 一个系统不可控, 将其中一个执行器的位置改变 $\varepsilon > 0$ 后变为可控. 显然, 对于一个很小的 ε 系统即使在理论上可控, 但从某种意义上说不是“很可控”, 即可控的程度不高. 在实际中, 设计者通常会需要知道系统可控的程度, 从而根据可控的程度大小去选择合适的控制输入以及配置执行器位置. 一个可控程度高的系统, 从某种意义上说更容易通过控制达到期望的性能. 要描述系统可控的程度, 就需要一个量化的可控性测量指标^[2], 在本文中将这个可控性测量指标统称为可控度. 自从 Kalman 首次提出可控度以来, 文献中出现了大量关于可控度的研究^[3-5].

可控度在飞行控制中具有非常重要的应用价值. 20 世纪 70-80 年代美国航天项目大量涌现^[5], 大型柔性航天器需要一种能够度量可控性的指标来优化执行机构的放置位置, 从而用有限的执行器尽可能为系统提供更大的控制能力. 系统设计过程中依据系统可控度大小来选择输入和输出从而使得系统更容易控制, 系统设计完成后才开始控制系统的设计与实现. 随着航空航天技术的发展以及航空航天领域对新技术的需求, 容错控制^[6-9]开始得到大家的广泛关注, 在系统存在故障情况下的可控性(文献中也称为可重构性^[10, 11])也逐渐受到大家的关注. 实际上, 并不是所有的故障都可以用容错控制策略来补偿. 如果一个故障发生后系统仍然可控但是可控的程度不高, 则这个故障的影响在实际中并不容易甚至不可能被容错控制策略补偿. 因此, 系统在特定故障下的可控度可以用来比较不同故障的可重构程度, 从而指导控制系统设计者选择合适的容错控制器或容错控制策略来补偿故障对系统造成的影响.

已有的可控度研究大都没有考虑系统控制输入受限的情况. 实际上系统的控制输入都受到物理约束(通常是幅值约束或变化速率约束)^[12, 13]. 文献[5]研究了系统输入受到对称约束时系统的可控度定义以及计算. 用 $u \in \mathbb{R}$ 表示一个一维系统的控制输入, 则对称约束指的是形如 $u \in [-a, a], a > 0$ 的约束. 实际中, 系统输入常常受到不对称约束(形如 $u \in [-a, b], b > a > 0$) 甚至是正约束(形如 $u \in [0, a]$, 或 $u \in [-a, 0], a > 0$), 这种情况下的可控度研究中却很少涉及. 因为受到任意约束的系统可控性不仅仅要求可控性矩阵满秩, 还要求系统满足其他条件^[14-17], 所以其可控度的研究相对困难.

本文在调研相关文献的基础上对已有的可控度定义和计算方法进行综述, 并总结现有研究中遇到的问题以及可能的解决思路. 针对系统输入受到任意约束(包括对称约束, 不对称约束, 和正约束)时的可控度研究不足的现状, 本文着重研究分析了输入受限系统的可控度问题以及可能的解决思路. 本文的主要工作如下: 1) 首先调研和总结了已有研究中的可控度定义和计算方法, 在深入理解的基础上将已有的可控度主要分为三类: 基于可控性 Gramian

矩阵的可控度, 模态可控度, 状态范数可控度; 2) 本文研究分析了控制输入受到任意约束系统的可控度定义以及计算方法, 并给出可行的解决思路; 3) 给出可控度在飞行控制中已有的和可行的应用.

2 可控度

本部分主要调研和总结已有研究中可控度 (在后文中统一用 ρ 表示) 的定义和计算方法, 并将其主要分为三类: 基于可控性 Gramian 矩阵的可控度 ρ_g , 模态可控度 ρ_m , 状态范数可控度 ρ_s . 本部分首先给出单级倒立摆^[18]的例子, 论文在综述可控度时会以该倒立摆模型为例进行说明.

2.1 单级倒立摆

倒立摆系统见图 1 所示, 小车质量为 $M_a=1.096\text{kg}$, 小车摩擦系数为 $b=0.1\text{N/m}\cdot\text{s}$, 摆杆质量 $m_a=0.109\text{kg}$, 重力加速度 $g=9.8\text{m/s}^2$, ϕ 是摆杆与竖直向上垂线的夹角 (rad), F_u 是加在小车上的控制 (N), $O-e_1e_2$ 是竖直平面坐标系. 假设小车沿着 e_1 方向的位移为 x_1 , 摆杆质量均匀且摆杆半长为 l , 则摆杆转动惯量为 $J=\frac{1}{3}m_al^2\text{kg}\cdot\text{m}^2$.

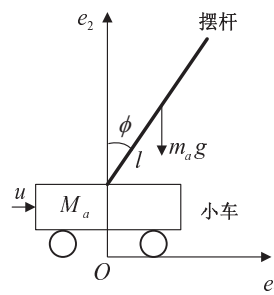


图 1 单级倒立摆系统示意图

如果控制量 u 是人用手施加的, 根据经验我们知道一个反应时间快的人更容易控制单级倒立摆. 为了验证这个结论是否正确, 下面假设人手施加力的动态过程是一个一阶惯性环节

$$F_u = \frac{1}{T_a s + 1} u, \quad (2.1)$$

其中 u 为大脑对手给出的控制指令, F_u 为手实际施加在小车上的力, T_a 为人从大脑发出指令到手完成动作的反应时间. 根据文献 [18] 和动态过程 (2.1), 图 1 所示倒立摆在平衡点 $\phi=0, x_1=0$ 处的线性数学模型为

$$\Sigma_0 : \dot{x} = A_0 x + B_0 u, \quad (2.2)$$

其中 $x = [x_1, \dot{x}_1, \phi, \dot{\phi}, F_u]^T$ 为系统状态, u 为控制输入, 系数矩阵

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(J+m_a l^2)b}{J(M_a+m_a)+M_a m_a l^2} & \frac{m_a^2 g l^2}{J(M_a+m_a)+M_a m_a l^2} & 0 & \frac{(J+m_a l^2)}{J(M_a+m_a)+M_a m_a l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-m_a l b}{J(M_a+m_a)+M_a m_a l^2} & \frac{m g l (M_a+m_a)}{J(M_a+m_a)+M_a m_a l^2} & 0 & \frac{m_a l}{J(M_a+m_a)+M_a m_a l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_a} \end{bmatrix},$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_a} \end{bmatrix}^T.$$

为了表明可控制度的作用, 本文在后文中会分别给出人的反应时间 $T_a = 0.2\text{s}$ 和 $T_a = 1\text{s}$ 时倒立摆的可控制度. 人的反应时间 $T_a = 0.2\text{s}$ 时, 系统 (2.2) 可改写为

$$\Sigma_{01} : \dot{x} = A_{01}x + B_{01}u,$$

其中

$$A_{01} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0890 & 0.7132 & 0 & 0.8903 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.2671 & 31.5397 & 0 & 2.6708 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad B_{01} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

人的反应时间 $T_a = 1\text{s}$ 时, 系统 (2.2) 可改写为

$$\Sigma_{02} : \dot{x} = A_{02}x + B_{02}u,$$

其中

$$A_{02} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0890 & 0.7132 & 0 & 0.8903 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.2671 & 31.5397 & 0 & 2.6708 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_{02} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

2.2 基于可控性 Gramian 矩阵的可控制度

与这类可控制度相关的文献主要有文献 [2, 3, 19]. 考虑一般线性系统

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) = C(t)x(t), \end{cases} \quad (2.3)$$

其中 Σ 为线性时变系统, Σ_1 为线性时不变系统, $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量, $u = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T \in \mathbb{R}^m$ 为控制输入向量, $y = [y_1, y_2, \dots, y_r]^T \in \mathbb{R}^r$ 为输出向量, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ 为系数矩阵. 令 $\Phi(t, t_0)$ 表示系统 Σ 的状态转移矩阵. 因此系统 Σ 在 t_0 时刻可控的充要条件为存在有限时间 t_1 , $t_0 \leq t_1 < \infty$ 使得

$$\text{rank } W_c(t_1, t_0) = n, \quad (2.4)$$

其中

$$W_c(t_1, t_0) = \int_{t_1}^{t_0} \Phi(t_0, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t_0, \tau) d\tau \quad (2.5)$$

为系统的(第一类)可控性矩阵. 如果系统线性时不变, 则系统(2.3)可改写为下列形式

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (2.6)$$

此时, 可控性验证条件(2.4)可以等价于下列形式

$$\text{rank } Q_c = n, \quad (2.7)$$

其中

$$Q_c = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \quad (2.8)$$

为(第二类)可控性矩阵.

可控性判定主要是验证是否存在 $t_1 \geq t_0$ 使得可控性矩阵 $W_c(t_1, t_0)$ 或 Q_c 非奇异. 不足的是这些判定条件并不能给出系统的可控度. 由于 $W_c(t_1, t_0)$ 与最优控制中的最小能量问题相关^[2], 所以可以通过深入分析可控性矩阵的性质来研究如何计算系统可控度. 给定初始条件 $x(t_0) = x_0$, 假设系统在固定时间区间 $[t_0, t_1]$ 上可控, 则将系统状态从 x_0 控制到 $x(t_1) = 0$ 所需要的最小能量为

$$E(t_1, t_0, x_0) = \min_u \int_{t_1}^{t_0} \|u(\tau)\|^2 d\tau.$$

这个问题只有在系统可控时才可解, 并且最小控制能量由下式给出

$$E(t_1, t_0, x_0) = x_0^T W_c^{-1}(t_1, t_0) x_0.$$

因此 $E(t_1, t_0, x_0)$ 可以作为系统可控度. 如果对于给定的初始状态, 如果将系统控制回原点所需的能力越小, 说明系统越容易控制, 可控程度越高. 但是这种度量依赖于初始状态 x_0 . 为了去掉对 x_0 的依赖, 文献[19]研究了将系统从初始状态球面 $\{x_0 | \|x_0\| = 1\}$ 上任意点控制回原点所需最大的最小控制能量和平均控制能量, 以及在给定最大控制能量的前提下系统能够控制回原点的初始状态最大范围, 并分别给出了下面三种可控度指标

$$\begin{aligned} \rho_{g1} &= \lambda_{\min}(W_c(t_1, t_0)), \\ \rho_{g2} &= \frac{n}{\text{tr}\{W_c^{-1}(t_1, t_0)\}}, \\ \rho_{g3} &= \sqrt[n]{\det(W_c(t_1, t_0))}, \end{aligned}$$

其中 $\text{tr}\{W_c^{-1}(t_1, t_0)\}$ 指的是矩阵 $W_c^{-1}(t_1, t_0)$ 的迹. 可控度指标 ρ_{g1} 与将系统从初始状态球面 $\{x_0 | \|x_0\| = 1\}$ 上任意点控制回原点所需最大的最小控制能量有关, 最大的最小控制能量由下式给出

$$\max_{\|x_0\|=1} E(t_1, t_0, x_0) = \frac{1}{\rho_{g1}}.$$

可控度指标 ρ_{g2} 与将系统从初始状态球面 $\{x_0 | \|x_0\| = 1\}$ 上任意点控制回原点所需最大的平均控制能量有关, 平均控制能量由下式给出

$$\bar{E}(t_1, t_0, x_0) = \frac{1}{\rho_{g2}}.$$

可控度指标 ρ_{g_3} 与在给定最大控制能量的前提下系统能够控制回原点的初始状态最大范围有关, 假设控制能量限制在 $E(t_1, t_0, x_0) \leq 1$, 则能够控制回原点的初始状态球体体积与 ρ_{g_3} 成正比, 体积由下式给出

$$V = \int_{x_0^T W_c^{-1}(t_1, t_0) x_0 \leq 1} dx_0 = K \rho_{g_3},$$

其中 $K > 0$ 为比例因子.

前面给出的这三种可控度指标都依赖于时间区间 $[t_0, t_1]$. 对于时不变系统, 这些指标都可以转化为与时间无关的形式^[19]

$$\begin{aligned} \rho_{g_1} &= \lambda_{\min} \left(\frac{Q_c^T Q_c}{n} \right), \\ \rho_{g_2} &= \frac{1}{\text{tr} \left\{ (Q_c^T Q_c)^{-1} \right\}}, \\ \rho_{g_3} &= \sqrt[n]{\det(Q_c^T Q_c)}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

其中 Q_c 由式 (2.8) 给出.

利用可控度指标 (2.9) 分别分析单级倒立摆系统 Σ_{01} 和 Σ_{02} . 系统 Σ_{01} 的三种基于 Gramian 矩阵的可控度分别为

$$\rho_{g_{11}} = 0.5100, \quad \rho_{g_{21}} = 1.6023, \quad \rho_{g_{31}} = 747.3991. \quad (2.10)$$

而系统 Σ_{02} 的三种基于 Gramian 矩阵的可控度分别为

$$\rho_{g_{12}} = 0.2044, \quad \rho_{g_{22}} = 0.7079, \quad \rho_{g_{32}} = 29.8960. \quad (2.11)$$

从 (2.10) 和 (2.11) 可以看出系统 Σ_{01} 比系统 Σ_{02} 的可控的程度更高, 也可以说系统 Σ_{01} 比系统 Σ_{02} 更容易控制.

需要指出的是, 基于可控性矩阵的可控度并不是只有上面三种, 就如文献 [19] 指出的, 以上三种可控度都可以扩展为很多种类的形式, 都可以用来反映系统可控的程度. 基于可控性 Gramian 矩阵的可控度默认系统采用的是能量最优控制器. 实际中, 还有时间最优控制器和燃料消耗最优控制器. 另外, 基于可控性 Gramian 矩阵的可控度利用的信息来自系统结构, 并没有考虑系统控制输入受限的情况, 而实际中约束是必然存在的.

2.3 模态可控度

Hamdan 在基于特征值或特征向量的 Popov-Belevitch-Hautus (PBH) 可控性验证条件的基础上提出了模态可控性的度量方法, 成为模态可控度^[4]. 模态可控度主要是基于 PBH 检验^[4, 20], 只能适用于系统矩阵没有重复特征根的情况. PBH 特征向量检验来判定系统可控性的基本原理是: 如果输入矩阵 B 的任意一列 b_j 与矩阵 A^T 关于第 i 个模态的特征向量 q_i 不垂直, 那么系统的第 i 个模态可控, 这里的模态与系统不同的特征值一一对应. 矩阵 A^T 与特征向量 q_i 的关系如下

$$A^T q_i = \lambda_i q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

其中 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ 为矩阵 A^T 的 n 个不同的特征根.

假设系统矩阵没有重根, 矩阵 A^T 所有的特征向量的方向 $\eta_i = \frac{q_i}{\|q_i\|}$ 都可以确定, 则系统第 i 个模态的模态可控度计算方法如下

$$\mu_i = \|f_i\|_2,$$

其中

$$f_i = \frac{q_i^T B}{\|q_i\|}.$$

那么, 可以定义整个系统的可控度指标

$$\rho_m = \min \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}. \quad (2.12)$$

利用可控度指标 (2.12) 分别分析单级倒立摆系统 Σ_{01} 和 Σ_{02} . 系统 Σ_{01} 的 5 个特征根分别为

$$\lambda_{11} = -5, \quad \lambda_{12} = -0.0830, \quad \lambda_{13} = -5.6191, \quad \lambda_{14} = 5.6130, \quad \lambda_{15} = 0.$$

其相应的模态可控度为

$$\mu_{11} = 5, \quad \mu_{12} = 0.8319, \quad \mu_{13} = 3.0455, \quad \mu_{14} = 0.2170, \quad \mu_{15} = 0.8157,$$

则系统 Σ_{01} 的模态可控度为

$$\rho_{m_1} = \min \{\mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{14}, \mu_{15}\} = 0.2170.$$

系统 Σ_{02} 的 5 个特征根分别为

$$\lambda_{21} = -1, \quad \lambda_{22} = -0.0830, \quad \lambda_{23} = -5.6191, \quad \lambda_{24} = 5.6130, \quad \lambda_{25} = 0.$$

其相应的模态可控度为

$$\mu_{21} = 1, \quad \mu_{22} = 0.6709, \quad \mu_{23} = 0.1024, \quad \mu_{24} = 0.0696, \quad \mu_{25} = 0.6372,$$

则系统 Σ_{02} 的模态可控度为

$$\rho_{m_2} = \min \{\mu_{21}, \mu_{22}, \mu_{23}, \mu_{24}, \mu_{25}\} = 0.0696.$$

由于 $\rho_{m_1} > \rho_{m_2}$, 所以系统 Σ_{01} 比系统 Σ_{02} 更容易控制.

通常情况下, 系统最小的模态可控度指标被用来当作系统可控度指标. 但是文献 [20] 指出, 如果可控度最小的模态对系统输出影响很小, 那么用这个作为系统可控度指标就没有实际意义, 所以应该将系统性能考虑进去, 定义一个新的可控度指标. 文献 [20] 结合 Hamdan 的模态可控度的测量指标以及模态成分分析 [21, 22] 提出一种能够同时反应模态可控度以及每个模态对输出影响程度的可控度. 模态可控度假设系统所有特征根相异, 但是很多情况下系统矩阵具有重特征根, 前面提出的模态可控度就不再适用. 另外, 模态可控度也没有考虑系统输入受限的情况.

2.4 状态范数可控度

基于可控性 Gramian 矩阵的可控度默认系统采用的是能量最优控制器, 这限制了这些指标的应用. 基于 PBH 检验的模态可控度只能适用于系统矩阵特征根相异的情况, 而有重根的时候不适用或者很难应用. 为了解决这些问题, Viswanathan, Longman 和 Likins 基于系统在恢复时间 T 内可恢复的状态集合提出了一种新的可控性度量方法 [23, 24].

假设线性时不变系统 (2.6) 的控制输入 u 满足下列约束

$$u \in \mathcal{U} = [-1, 1]^m,$$

则系统 (2.6) 在时间 T 内恢复域的定义如下

定义 1 系统在时间 T 内恢复域定义为集合

$$R_1(T) = \left\{ x(0) \mid \text{存在 } u(t), t \in [0, T], |u_i| \leq 1, i = 1, 2, \dots, m, \text{ 使得 } x(T) = 0 \right\}.$$

因此可定义状态范数可控制度如下.

定义 2 系统 (2.6) 在时间 T 内的可控制度定义为

$$\rho_{s_1} = \min_{x(0) \notin R_1(T)} \|x(0)\|, \quad (2.13)$$

其中 $\|\cdot\|$ 为欧式范数, 在本文中简称状态范数可控制度. 以二维系统为例, 可控制度见图 2 所示.

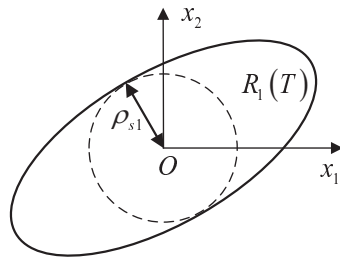


图 2 状态范数可控制度示意图 (图中 $R_1(T)$ 为恢复域, ρ_{s_1} 为可控制度)

可控制度 ρ_{s_1} 默认系统采用的是时间最优控制器, 状态范数可控制度还可以扩展为系统采用能量最优控制器和燃料最优控制器的情况 [27]. 首先给出不同控制结构下的恢复域定义 [27].

定义 3 系统在时间 T 和给定燃料 F 约束下的恢复域定义为集合

$$R_2(T) = \left\{ x(0) \mid \text{存在 } u(t), t \in [0, T], |u_i| \leq 1, i = 1, 2, \dots, m, \right. \\ \left. \sum_{i=1}^m \int_0^T |u_i| dt \leq F, \text{ 使得 } x(T) = 0. \right\}$$

相应的状态范数可控制度定义为

$$\rho_{s_2} = \min_{x(0) \notin R_2(T)} \|x(0)\|.$$

定义 4 系统在时间 T 和给定能量 E 约束下的恢复域定义为集合

$$R_3(T) = \left\{ x(0) \mid \text{存在 } u(t), t \in [0, T], \frac{1}{2} \int_0^T u^T u dt \leq E, \text{ 使得 } x(T) = 0 \right\}.$$

相应的状态范数可控制度定义为

$$\rho_{s_3} = \min_{x(0) \notin R_3(T)} \|x(0)\|.$$

状态范数可控制度是基于时间最优控制问题提出来的, 文献 [25] 将其扩展到时间最优跟踪问题上. 在实际中我们很难得到精确的恢复域, 因此无法得到状态范数可控制度的精确值. 文献 [24] 给出了一种状态范数可控制度的估计方法, 但是这个估计值是可控度的上界值. 对于系统方程是标准模态形式的系统, 这个估计值接近真实值. 但是对于系统方程为一般形式而非对角形式的系统, 我们无法确定这个估计值对真实值的逼近情况, 因此需要一种新的估计方法. 文献 [26] 通过对连续系统离散化, 给出了一种可控度的保守估计方法. 文献 [5] 对状态

范数可控制度进行了总结,并以实际应用实例对关键问题进行了讨论.需要指出的是,状态范数可控制度 ρ_{s_3} 与基于可控性 Gramian 矩阵的可控制度是一致的,只是度量指标不同.

利用可控制度指标 (2.13) 分别分析单级倒立摆系统 Σ_{01} 和 Σ_{02} . 假设控制量约束为 $u \in [-5, 5]$, 取恢复时间 $T = 2\text{s}$, 则利用文献 [26] 中给出的可控制度保守估计方法可计算得到系统 Σ_{01} 的状态范数可控制度为 $\rho_{s_{11}} = 0.4215$, 而系统 Σ_{02} 的状态范数可控制度为 $\rho_{s_{12}} = 0.1108$, 因此系统 Σ_{01} 更容易控制.

前面所述的状态范数可控制度均不能得到精确值,只能得到其估计值.文献 [28] 在受约束可控性 [15, 16] 研究的基础上给出了状态范数可控制度的精确表达式.针对系统 (2.6), 假设系统控制输入约束集为 \mathcal{U} , 则在时间 T 内的可控制度定义为 [28]

$$\rho(T) = \min_{\|z_0\|=1} \left[\int_0^T \max_{u \in \mathcal{U}} (u^T B^T z(\tau)) d\tau \right], \quad (2.14)$$

其中 $z(\cdot)$ 为伴随系统

$$\dot{z}(t) = -A^T z(t)$$

的解, 初始条件 $z(0) = z_0$. 可控制度 (2.14) 同时考虑了时间最优以及控制输入约束, 而且控制输入约束 \mathcal{U} 可以是任意情况 (对称约束, 不对称约束, 正约束).

2.5 小结

综上所述, 可控制度的大小反应了系统数学模型可控的程度. 目前研究中已有的可控制度主要分为三类: 基于可控性 Gramian 矩阵的可控制度, 模态可控制度, 状态范数可控制度. 三类可控制度的异同见表 1. 对于前面的倒立摆系统, 当人的反应时间从 $T_a = 0.1\text{s}$ 到 $T_a = 2\text{s}$ 之间变化时的可控制度变化情况可参见图 3 所示, 其中实线表示 ρ_{g_1} , 虚线表示 ρ_m , 点线表示 ρ_{s_1} 随 T_a 的变化情况. 从图中可以看出, 人的反应时间越快, 可控制度越大, 倒立摆系统越容易控制; 可控制度越小, 系统越难控制; 如果可控制度为零, 则系统不可控. 因此在实际系统设计过程中, 确定执行器的数目和种类后, 要优化执行器的位置使得系统可控制度尽可能的大.

表 1 三类主要可控制度异同对照表

ρ	基于可控性 Gramian 矩阵的可控制度	模态可控制度	状态范数可控制度
表达式	$\rho = \rho(W_c(t_1, t_0))$	$\rho = \min \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$	$\rho_s = \min_{x(0) \in R(T)} \ x(0)\ $
优点	从能量角度考虑可控制度, 计算简便, 物理意义明确	基于 PBH 校验, 计算相对简单	从可控的状态角度考虑可控制度, 更直观, 而且考虑控制输入受限的情况
缺点	未考虑系统输入约束	只能适用于没有重特征根的系统, 未考虑系统输入约束	计算复杂, 依赖于恢复时间 T

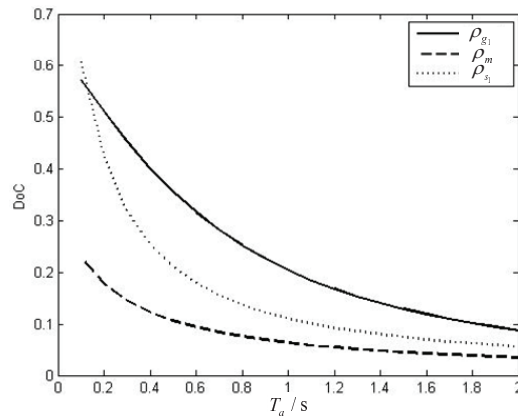


图3 反应时间从 $T_a = 0.1s$ 到 $T_a = 2s$ 之间变化时的不同可控度变化情况

3 输入受限系统的可控度

前面所综述的可控度大部分都没有考虑系统控制输入约束对系统可控性的影响, 而实际系统的控制输入基本上都受限. 文献 [5] 中的状态范数可控度只考虑了输入受到对称约束的情况, 然而实际系统常常受到不对称约束甚至是正约束. 文献 [28] 给出的状态范数可控度精确表达式, 可以适用于输入受到任意约束系统的系统, 但是需要进行两次优化才能得到结果, 并且状态范数可控度依赖于恢复时间 T . 文献 [29] 在状态范数可控度离散估计方法 [26] 的基础上, 将可控度离散估计方法从 $U = [-1, 1]^m$ 的情况扩展到了 $U = [a, b]^m$, $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ 的情况, 并且给出了可控度的离散估计方法. 这些可控度基本上属于状态范数可控度, 依赖于恢复时间 T , 而 T 的取值不同时状态范数可控度不同. 在实际中, 我们常常需要一种不依赖于恢复时间 T 并且能够考虑任意输入约束的可控度, 下面本文将研究分析不依赖于恢复时间 T 的可控度.

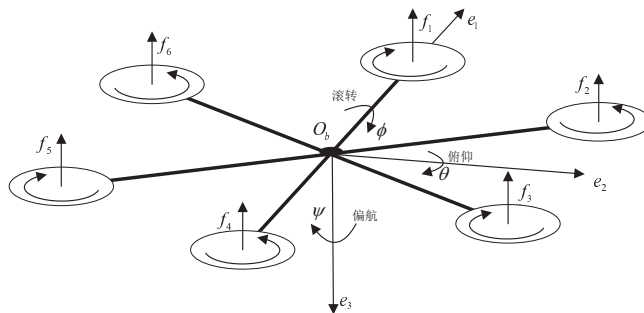


图4 一类六旋翼飞行器示意图

考虑一类如图 4 所示的六旋翼飞行器, 其控制量为六个旋翼提供的升力 $f = [f_1, f_2, \dots, f_6]^T$, 通过改变不同旋翼的升力来实现飞行器的姿态控制和高度控制. 图 4 所示六旋翼飞行

器在悬停状态下的系统线性模型为^[30]

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (3.1)$$

其中 $u = F - G$, 并且

$$\begin{aligned} x &= [h \ \phi \ \theta \ \psi \ v_h \ p \ q \ r]^T \in \mathbb{R}^8, \quad F = [F_T \ L \ M \ N]^T \in \mathbb{R}^4, \\ A &= \begin{bmatrix} 0_{4 \times 4} & I_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8 \times 8}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ J_f^{-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8 \times 4}, \\ G &= [m_a g \ 0 \ 0 \ 0]^T \in \mathbb{R}^4, \quad J_f = \text{diag}(-m_a, J_x, J_y, J_z), \end{aligned}$$

其中 h 和 v_h 为六旋翼飞行器的高度和高度方向的速度, ϕ, θ, ψ 分别为六旋翼飞行器的滚转角, 俯仰角和偏航角, 而 p, q, r 分别为三轴角速度. 六旋翼飞行器的质量为 m_a , 三轴转动惯量分别为 J_x, J_y, J_z . 控制量 F 的每个元素分别为机体总升力 F_T , 和三轴力矩 L, M, N . 重力加速度为 g .

由于六旋翼飞行器的直接控制量是 f , 力和力矩向量 F 实际上是由下式给出

$$F = H(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_6) f, \quad (3.2)$$

其中 H 为与六个旋翼的效率系数 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_6$ 相关的控制效率矩阵 (具体参考文献 [30]). 假设六个旋翼参数相同, 每个旋翼能够提供的最大升力为 K , 则控制量 f 所受的约束由下式给出

$$f \in \mathcal{F} = [0, K]^6. \quad (3.3)$$

因此 F 所受的约束 Ω 由下式给出

$$\Omega = \{F | F = H(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_6) f, f \in \mathcal{F}\}.$$

控制量 u 所受的约束 \mathcal{U} 由下式给出

$$\mathcal{U} = \{u | u = F - G, F \in \Omega\}. \quad (3.4)$$

由于系统 (3.1) 的输入约束集 \mathcal{U} 与旋翼效率系数 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_6$ 相关, 无法确定其具体形式. 受到任意约束的系统可控性不仅仅要求可控性矩阵满秩还要求系统满足其他条件. 对于系统 (3.1) 系统可控的充要条件^[14] 是

- 1) $\text{rank } Q_c = n$, 其中 $Q_c = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$;
- 2) 不存在 A^T 的实特征向量 v 使得 $v^T B u \leq 0$ 对所有的 $u \in \mathcal{U}$ 成立.

文献 [30] 利用上述可控性充要条件分析了六旋翼飞行器 (3.1) 在有一个旋翼停机时的可控性, 结果表明可控性矩阵 Q_c 满秩, 但是飞行器不可控. 这是因为一个旋翼停机后, 系统 (3.1) 受到的约束 \mathcal{U} 变为正约束 (只能提供正偏航力矩或负偏航力矩, 力矩正负与停机的旋翼有关). 为了得到系统 (3.1) 不依赖于时间 T 同时又可以考虑式 (3.4) 中约束集 \mathcal{U} 时的可控度, 文献 [31] 给出了一种基于控制量 F 的约束集 Ω 的可控度指标: G 距离 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 的最小距离, 也称作系统有效控制能力指标 (Available Control Authority Index, ACAI). 首先给出如下定义.

定义 5^[31] 定义指标

$$\rho(X, \partial\mathcal{U}) \triangleq \begin{cases} \min \{\|X - F\| : X \in \Omega, F \in \partial\Omega\}, \\ -\min \{\|X - F\| : X \in \Omega^C, F \in \partial\Omega\}, \end{cases} \quad (3.5)$$

其中 $\partial\Omega$ 为 Ω 的边界, Ω^C 为 Ω 的补集, 则系统 (3.1) 有效控制能力指标为 $\rho(G, \partial\Omega)$. 指标 $\rho(G, \partial\Omega)$ 在一定程度上反映了多旋翼飞行器系统控制的难易程度, 并且可以很容易的扩展到形如 (3.1) 一般线性系统中, 因此可以作为系统 (3.1) 的可控度

$$\rho_A = \rho(G, \partial\Omega) \quad (3.6)$$

如果 Ω 是二维的, 则指标 ρ_A 如图 5 所示.

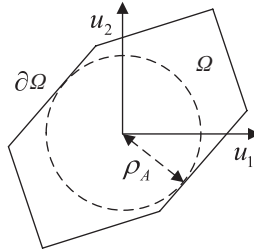


图 5 有效控制能力指标 ρ_A

指标 (3.5) 可以扩展到固定翼飞行器^[32]的可控性分析中. 由于固定翼飞机模型的高度非线性, 其控制器设计是通常是在配平点处进行的. 常规固定翼飞机 (如图 6 所示) 在配平点处的系统数学模型可以用下列线性形式表示

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (3.7)$$

其中控制输入 $u = [\delta_e, \delta_a, \delta_r, \delta_T]^T \in \mathbb{R}^4$ 的各元素分别为升降舵, 副翼, 方向舵, 和油门控制量. 在配平点处完成配平时, 会得到控制量的配平值 $u_0 = [\delta_{e0}, \delta_{a0}, \delta_{r0}, \delta_{T0}]^T$, 则在配平点处升降舵, 副翼, 方向舵, 和油门控制量的名义约束为

$$\begin{aligned} \delta_e &\in \mathcal{U}_e = [\delta_{e,\min} - \delta_{e0}, \delta_{e,\max} - \delta_{e0}], \\ \delta_a &\in \mathcal{U}_a = [\delta_{a,\min} - \delta_{a0}, \delta_{a,\max} - \delta_{a0}], \\ \delta_r &\in \mathcal{U}_r = [\delta_{r,\min} - \delta_{r0}, \delta_{r,\max} - \delta_{r0}], \\ \delta_T &\in \mathcal{U}_T = [-\delta_{T0}, \delta_{T,\max} - \delta_{T0}], \end{aligned}$$

其中 $\delta_{e,\max}, \delta_{e,\min}$ 分别为实际中 δ_e 的最大最小值, $\delta_{a,\max}, \delta_{a,\min}$ 分别为实际中 δ_a 的最大最小值, $\delta_{r,\max}, \delta_{r,\min}$ 分别为实际中 δ_r 的最大最小值, $\delta_{T,\max}$ 为实际中 δ_T 的最大约束值. 因此, 控制输入 u 的所受的约束为

$$u \in \mathcal{U} = \mathcal{U}_e \times \mathcal{U}_a \times \mathcal{U}_r \times \mathcal{U}_T. \quad (3.8)$$

多旋翼飞行器模型 (3.1) 的可控度可以用指标 ρ_A 表示, 主要得益于其系统矩阵 A 只有一个重复的特征根. 而系统 (3.7) 通常有很多个特征根, 因此其在控制输入约束 (3.8) 下的可控度要比多旋翼飞行器复杂很多. 作者在后续工作中会扩展文献 [31] 中的可控度指标 $\rho(G, \partial\Omega)$ 使其适用于一般固定翼飞行器模型 (3.7). 通过奇异值分解, 系统可以分解为多个子系统, 而每个子系统都可以使用文献 [31] 提出的方法计算其可控度, 这些子系统可控度中的最小值可以看作整个系统的可控度. 这样扩展后的可控度可以适用于固定翼飞行器等一般线性系统模型表示的系统. 需要指出的是, 可控度指标 ρ_A 只能适用于系统模型已经确定,

而只有执行器控制效率系数和控制输入约束存在变化的情况. 如何将可控制度指标 ρ_A 与经典的可控制度指标 ρ_g , ρ_m , 或 ρ_s 结合起来也是一个需要研究的问题.

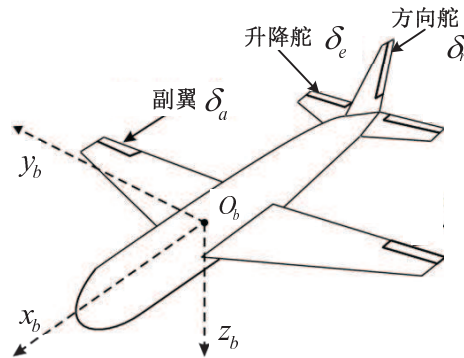


图6 固定翼飞行器示意图

4 可控制度在飞行控制中的应用

在飞行控制中, 可控制度在飞行器设计, 控制系统设计和飞行安全监控中都有相应的应用研究. 本部分将主要介绍可控制度在这些领域中的应用, 并探讨可控制度的其他可行的应用.

4.1 飞行器设计

如前所述, 可控制度最开始的需求来自柔性航天器设计的执行器配置问题^[25, 33, 34]. 在飞行器结构实际时, 执行器或舵面的位置以及执行器所受的约束都对飞行器动态模型的可控性产生影响. 在系统设计时, 除了执行器位置外, 还有一些其他的可变参数, 这些都可以依据可控制度最优的准则进行设计. 以系统 (2.6) 为例, 假设系数矩阵 B 含有与设计参数 θ 相关的元素, 则系统状态方程改写为

$$\dot{x}(t) = A(\theta)x(t) + B(\theta)u(t),$$

而系统可控制度的计算需要矩阵 $A(\theta)$ 和 $B(\theta)$, 因此系统可控制度记为 $\rho(\theta)$. 假设 $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^r$, 其中 Θ 为执行器配置参数 θ 的可变范围, r 为 θ 元素的个数. 则最大化可控制度来优化飞行器设计的问题, 可以总结为通过调节飞行器执行器配置参数 θ 使得 $\rho(\theta)$ 最大,

$$\theta^* = \arg \max_{\theta \in \Theta} \rho(\theta),$$

其中 θ^* 为使得飞行器系统模型可控制度最大的执行器配置参数, 也是设计所希望得到的参数.

4.2 容错飞行控制

容错飞行控制在几年来得到了广泛的研究, 并且研究中出现了大量能够在飞行器受到执行器故障情况下的控制器设计技术. 但是并不是所有的故障都可以用容错控制策略来补偿. 如果一个故障发生后, 系统仍然可控, 但是故障稍微严重一点点, 系统就变为不可控. 那么, 这个故障的影响在实际中并不容易甚至不可能被容错控制策略补偿. 所以, 在设计容错飞行控制策略时可以先考虑可能出现的故障及其对应的系统可控制度, 然后针对可控制度满足

一定要求的故障进行容错控制策略设计, 从而避免在不可能重构控制的故障上浪费资源. 文献 [31] 给出了多旋翼飞行器在有旋翼受损或电机停机后的系统可控度量指标以及计算方法. 在为多旋翼飞行器设计容错控制器时, 可以针对可控度满足一定要求的故障条件进行设计, 从而避免在不可实现的容错控制器设计上耗费精力.

4.3 飞行安全监控

飞行器在飞行过程中, 总是会受到外界扰动的影响. 当扰动的影响大到一定程度后, 系统可能会变得不可控. 如果在飞行器飞行过程中, 可以实时估计外界干扰的大小, 实时计算系统可控度的变化, 以此来判断飞行器的安全性并为飞行员或指挥员决策提供依据. 文献 [36] 研究了一种针对四旋翼飞行器控制能力在线评估方法. 其核心思想是实时检测四旋翼电机的故障程度, 以可控度和控制性能作为综合指标, 在线估计四旋翼电机发生故障后控制能力下降的程度, 为任务执行提供参考. 假设四旋翼飞行器在故障后的状态范数可控度为 ρ_s , 则四旋翼飞行器剩余控制能力由下式给出

$$P(x, \rho, \varepsilon) = \max\left(1 - \frac{\|x\|}{\varepsilon\rho_s}, 0\right),$$

其中 x 为系统当前状态, 系数 ε 为控制器性能系数, $\varepsilon\rho_s$ 近似表示稳定域半径. 由于实际中控制系统稳定域的计算过程非常复杂不利于实时计算, 所以用系数 ε 来简化系统控制能力实时估计过程. 系数 ε 可以利用 Monte-Carlo 仿真方法得到 [36].

实际飞行过程中, 除了飞行控制能力外还有很多飞行安全相关的因素. 假设飞行器飞行时受到故障或干扰下的可控度为 ρ_d , 飞行安全实时监控指标为 S , 则

$$S = h_s(\rho_d, \sigma),$$

其中 $h_s(\rho_d, \sigma)$ 为可控度以及其他与飞行安全相关的参数与飞行安全之间的函数关系式, ρ_d 为飞行器系统模型在受到故障或干扰下的可控度, σ 为与飞行安全相关的其他参数.

4.4 其他可行的应用

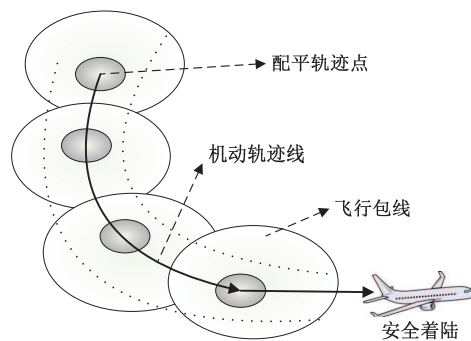


图 7 基于配平轨迹序列的航路规划

可控度还可以应用在飞行器航路规划问题中. 当飞行器出现执行器故障时, 按照飞行器正常模型设计好的航路已经不再适用. 出现故障时, 首先需要对飞行器进行重新配平, 找出

所有可行的配平状态集 Γ . 文献中固定翼飞机基于配平轨迹序列的航路规划 (见图 7) 问题可总结为下列优化问题^[35]

$$\min_{\{V_i, \dot{h}_i, \dot{\chi}_i\} \in \Gamma, i=1,2,\dots,N} J = \sum_{i=1}^N (w_1 \dot{\chi}_i + w_2 \Delta t_i^2), \quad (4.1)$$

其中 N 为从当前位置到目标位置所需的配平状态个数, w_1, w_2 为权重系数, $\dot{\chi}_i$ 为第 i 个配平状态时的偏航角速率, Δt_i 为第 i 个配平状态需要维持的时间, 这个优化问题要满足下列约束

$$\begin{cases} \chi_0 + \sum_{i=1}^N \dot{\chi}_i \Delta t_i = \chi_g, \\ h_0 + \sum_{i=1}^N \dot{h}_i \Delta t_i = h_g, \\ x_0 + \sum_{i=1}^N V_i \Delta t_i \cos\left(\chi_{i-1} + \frac{1}{2} \dot{\chi}_i \Delta t_i\right) \frac{\sin\left(\frac{1}{2} \dot{\chi}_i \Delta t_i\right)}{\frac{1}{2} \dot{\chi}_i \Delta t_i} = x_g, \\ y_0 + \sum_{i=1}^N V_i \Delta t_i \sin\left(\chi_{i-1} + \frac{1}{2} \dot{\chi}_i \Delta t_i\right) \frac{\sin\left(\frac{1}{2} \dot{\chi}_i \Delta t_i\right)}{\frac{1}{2} \dot{\chi}_i \Delta t_i} = y_g, \end{cases}$$

其中 $\{V_i, \dot{h}_i, \dot{\chi}_i\} \in \Gamma$, 分别为飞机的配平速度, 下滑速率和偏航角速率, $V_N = V_g, \dot{h}_N = \dot{h}_g, \dot{\chi}_N = \dot{\chi}_g$, 下标 g 表示飞机最终到达目标点时的配平状态, χ_0, h_0, x_0, y_0 分别问初始时飞机的偏航角, 高度, 以及北向东向位置. 航路优化过程 (4.1) 只考虑了拐弯最少和时间最短这两项指标, 但是可配平状态集合 Γ 中有的配平状态可能会使得系统可控度变得很小. 因此, 本文提出一种可行的考虑配平状态可控度的航路优化方法

$$\min_{\{V_i, \dot{h}_i, \dot{\chi}_i\} \in \Gamma} J = \sum_{i=1}^N (w_1 \dot{\chi}_i + w_2 \Delta t_i^2 - w_3 \rho_i), \quad (4.2)$$

其中 ρ_i 为飞机在第 i 中配平状态下配平后, 系统模型的可控度.

考虑配平状态处系统可控度的航路优化方法 (4.2) 不光可以应用在应急航路规划上, 也可以应用在一般航路规划问题上. 在航路设计时就考虑系统可控的程度满足安全要求, 从而保证飞行安全.

5 总结

本文对可控度的研究进行调研和综述, 并将已有的可控度研究主要分为基于可控性 Gramian 矩阵的可控度, 模态可控度, 状态范数可控度三类. 为了表明可控度在实际中的应用, 本文以两个不同的单级倒立摆为例对其可控度进行比较, 更直观的说明可控度的意义. 在文献研究和作者研究工作的基础上, 本文还着重讨论了输入受限系统的可控度的研究, 并指出研究控制输入受到不对称约束以及正约束情况下的可控度对可控度在实际中展开应用具有非常重要的意义. 最后, 本文给出了可控度在飞行器设计, 容错飞行控制, 航路规划, 飞行安全监控领域中已有的应用以及未来可行的应用. 如何将基于控制量可行范围的有效控制能力指标扩展到一般线性系统, 以及如何将该指标与经典的可控度结合来描述控制输入受到任意约束系统的可控度是本文的未来工作.

参 考 文 献

- [1] Kalman R E. On the general theory of control systems. Proceedings of the First International Congress on Automatic Control, Moscow, 1960, **1**: 481–492.
- [2] Kalman R E, Ho Y C, Narendra K S. Controllability of linear dynamical systems. *Contribution to Differential Equations*, 1962, 189–213.
- [3] Johnson C D. Optimization of a certain quality of complete controllability and observability for linear dynamical systems. *ASME Transactions, Journal of Basic Engineering*, 1969, **91**: 228–238.
- [4] Hadman A M A, Nayfeh A H. Measures of modal controllability and observability for first- and second-order linear systems. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1989, **12**(3): 421–428.
- [5] Viswanathan C N, Longman R W, Likins P W. A degree of controllability definitions: Fundamental concepts and application to modal systems. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1984, **7**(2): 222–230.
- [6] Zhang Y, Jiang J. Integrated design of reconfigurable fault-tolerant control systems. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2001, **24**(1): 133–136.
- [7] Pachter M, Huang Y S. Fault tolerant flight control. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2003, **26**(1): 151–160.
- [8] Cieslak J, Henry D, Zolghadri A, Goupil P. Development of an active fault-tolerant flight control strategy. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2008, **31**(1): 135–147.
- [9] Zhang Y, Jiang J. Bibliographical review on reconfigurable fault-tolerant control systems. *Annual Reviews in Control*, 2008, **32**(2): 229–252.
- [10] Wu N E, Zhou K, Salomon G. Control reconfigurability of linear time-invariant systems. *Automatica*, 2000, **36**(11): 1767–1771.
- [11] Yang Z. Reconfigurability analysis for a class of linear hybrid systems. Proceedings of 6th IFAC SAFEPRO-CESS'06, Beijing, China, 2006.
- [12] Hu T, Lin Z. Control Systems with Actuator Saturation: Analysis and Design. Birkhäuser Boston, 2001.
- [13] 吕亮. 具有执行器饱和的控制系统分析与设计. 上海交通大学博士学位论文, 2010.
- [14] Brammer R F. Controllability in linear autonomous systems with positive controllers. *SIAM Journal on Control*, 1972, **10**(2): 339–353.
- [15] Schmitendorf W E, Barmish B R. Null controllability of linear systems with constrained controls. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 1980, **18**(4): 327–345.
- [16] Barmish B R, Schmitendorf W E. New results on controllability of systems of the form $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t, u(t))$. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1980, **25**(3): 540–547.
- [17] Yoshida H, Tanaka T. Positive controllability test for continuous-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, **52**(9): 1685–1689.
- [18] 杨世勇, 徐莉苹, 王培进. 单级倒立摆的 PID 控制研究. *控制工程*, 2007, **14**(S1): 23–24, 53.
- [19] Müller P C, Weber H I. Analysis and optimization of certain qualities of controllability and observability for linear dynamical systems. *Automatica*, 1972, **8**(3): 237–246.
- [20] Kim Y, Junkins J L. Measures of controllability for actuator placement. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1991, **14**(5): 895–902.
- [21] Skelton R E. Dynamic System Control — Linear System Analysis and Synthesis, Wiley, New York, 1988.
- [22] Skelton R E, Singh R, Ramakrishnan J. Component model reduction by component cost analysis. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, AIAA Paper 88–4086, Minneapolis, MN, Aug. 1988.

- [23] Viswanathan C N, Longman R W, Likins P W. A definition of the degree of controllability — A criterion for actuator placement. Proceedings of the second VPI&SU/AIAA Symposium on Dynamics and Control of Large Flexible Spacecraft, June 1979, 369–381.
- [24] Viswanathan C N, Longman R W. The determination of the degree of controllability for dynamic systems with repeated eigenvalues. Proceedings of the NCKU/AAS Symposium on Engineering Science and Mechanics, Tainan, Taiwan, Dec. 1981.
- [25] Longman R W, Alfriend K T. Actuator placement from degree of controllability criteria for regular slewing of flexible spacecraft. *Acta Astronautica*, 1981, **8**(7): 703–718.
- [26] Klein G, Lindberg J R E, Longman R W. Computation of a degree of controllability via system discretization. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1982, **5**(6): 583–588.
- [27] Lindberg J R E, Longman R W. Optimization of actuator placement via degree of controllability criteria including spillover considerations. AIAA/AAS Astrodynamics Conference, AIAA-82-1435, August 9–11, San Diego, California, 1982.
- [28] Schmitendorf W E. An exact expression for computing the degree of controllability. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1984, **7**(4): 502–504.
- [29] 杨斌先, 杜光勋, 全权, 蔡开元. 输入受限下的可控度分析及其在六旋翼飞行器设计中的应用. 第 32 届中国控制会议, 西安, 中国, 2013.
- [30] Du G X, Quan Q, Cai K Y. Controllability Analysis and Degraded Control for a Class of Hexacopters Subject to Rotor Failures. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, published online 04 Sep. 2014. doi: 10.1007/s10846-014-0103-0.
- [31] Du G X, Quan Q, Yang B, Cai K Y. Controllability analysis for multicopter rotor degradation and failure. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, published online 20 January 2015. doi: 10.2514/1.G000731.
- [32] 邓思阳, 杜光勋, 全权, 蔡开元. 小型固定翼无人机的跟踪控制: 一种加性分解动态逆方法. 第 33 届中国控制会议, 南京, 中国, 2014.
- [33] Roh H S, Park Y. Actuator and exciter placement for flexible structures. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 1997, **20**(5): 850–856.
- [34] Heniche A, Kamwa I. Using measures of controllability and observability for input and output selection. Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Control Applications, September 18–20, Glasgow, Scotland, U K, 2002.
- [35] 李亦楠. 面向操纵面故障飞机的应急飞行规划方法研究. 北京航空航天大学硕士论文, 北京, 2011.
- [36] 刘斌, 赵峙尧, 杨斌先, 全权, 蔡开元. 一种四旋翼飞行控制能力实时评估方法. 第 33 届中国控制会议, 南京, 中国, 2014.