基于Hamilton-Jacobi方程的飞行器机动动作可达集分析

刘 瑛[1,2] 杜光勋[1] 全 权[1] 田云川[2]

摘 要 为了给驾驶员完成标准机动动作提供决策支持, 提出一种使用哈密尔顿–雅克比 (Hamilton-Jacobi) 方程求解机动动作可行状态空间的研究方法. 使用关键点将机动动作划分为不同阶段, 将各关键点的标准状态约束作为目标集, 逆时间求解目标集对应的可达集得到各阶段的边界状态范围, 目标集和可达集均由零水平集表示. 使用该方法得到斤斗动作三维度运动模型下各阶段的可达集及斤斗动作的可行状态空间, 为了使运动模型的控制量与驾驶员实际操纵更为接近, 构建了以迎角变化率为控制量的四维度运动模型, 在此基础上对斤斗动作各阶段的可达集进行了分析.

关键词 机动动作, 可达集, 哈密尔顿–雅克比方程, 水平集方法, 斤斗动作

引用格式 刘瑛, 杜光勋, 全权, 田云川. 基于 Hamilton-Jacobi 方程的飞行器机动动作可达集分析. 自动化学报, 2016, **42**(3): 347−357

DOI 10.16383/j.aas.2016.c140888

Reachability Calculation for Aircraft Maneuver Using Hamilton-Jacobi Function

LIU Ying[1,2] DU Guang-Xun[1] QUAN Quan[1] TIAN Yun-Chuan[2]

Abstract To help the pilots make decisions for aircraft maneuvers, a reachability analysis method using Hamilton-Jacobi partial differential equation is proposed in this paper. The aircraft maneuver is divided into several phases based on the key points. The restricted set of aircraft states at each key point is seen as the target set, and then a reachable set can be obtained by solving the Hamilton-Jacobi partial differential equation. The target set and the reachable set are both described by zero level set. For the three dimensional dynamical model of the aircraft, the reachable set of each key point and the feasible state space of the whole loop maneuver have been achieved. In order to make the analysis results more easy to use in practice, a four dimensional dynamical model of the aircraft which takes the rate of the angle of attack as the control parameter is formulated. Based on the four dimensional dynamical model, the reachable set is analyzed by means of the proposed method.

Key words Maneuver, reachable set, Hamilton-Jacobi equation, level set method, loop maneuver

Citation Liu Ying, Du Guang-Xun, Quan Quan, Tian Yun-Chuan. Reachability calculation for aircraft maneuver using Hamilton-Jacobi function. *Acta Automatica Sinica*, 2016, **42**(3) : 347−357

驾驶员是人–机–环系统的核心环节, 是飞行控制的主体[1]. 机动动作则是飞行训练及空战过程中飞行航迹的基本构成要素. 飞行人员认为在空战机动动作或机动动作的组合过程中, 动作偏差的累积将会导致状态参数的偏差不断增大, 当偏差增大到一定程度将导致动作改出, 使得机动任务无法完成. 因此, 确定机动动作过程中的可行状态范围是完成标准机动动作的重要保证, 同时也是保证机动动作安全性的重要条件.

飞行大纲对标准机动动作的完成过程有明确的规定, 即要求驾驶员在完成机动动作过程中在一系列关键点满足状态参数的约束. 然而, 在实际的飞行过程中, 驾驶员很难依据当前状态判断是否能够在关键点满足标准状态的要求. 因此, 本文立足于确定能够在各关键点满足标准状态约束的状态参数空间, 若状态参数在该空间范围内, 则必然存在控制量使状态在某个时间内满足关键点标准状态约束. 该范围是驾驶员能够完成标准机动动作的可行状态范围, 也是机动动作偏差修正的边界状态范围. 若状态参数超出该范围则无论采用怎样的控制量均无法完成标准机动动作. 该边界范围的确定为驾驶员判断能否完成标准机动动作提供了依据.

为了确定在关键点满足标准状态的约束的可行状态空间, 使用可达集分析的方法, 该方法对高阶系统及非凸性问题具有较好的适应能力[2−3]. 在国外,

收稿日期 2014-12-29 录用日期 2016-01-04
Manuscript received December 29, 2014; accepted January 4, 2016
国家自然科学基金 (61473012) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61473012)
本文责任编委 裴海龙
Recommended by Associate Editor PEI Hai-Long
1. 北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院 北京 100191 2. 中国人民解放军 95949 部队 沧州 061000
1. School of Automation Science and Electrical Engineering, Beihang University, Beijing 100191 2. 95949 Army of People's Liberation Army Air Force, Cangzhou 061000

可达集分析在保证飞行安全方面已有相关的应用. 文献 [4] 将该方法用于四旋翼直升机后翻机动安全操纵范围的确定中, 将整个机动动作划分为不同的模式, 针对不同模式下状态参数的约束条件确定其对应的可达集, 为机动动作安全控制律的设计提供支持; 文献 [5] 将可达集用于着陆过程的研究中, 得到着陆过程不同阶段的可达集, 并分析了模式转换对可达集的影响; 文献 [6] 以配平状态作为目标集, 得到机动动作配平状态下的安全飞行包线. 另外, 可达集在追逃问题[7]、多飞行器避障问题[8]、重型车辆编队安全集计算[9]、空中加油过程中安全性分析[10] 以及移动物体的追踪问题[11] 中均得到有效的应用. 在国内, 可达集在其他领域有着较广泛的应用[12−13].

本文以为驾驶员完成标准机动动作提供决策支持为目标, 将可达集分析的方法应用于机动动作安全性分析中, 这里的安全性指的是能否按照飞行大纲要求完成一个标准机动动作. 所做的主要工作包括以下三个方面: 1) 使用关键点划分机动动作, 将各关键点的标准状态约束定义为目标集, 使用可达集表示在某个时间内能够进入目标集的边界状态范围; 2) 目标集和可达集均由水平集函数描述, 因此将可达集的计算转化为求解 Hamilton-Jacobi 方程的终值问题[14], 并利用 Mitchell 的水平集工具箱[15] 具体实现; 3) 在仿真实验部分以典型纵向机动动作斤斗为例进行分析, 构建了不同控制量条件下三维度及四维度纵向机动模型, 对各阶段可达集对应的边界状态范围进行了分析, 同时, 针对三维度机动模型给出了标准斤斗动作的可行状态空间.

本文的主要创新工作为将基于 Hamilton-Jacobi 方程的可达集分析方法应用于机动动作安全性分析中, 具体以典型纵向机动动作斤斗动作为例进行分析, 得到斤斗动作三维度及四维度运动模型下的可达集, 为驾驶员完成标准机动动作及动作偏差的修正提供决策支持.

1 可达集计算

1.1 可达集

飞行器的动态特性可以表示为以下常微分方程的形式[16]:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{u}) \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ 表示 n 维状态空间, t 为时间, $\boldsymbol{u} \in U$ 表示系统的控制量, 向量场 $f: \mathbf{R}^n \times [0, T] \times U \to \mathbf{R}^n$ 有界且为 Lipschitz 连续的.

可达集的定义为:

定义 1. 对于由式 (1) 表示的系统, 给定目标集 $G_0 \in \mathbf{R}^n$, 可达集 $P_\tau(G_0) \in \mathbf{R}^n$ 表示能够在控制量 $\boldsymbol{u} \in U$ 的作用下在时间 $t \in [0, \tau]$ 进入目标集的状态的集合.

由定义可知对于状态 $\boldsymbol{x} \in P_\tau(G_0)$, 必然存在控制量 $\boldsymbol{u}$, 使 $\boldsymbol{x}$ 在经过时间 t 后进入目标集 G_0. 但对于 $P_\tau(G_0)$ 的补集, 即 $(P_\tau(G_0))^c$ 则无论采用怎样的控制量均无法进入目标集, 因此, $(P_\tau(G_0))^c$ 也可以称作不可达集合. 目标集与可达集之间的关系可由图 1表示.

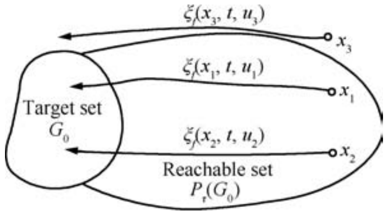


图 1 目标集与可达集的关系

Fig. 1 The relationship between target set and reachable set of the stages

图 1 中, $\xi_f(\cdot)$ 表示由式 (1) 得到的状态的轨迹, u_1, u_2, u_3 表示控制量, 状态 x_1, $x_2 \in P_\tau(G_0)$ 则存在对应的控制量 u_1, u_2, 使状态在时间 t 内进入目标集 G_0. 状态 x_3 在可达集范围之外, 则无论采用怎样的控制量均无法使其进入目标集 G_0.

目标集及可达集由水平集方法计算得到. 水平集方法是计算动态隐式曲面演变的一类数值算法. 其主要思想是将移动形变的曲线作为零水平集嵌入到更高一维度的函数中, 由封闭超曲面的演化描述曲线的演化. 水平集方程可以表示为

$$\frac{\partial \phi(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} + f \cdot \nabla \phi = 0 \tag{2}$$

其中, $\nabla \phi$ 为梯度, $\phi(\boldsymbol{x}, t)$ 为水平集函数且为 Lipschitz 连续的. 水平集函数首先为隐函数, 这一形式有利于描述可达集的演化过程; 另外, 水平集函数为符号距离函数, 对于一个有界开区域 $\Omega \in \mathbf{R}^n$, 该区域的边界为 $\partial\Omega \in \mathbf{R}^n$, 水平集函数可以表示为

$$\begin{aligned} &\phi(\boldsymbol{x}, t) < m, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega \\ &\phi(\boldsymbol{x}, t) = m, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega \\ &\phi(\boldsymbol{x}, t) > m, \quad \boldsymbol{x} \notin \Omega \end{aligned} \tag{3}$$

目标集及可达集的边界可由水平集函数的零水平集[17] 表示, 即式 (3) 中 $m = 0$. 目标集 G_0 可由水平集函数表示如下:

$$G_0 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n | \phi(\boldsymbol{x}, 0) \le 0\} \tag{4}$$

要确定目标集 G_0 在向量场 f 作用下的可达集, 可以通过求解 Hamilton-Jacobi 方程的粘性解得到,

Hamilton-Jacobi 方程可以表示为

$$\frac{\partial \phi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}+\min[0,H(\boldsymbol{x},p)]=0,\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,t<0$$
$$\phi(\boldsymbol{x},t)=\phi(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,t=0 \tag{5}$$

其中, Hamilton 函数 $H(\boldsymbol{x},p)$ 为

$$H(\boldsymbol{x},p)=\max_{\boldsymbol{u}\in U}p^{\mathrm{T}}f(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{u}) \tag{6}$$

式 (6) 中, p 为哈密尔顿协态, 表示为 $p=\frac{\partial\phi(\boldsymbol{x},t)}{\partial\boldsymbol{x}}$, $f(\cdot)$为向量场, 即由式 (1) 表示的状态方程. 使式 (6) 取得最大值的控制量可以表示为

$$u^*(\boldsymbol{x},p)=\arg\max p^{\mathrm{T}}f(\boldsymbol{x},t,u) \tag{7}$$

将最优控制量代入式 (5) 求得可达集, 可达集可以表示为

$$P_\tau(G_0)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n|\phi(\boldsymbol{x},\tau)\le 0\} \tag{8}$$

由式 (7) 和式 (8) 可知, 最优控制量 $\boldsymbol{u}^*$ 是使可达集达到最大的控制量. 下面介绍可达集的具体求解方法.

1.2　可达集的计算

式 (5) 为一阶双曲型偏微分方程, 首先, 使用网格对状态空间进行划分, 对于相邻网格点 x_i, x_{i+1},x_{i-1} 可得到以下左导数及右导数的形式:

$$p^-=D_x^-\phi(x_i,t)=\frac{\phi(x_i,t)-\phi(x_{i-1},t)}{x_i-x_{i-1}}$$
$$p^+=D_x^+\phi(x_i,t)=\frac{\phi(x_{i+1},t)-\phi(x_i,t)}{x_{i+1}-x_i} \tag{9}$$

使用 Lax-Friedrichs 格式得到 Hamilton 函数的近似值, 具体为

$$H(\boldsymbol{x},p^+,p^-):=H\left(\boldsymbol{x},\frac{p^++p^-}{2}\right)-\frac{1}{2}k^{\mathrm{T}}(p^+-p^-) \tag{10}$$

其中, p^+, p^- 由式 (9) 给出, 对于状态空间的第 i 个维度 k_i 可以表示为

$$k_i=\max_{p_i\in[p_{i\min},p_{i\max}]}\left|\frac{\partial H}{\partial p_i}\right| \tag{11}$$

其中, $p_{i\min}=\min(p_i^+,p_i^-)$, $p_{i\max}=\max(p_i^+,p_i^-)$, 即第 i 个维度上左导数 p_i^+ 与右导数 p_i^- 的最小值与最大值. 将式 (11) 及式 (10) 代入式 (9), 结合式 (5) 最终求得可达集. 但在不同的模式下, 将得到不同的可达集, 在时间模式[5] 下, 时间 τ 预先给定, 由 $t=0$ 开始逆时间求解可达集直至 $t=\tau$ 结束, 此时的可达集不一定收敛, 即 $H(\boldsymbol{x},p)$ 不一定为 0; 而在收敛模式[7] 下, 可达集则是一个收敛的集合, 由 $t=0$ 开始逆时间求解直至 $H(\boldsymbol{x},p)\approx 0$, 此时的逆时间 τ 为收敛时间.

为了保证 Hamilton-Jacobi 方程解的稳定性, 利用 Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) 条件限制偏微分方程求解过程中的时间步长及状态空间划分的网格比. CFL 条件[18] 可由下式表示:

$$\Delta t\sum_{i=1}^{n}\frac{|f_i(x,t)|}{\Delta x}<\lambda \tag{12}$$

式中, $0\le\lambda\le 1$, 通常情况下令 $\lambda=0.9$, n 表示状态空间的维度.

2　机动动作可达集分析

2.1　机动动作

机动动作是指在给定的初始和限制条件下, 按照一定的控制参数变化规律进行的机动动作[19]. 主要用于空战中, 其目的是规避敌方威胁并使我方占据有利态势.

按航迹划分机动动作可以分为铅垂面内的机动动作、水平面内的机动动作及空间机动动作[20]. 铅垂面内的机动动作是指飞机的对称平面始终与飞行速度矢量所在的铅垂平面相重合的动作, 如斤斗、俯冲、跃升等. 水平面内的机动动作着重体现了飞机的方向机动性, 最常见的水平机动是盘旋, 即飞机在水平面内连续转弯不小于 360° 的机动飞行. 空间机动动作也称为横侧向机动, 是同时改变飞行速度、高度和方向的空间特技飞行, 其特点是飞行轨迹不仅在水平面内的投影是弯曲的, 而且还有高度的变化.

在对机动动作的研究中, 我们使用关键点标识整个动作, 关键点是指驾驶员完成机动动作过程中需要进行状态参数判断的关键位置, 驾驶员需要通过一系列操纵使状态参数在关键点达到标准状态参数的要求, 进而完成一个标准机动动作.

2.2　斤斗动作可达集

2.2.1　飞行器动态特性

对机动动作进行研究的过程中, 以典型的纵向机动动作斤斗为例进行分析. 斤斗动作能够发挥飞机的纵向机动性能, 在垂直机动中改变机动方向, 实现在空战中占据主动态势的目的.

在对斤斗动作可达集的研究中, 我们不考虑飞机自身的转动特性, 即假定驾驶员的操纵将直接改变迎角 α, 同时, 由于斤斗动作为纵向机动, 不考虑横侧向通道状态参数的变化. 使用气流坐标系下的质点运动方程描述斤斗动作控制量与状态参数之间的关系. 状态参数包括速度 V、航迹倾角 γ 以及飞

行高度 h, 控制量为迎角 α 及发动机推力 T. 纵向机动中飞机受到重力 G、推力 T、阻力 D、升力 L 的作用. 与式 (1) 对应的斤斗动作三维度质点运动方程可以表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{m}(T\cos\alpha - D - mg\sin\gamma) \\ \dfrac{1}{mV}(T\sin\alpha + L - mg\cos\gamma) \\ V\sin\gamma \end{bmatrix} \tag{13}$$

式 (13) 中以迎角 α 作为控制量, 即认为驾驶员的操纵将直接改变 α. 然而, 在实际的纵向机动动作操纵过程中, 驾驶员首先通过拉杆或推杆操作使副翼发生偏转, 改变飞机的受力, 进而使飞机的状态发生改变, 为了使运动方程与实际的操纵情况更加接近, 使用迎角变化率 $\dot{\alpha}$ 作为控制量, 用符号 c 标识. 得到以下四维度质点运动方程

$$\begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{m}(T\cos\alpha - D - mg\sin\gamma) \\ \dfrac{1}{mV}(T\sin\alpha + L - mg\cos\gamma) \\ V\sin\gamma \\ c \end{bmatrix} \tag{14}$$

2.2.2 斤斗动作阶段划分及目标集

飞行大纲中对于一个标准的斤斗动作有明确的要求, 依据飞行大纲的要求, 使用关键点将斤斗动作前半段划分为三个阶段, 并用航迹倾角 γ 标识各关键点, 大纲中仅对斤斗动作前半段给出了状态的约束, 对后半段并没有具体的要求, 原因在于若斤斗动作在前半段满足状态的约束, 则能够按照训练或空战意图完成一个标准斤斗动作. 斤斗动作阶段的划分如图 2 所示.

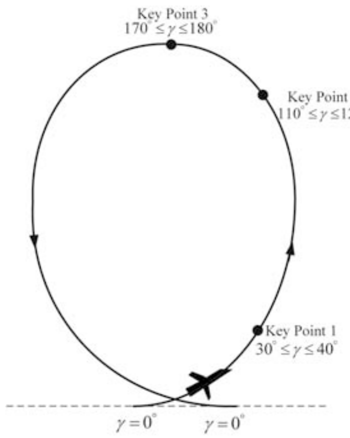


图 2 斤斗动作阶段划分

Fig. 2 The stages division of the loop maneuver

飞行大纲中对标准斤斗动作在各关键点应满足的状态约束有明确的规定, 依据飞行大纲的要求, 斤斗动作三个阶段关键点的标准状态约束由表 1 给出. 四维质点运动方程中迎角 α 为状态参数, 因此, 在关键点加入了对 α 的约束. 这里将斤斗动作三个阶段关键点的状态的约束定义为目标集.

斤斗动作三个阶段的目标集及可达集均要在动作对应的飞行包线范围内, 该飞行包线决定了求解可达集的状态空间的大小. 依据某型飞机技术手册, 斤斗动作的飞行包线以及控制量的取值范围如表 2 所示.

对斤斗动作飞行包线确定的状态空间使用笛卡尔网格进行划分, 笛卡尔网格能够处理具有复杂外形的运动边界问题. 计算过程中由于时间复杂度将随着维度及网格数的增加急剧增长, 同时网格比对计算的速度及精度也有较大影响. 综合考虑各种因素, 结合 CFL 条件, 各维度上网格数及仿真步长如表 3 所示.

2.2.3 斤斗动作可达集

在以上工作的基础之上, 针对各阶段的目标集求解对应的可达集. 斤斗动作过程中不考虑外界扰动的影响, 因此, 结合式 (13) 及式 (14) 得到三维度及四维度运动模型下的 Hamilton 函数 $H(x,p)$ 三维度运动模型下可以表示为

$$\begin{aligned} &H(x,p) = \\ &\quad p_1\frac{T^*\cos\alpha^* - D - mg\sin\gamma}{m} + \\ &\quad p_2\frac{T^*\sin\alpha^* + L - mg\cos\gamma}{mV} + p_3V\sin\gamma \end{aligned} \tag{15}$$

四维度运动模型下 $H(x,p)$ 可以表示为

$$\begin{aligned} &H(x,p) = \\ &\quad p_1\frac{T^*\cos\alpha^* - D - mg\sin\gamma}{m} + \\ &\quad p_2\frac{T^*\sin\alpha^* + L - mg\cos\gamma}{mV} + p_3V\sin\gamma + p_4c^* \end{aligned} \tag{16}$$

式中, p_1, p_2, p_3, p_4 分别为水平集函数 $\phi(x,t)$ 对状态参数 V, γ, h, α 的偏导.

斤斗动作过程中, 发动机推力始终为常值, 当 $0° \le \gamma < 130°$ 时, 发动机推力 $T = T_{\max}$, 当 $130° \le \gamma \le 180°$时, 推力 $T = 0.5T_{\max}$. 因此, 仅需要确定三维质点运动方程条件下最优迎角 α^* 的取值及四维质点运动方程条件下最优迎角变化率 c^* 的取值. 下面对式 (15) 及式 (16) 中的 α^* 及 c^* 进行讨论.

表 1　关键点状态约束条件

Table 1　The range of state variables at the key points

Key points	Three dimensional dynamical model	Four dimensional dynamical model
1	$213\,\mathrm{m/s} \le V \le 231\,\mathrm{m/s}$ $30° \le \gamma \le 40°$ $2\,450\,\mathrm{m} \le h \le 2\,550\,\mathrm{m}$	$213\,\mathrm{m/s} \le V \le 231\,\mathrm{m/s}$ $30° \le \gamma \le 40°$ $2\,450\,\mathrm{m} \le h \le 2\,550\,\mathrm{m}$ $6° \le \alpha \le 10°$
2	$213\,\mathrm{m/s} \le V \le 231\,\mathrm{m/s}$ $110° \le \gamma \le 120°$ $3\,500\,\mathrm{m} \le h \le 3\,700\,\mathrm{m}$	$213\,\mathrm{m/s} \le V \le 231\,\mathrm{m/s}$ $110° \le \gamma \le 120°$ $3\,500\,\mathrm{m} \le h \le 3\,700\,\mathrm{m}$ $10° \le \alpha \le 13°$
3	$110\,\mathrm{m/s} \le V \le 130\,\mathrm{m/s}$ $170° \le \gamma \le 180°$ $3\,900\,\mathrm{m} \le h \le 4\,000\,\mathrm{m}$	$110\,\mathrm{m/s} \le V \le 130\,\mathrm{m/s}$ $170° \le \gamma \le 180°$ $3\,900\,\mathrm{m} \le h \le 4\,000\,\mathrm{m}$ $8° \le \alpha \le 11°$

表 2　斤斗动作飞行包线及控制量的取值范围

Table 2　Aerodynamic envelope and the range of control variables

	Aerodynamic envelope	Control variables
Three dimensional dynamical model	$90\,\mathrm{m/s} \le V \le 240\,\mathrm{m/s}$ $0° \le \gamma \le 180°$ $1\,800\,\mathrm{m} \le h \le 4\,200\,\mathrm{m}$	$-2° \le \alpha \le 21°$
Four dimensional dynamical model	$90\,\mathrm{m/s} \le V \le 240\,\mathrm{m/s}$ $0° \le \gamma \le 180°$ $1\,800\,\mathrm{m} \le h \le 4\,200\,\mathrm{m}$ $-2° \le \alpha \le 21°$	$-0.35 \le c \le 0.35$

表 3　状态空间网格划分

Table 3　Grid division of the state space

Parameters	Speed	Flight path angle	Height	AOA
Range	$90\,\mathrm{m/s} \le V \le 240\,\mathrm{m/s}$	$0° \le \gamma \le 180°$	$1\,800\,\mathrm{m} \le h \le 4\,200\,\mathrm{m}$	$-2° \le \alpha \le 21°$
Grid number	250	180	500	24
Step size	1	1	4.8	1

令 $h(x,p) = p^{\mathrm{T}} f(x,t,u)$, 三维质点运动方程条件下最优迎角 α^* 可通过对 $h(x,p)$ 求偏导得到:

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha} = -\frac{p_1}{m}\left(T\sin\alpha + \frac{\partial D}{\partial \alpha}\right) + \frac{p_2}{mV}\left(T\cos\alpha + \frac{\partial L}{\partial \alpha}\right) \tag{17}$$

通过对式 (17) 的分析, 得到以下定理:

定理 1. 针对式 (13) 表示的三维度质点运动模型, 使 Hamilton-Jacobi 方程取得最大值的迎角 α^* 在不同条件下为

1) 当 $p_1 < 0,\quad p_2 > 0$ 或 $p_1 < 0,\quad p_2 < 0$ 时, $\alpha^* = \alpha_{\max}$ 或 $\alpha^* = \alpha_{\min}$;

2) 当 $p_1 > 0,\quad p_2 > 0$ 且 $\frac{\partial h}{\partial \alpha}|_{\alpha=0} < 0$ 或 $\frac{\partial h}{\partial \alpha}|_{\alpha=\alpha_{\max}} > 0$ 时, $\alpha^* = \alpha_{\min}$;

3) 当 $p_1 > 0,\quad p_2 > 0$ 且 $\frac{\partial h}{\partial \alpha}|_{\alpha=0} \cdot \frac{\partial h}{\partial \alpha}|_{\alpha=\alpha_{\max}} < 0$ 时, $\alpha^* = \alpha$.

定理 1 的具体证明在附录 A 中.

四维质点运动方程条件下的最优迎角变化率 c^*, 可由式 (16) 得到, 为使式 (16) 取得最大值, 最优的迎角变化率为 $c^* = c_{\max}\mathrm{sgn}(p_4)$ 或 $c^* = c_{\min}\mathrm{sgn}(p_4)$.

将最优控制量代入 Hamilton 函数, 进而由式 (16) 求得各阶段的可达集, 状态在可达集范围内则

存在控制量使状态在时间 τ 内满足该阶段关键点标准状态约束. 三维质点运动方程目标集及可达集是一个由 (V,γ,h) 组成的三维状态空间的子集, 对于四维质点运动方程则是一个由 (V,γ,h,α) 组成的四维状态空间子集.

2.3 斤斗动作可行状态空间

斤斗动作三个阶段的目标集与可达集彼此独立, 而机动动作过程是一个连续的过程, 因此, 为了得到标准斤斗动作的边界状态空间, 需要对各阶段进行更细致的划分, 使相邻阶段目标集与可达集之间满足 $G_{n-1}\subset P_\tau(G_n)$. 对于 $P_\tau(G_{n-1})$ 中的状态, 必然存在控制量能够使其进入目标集 G_{n-1}, 对于 $P_\tau(G_n)$ 中的状态也必然存在控制量使其进入 G_n, 而 G_{n-1} 为 $P_\tau(G_n)$ 的子集也就保证了对于 $P_\tau(G_{n-1})$ 中的状态必然存在控制量能够使其进入目标集 G_n. 标准斤斗动作的可行状态空间为各阶段的可达集的并集.

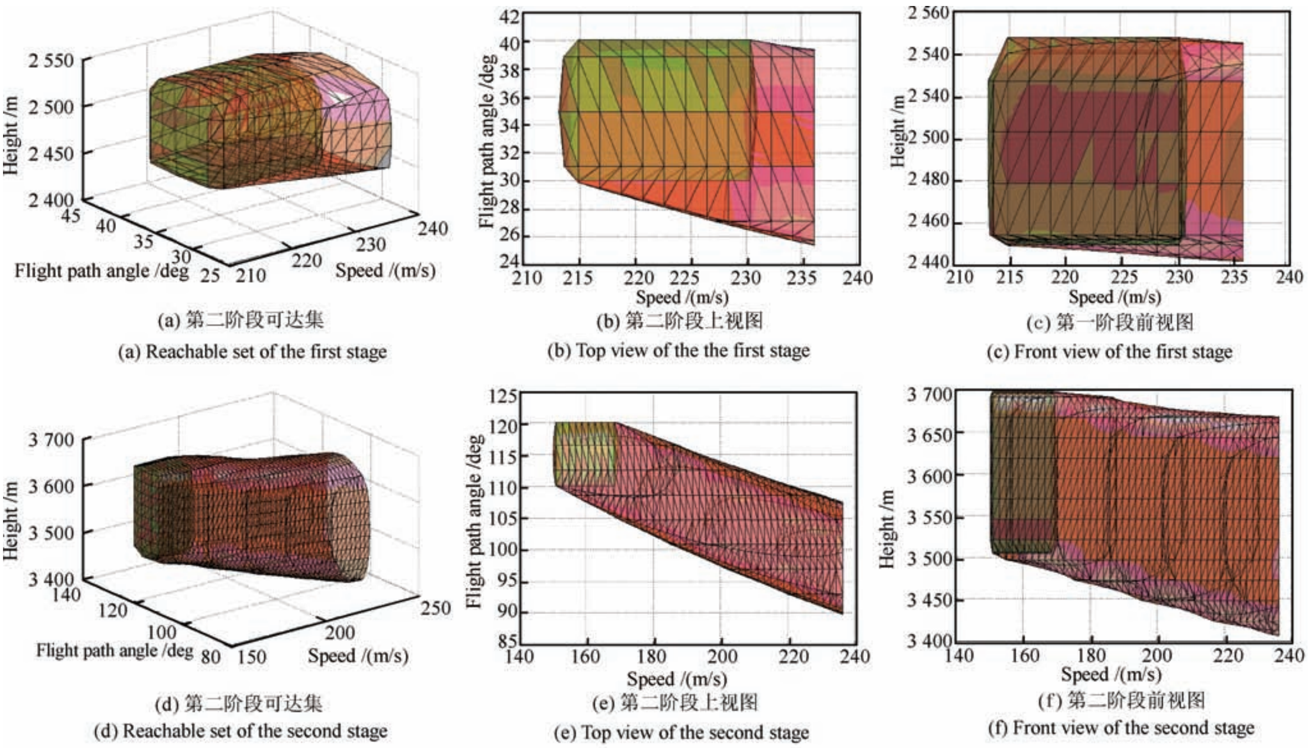
驾驶员在完成机动动作的过程中不可能频繁的改变控制量, 因此, 我们假定控制量在某个阶段是一定的, 不同的机动动作阶段的划分会不同, 应依据飞行大纲及驾驶员的经验具体确定. 对于斤斗动作依据驾驶员的经验以 10° 航迹倾角作为一个阶段, 通过对实际数据的统计得到各阶段的标准状态参数范围作为目标集, 分别求得对应的可达集, 斤斗动作的可行状态空间即由这 18 个阶段可达集的并集组成. 这里需要指出的是, 对于各阶段的逆时间 τ, 通过对实际数据的统计得到, 但这里并不要求各阶段的可达集一定收敛, 因此, 此时的可达集为时间模式下的可达集.

3 仿真实验及分析

以标准斤斗动作为研究对象, 首先, 在三维度质点运动方程条件下, 分析了三个阶段关键点标准状态约束对应的可达集; 之后, 将斤斗动作各阶段进行更细致的划分, 得到相邻阶段的可行状态范围, 该范围的并集构成了标准斤斗动作的可行状态空间; 最后, 分析了四维度质点运动方程条件下, 三个阶段的可达集. 通过以上实验结果的分析, 为驾驶员完成标准斤斗动作及动作偏差的修正提供决策支持.

3.1 三维质点运动方程可达集分析

三维质点运动方程条件下, 以斤斗动作三个阶段关键点标准状态约束作为目标集, 最优迎角 α^* 的取值具体是通过将迎角范围进行离散化, 依次取值并计算对应的可达集, 使可达集达到最大的迎角作为最优迎角, 由此可以看到, 计算可达集的过程实际上是寻找最优控制量使可达集达到最大的过程. 将 α^* 及发动机推力 T 代入 Hamilton-Jacobi 方程求得各阶段的可达集. 各阶段的可达集及其顶视、前视图如图 3 所示. 图 3 中的绿色区域为三个阶段的目标集, 对应于表 1 中三维质点运动方程条件下关键点的状态约束, 红色区域为各阶段的可达集.



(a) 第二阶段可达集
(a) Reachable set of the first stage

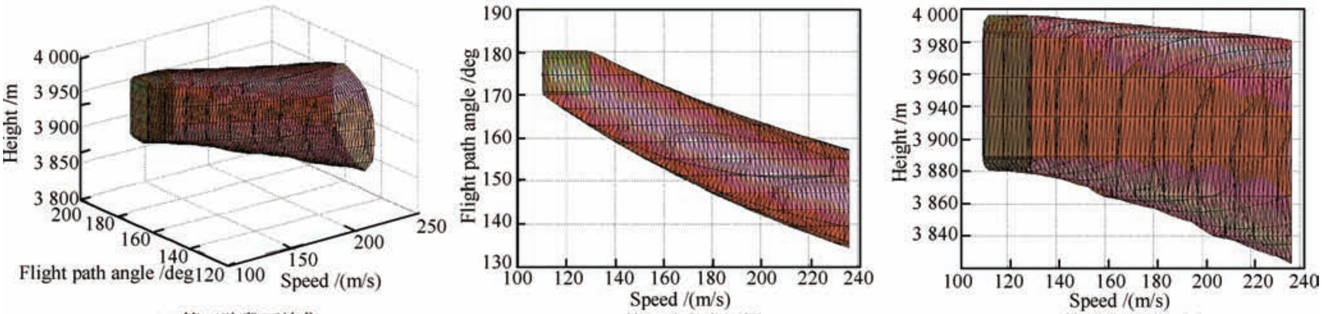
(b) 第二阶段上视图
(b) Top view of the the first stage

(c) 第一阶段前视图
(c) Front view of the first stage

(d) 第二阶段可达集
(d) Reachable set of the second stage

(e) 第二阶段上视图
(e) Top view of the second stage

(f) 第二阶段前视图
(f) Front view of the second stage



(g) 第三阶段可达集
(g) Reachable set of the third stage

(h) 第三阶段上视图
(h) Top view of the third stage

(i) 第三阶段前视图
(i) Front view of the third stage

图 3　三维度可达集顶视图及前视图

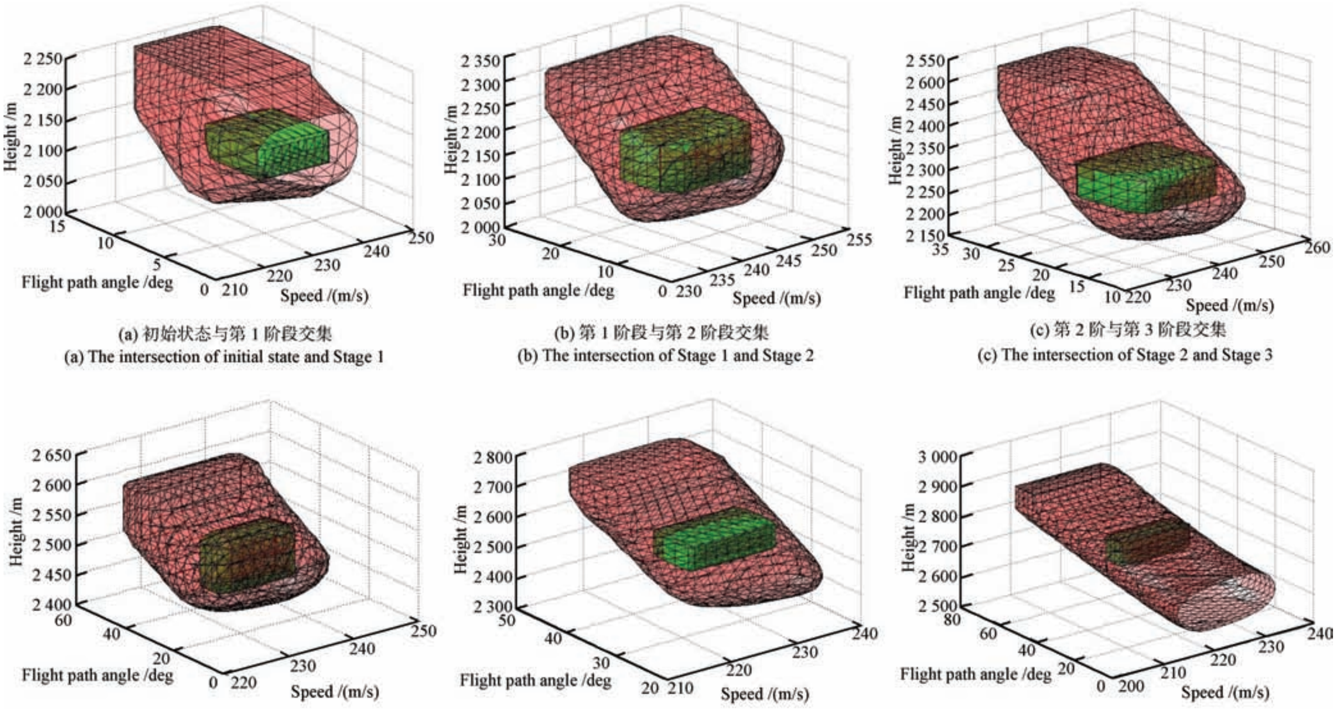
Fig. 3　The three dimensions reachable set of each stage and the corresponded top view and front view

由图 3 中各阶段的顶视图可知, 可达集随着航迹倾角的减小, 对应的速度逐渐增大, 因此当 γ 较小时需要较大的速度保证状态在关键点满足目标集约束; 由图 3 中的正视图可知, 随着高度的减小, 速度逐渐增大, 即在低高度时需要较大的速度, 以保证在关键点满足标准状态约束. 表 4 给出了三个阶段可达集对应的状态参数的范围.

3.2　斤斗动作可行状态空间分析

在三维质点运动方程条件得到斤斗动作可行状态空间. 以 10° 航迹倾角作为一个阶段, 斤斗动作的可行状态空间由 18 个阶段可达集的并集组成. 如图 4 所示, 图 4 中红色区域为可达集, 绿色区域为前一个阶段的目标集. 图 4 (a) 表示第一阶段可达集与初始状态的交集, 其他子图的含义与图 4 (a) 一致, 仅阶段不同.

由图 4 可知, 对于相邻阶段, 前一个阶段的目标集均在后一个阶段的可达集范围内, 即在前一个阶段, 状态满足目标集状态约束, 则必然存在控制量使状态进入下一个阶段的目标集. 另外, 相邻阶段的可达集存在交集, 对于交集中的状态在不同控制量的作用下能够进入不同阶段的目标集, 此时驾驶员可以通过操纵使状态进入任一阶段的目标集,由于可达



(a) 初始状态与第 1 阶段交集
(a) The intersection of initial state and Stage 1

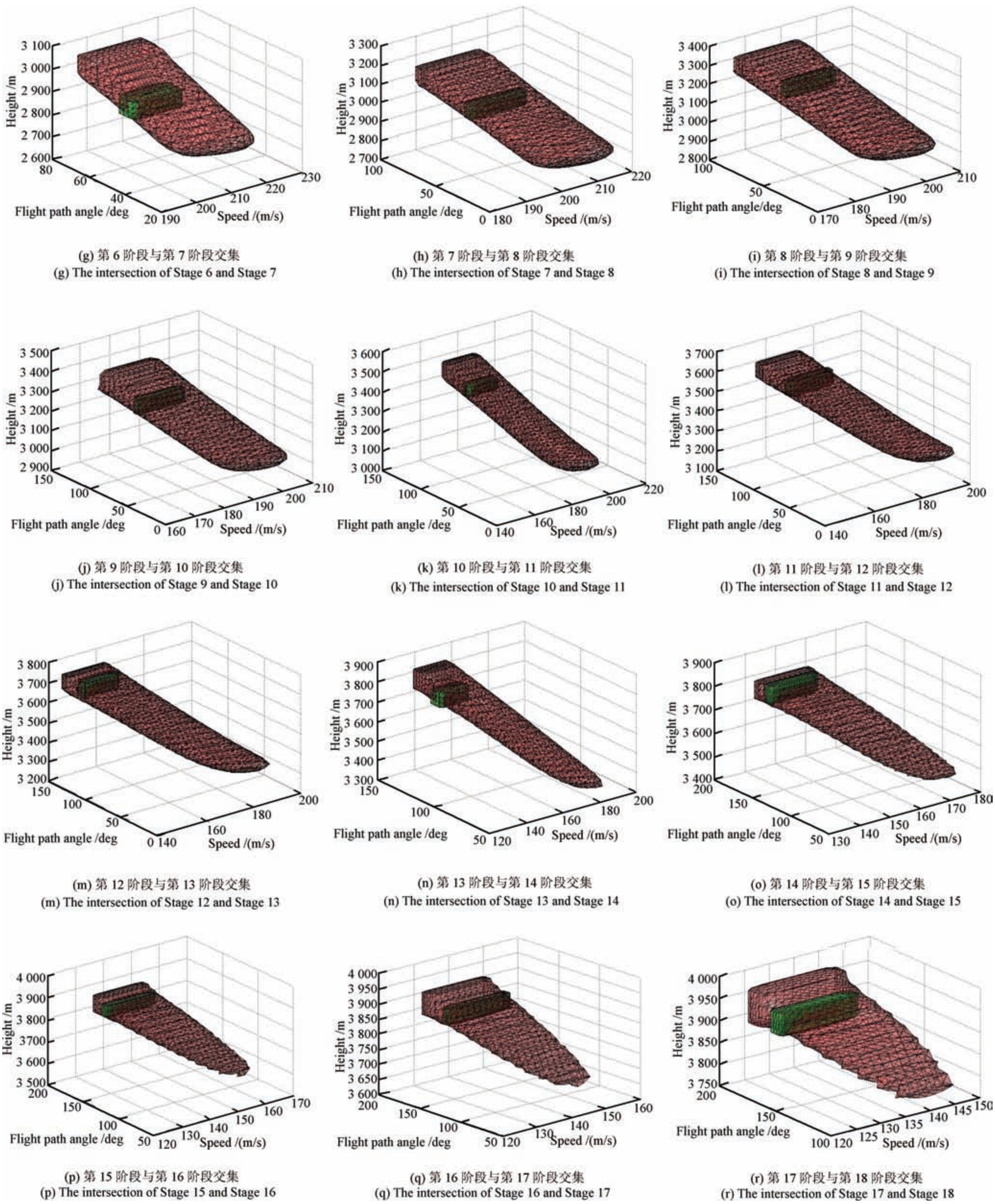
(b) 第 1 阶段与第 2 阶段交集
(b) The intersection of Stage 1 and Stage 2

(c) 第 2 阶与第 3 阶段交集
(c) The intersection of Stage 2 and Stage 3

(d) 第 3 阶段与第 4 阶段交集
(d) The intersection of Stage 3 and Stage 4

(e) 第 4 阶段与第 5 阶段交集
(e) The intersection of Stage 4 and Stage 5

(f) 第 5 阶段与第 6 阶段交集
(f) The intersection of Stage 5 and Stage 6



(g) 第 6 阶段与第 7 阶段交集
(g) The intersection of Stage 6 and Stage 7

(h) 第 7 阶段与第 8 阶段交集
(h) The intersection of Stage 7 and Stage 8

(i) 第 8 阶段与第 9 阶段交集
(i) The intersection of Stage 8 and Stage 9

(j) 第 9 阶段与第 10 阶段交集
(j) The intersection of Stage 9 and Stage 10

(k) 第 10 阶段与第 11 阶段交集
(k) The intersection of Stage 10 and Stage 11

(l) 第 11 阶段与第 12 阶段交集
(l) The intersection of Stage 11 and Stage 12

(m) 第 12 阶段与第 13 阶段交集
(m) The intersection of Stage 12 and Stage 13

(n) 第 13 阶段与第 14 阶段交集
(n) The intersection of Stage 13 and Stage 14

(o) 第 14 阶段与第 15 阶段交集
(o) The intersection of Stage 14 and Stage 15

(p) 第 15 阶段与第 16 阶段交集
(p) The intersection of Stage 15 and Stage 16

(q) 第 16 阶段与第 17 阶段交集
(q) The intersection of Stage 16 and Stage 17

(r) 第 17 阶段与第 18 阶段交集
(r) The intersection of Stage 17 and Stage 18

图 4 斤斗动作各阶段的安全状态空间
Fig. 4 The safe state space of the loop maneuver

表 4　可达集对应的状态参数范围

Table 4　The range of state variables corresponding with the reachable set

Stage	Range of the state parameters
	$213\,\mathrm{m/s} \le V \le 236\,\mathrm{m/s}$
1	$25° \le \gamma \le 40°$
	$2\,440\,\mathrm{m} \le h \le 2\,550\,\mathrm{m}$
	$150\,\mathrm{m/s} \le V \le 235\,\mathrm{m/s}$
2	$90° \le \gamma \le 120°$
	$3\,410\,\mathrm{m} \le h \le 3\,700\,\mathrm{m}$
	$110\,\mathrm{m/s} \le V \le 130\,\mathrm{m/s}$
3	$170° \le \gamma \le 180°$
	$3\,900\,\mathrm{m} \le h \le 4\,000\,\mathrm{m}$

集为边界状态范围, 因此这种情况的出现具备合理性. 由图 4 (a) ~ (n) 可知, 航迹倾角及速度的范围处于增大的趋势, 但对于各子图中的航迹倾角切面, 高度及速度的范围在逐渐减小. 可见, 随着动作的进行可行状态参数的边界范围在增大, 但在某个航迹倾角条件下, 需要驾驶员更为精确的操纵, 以保证状态在边界范围内. 由图 4 (o) ~ (r) 可以看到, 可行状态范围在逐渐减小, 但对于各子图中的航迹倾角切面, 高度、速度的范围在增大, 因此, 在某个航迹倾角条件下驾驶员有更大的操纵余度. 分析图 4 (l) ~ (r) 的可行状态范围, 可见随着航迹倾角的减小, 可行的高度及速度范围也在逐渐减小, 因此, 对于图 4 (l) ~ (r) 对应的各阶段当航迹倾角较小时, 需要驾驶员进行精确的操纵.

3.3　四维质点运动方程可达集分析

为了使运动模型的控制量与驾驶员实际的操纵更为接近, 构建四维度质点运动方程. 四维度质点运动方程条件下, 以迎角变化率 c 作为控制量, 最优迎角变化率 c^* 取边界值, 将 c^* 及 T 代入 Hamilton-Jacobi 方程得到三个阶段的四维度可达集. 为了便于显示, 从迎角维度进行切片, 得到各阶段的三维度目标集与可达集.

图 5 为第一阶段的目标集与可达集, 其中绿色区域为不同迎角下的目标集, 红色区域为可达集. 对应的迎角取值范围为 $\alpha \in [9°, 12°]$. 从图 5 中可以看到第一阶段迎角的变化对可达集的影响并不十分明显, 仅在高度维度略有差别.

第二阶段的目标集与可达集如图 6 所示, 迎角的变化范围 $\alpha \in [13°, 15°]$. 图 6 中可以看到, 不同迎角剖面的可达集范围并没有明显区别. 但对于各子图中的航迹倾角切面, 可达集的范围随着航迹倾角的减小在不断减小, 因此, 对于第二个阶段的初始阶段, 需要驾驶员进行精确操纵以保证状态在可达集范围内.

第三阶段目标集与可达集如图 7 所示, 该阶段迎角的变化范围 $\alpha \in [11°, 13°]$. 不同迎角剖面可达集范围的变化并不明显. 另外, 但对于各子图的高度剖面, 可达集的范围随着高度的降低明显减小, 因此, 在第三阶段的初始阶段, 同样要求驾驶员精确操纵, 保证状态在可达集范围内.

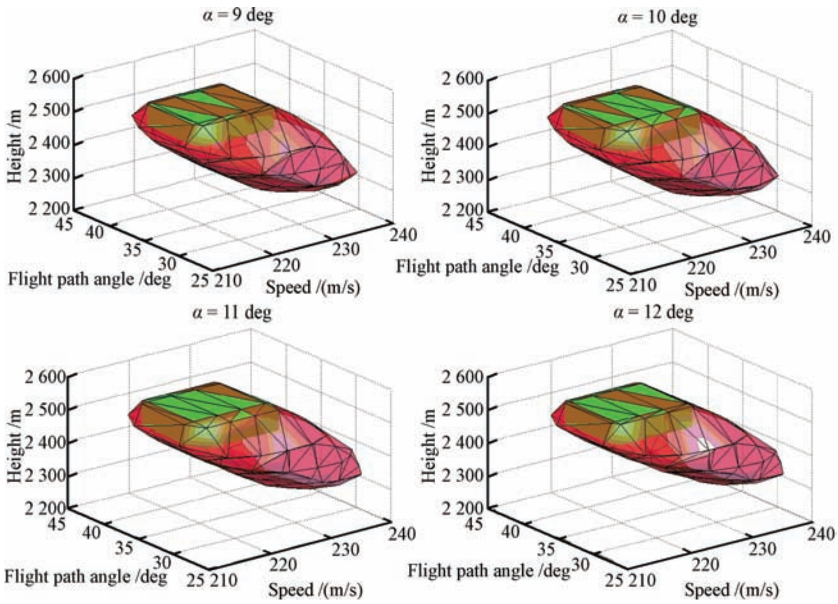


图 5　第一阶段四维度可达集

Fig. 5　The reachable set of the first stage under the condition of four dimension motion equation

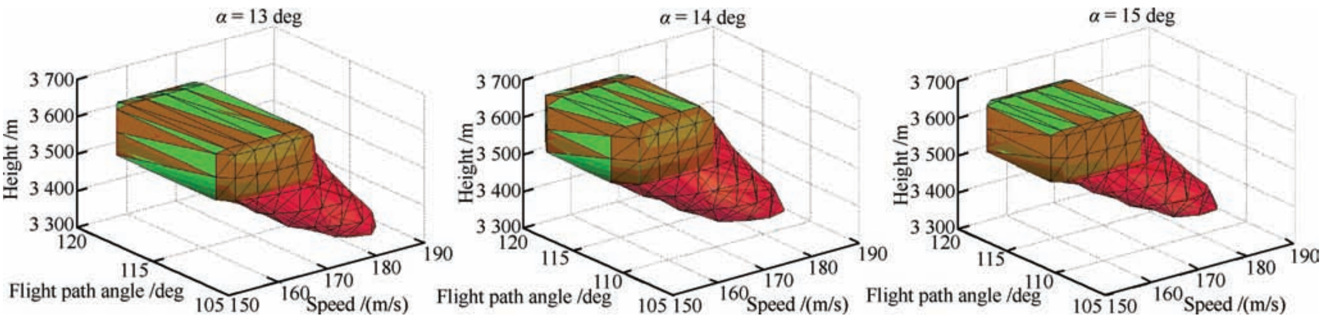


图 6 第二阶段四维度可达集

Fig. 6 The reachable set of the second stage under the condition of four dimension motion equation

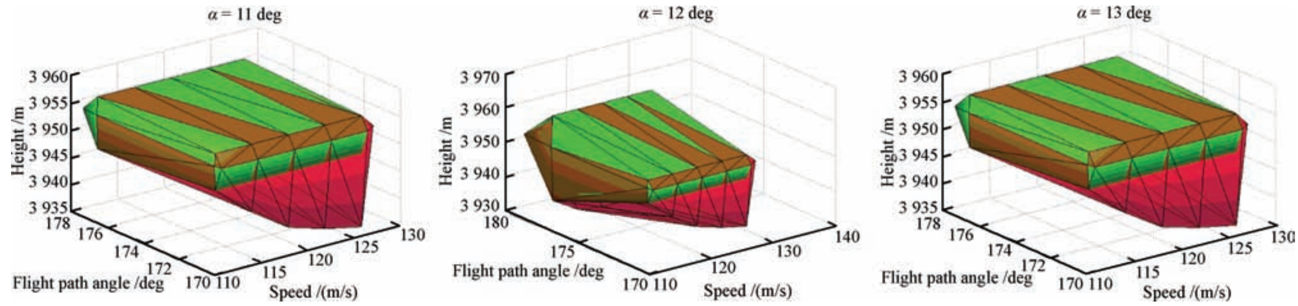


图 7 第三阶段四维度可达集

Fig. 7 The reachable set of the third stage under the condition of four dimension motion equation

4 结论

本文以机动动作为研究对象, 使用可达集分析的方法得到标准机动动作的边界状态范围, 为驾驶员完成标准机动动作提供决策支持. 主要结论如下:

1) 机动动作的可达集是实现标准机动动作的边界状态范围, 同时也是机动动作修正的边界范围, 具体通过求解 Hamilton-Jacobi 方程实现;

2) 基于三维质点运动方程得到斤斗动作三个阶段的可达集及动作的边界状态空间. 边界状态空间确定需要对斤斗动作各阶段进行更细致的划分, 是各阶段可达集的并集;

3) 四维度质点运动方程与驾驶员实际操纵情况更为接近, 以迎角变化率为控制量得到斤斗动作三个阶段的可达集. 驾驶员在完成动作的过程中要关注各阶段边界状态范围的变化, 调整控制量以保证状态在可达集范围内.

附录 A

证明. 对于式 (17)

$\frac{\partial h}{\partial \alpha} = -\frac{p_1}{m}(T\sin\alpha + \frac{\partial D}{\partial \alpha}) + \frac{p_2}{mV}(T\cos\alpha + \frac{\partial L}{\partial \alpha})$ $T\sin\alpha + \frac{\partial D}{\partial \alpha} \geq 0, T\cos\alpha + \frac{\partial L}{\partial \alpha} \geq 0$, 此时

若 $p_1 > 0$, $p_2 < 0$, 则 $\frac{\partial h}{\partial \alpha} \leq 0$, 此时, h 为单调递减函数, 迎角最优值为 $\alpha^* = 0$;

若 $p_1 < 0$, $p_2 < 0$, 则 $\frac{\partial h}{\partial \alpha} \geq 0$, 此时 h 为单调递增函数, 迎角最优值为 $\alpha^* = \alpha_{\max}$;

若 $p_1 < 0$, $p_2 < 0$ 或 $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, 无法判断 $\frac{\partial h}{\partial \alpha}$ 正负情况, 此时需要对二阶导的正负情况进行讨论.

二阶导形式为

$\frac{\partial^2 h}{\partial \alpha^2} = -\frac{p_1}{m}(T\cos\alpha + \frac{\partial^2 D}{\partial \alpha^2}) - \frac{p_2}{mV}(T\sin\alpha + \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2})$

若 $p_1 < 0$, $p_2 < 0$, 则 $\frac{\partial^2 h}{\partial \alpha^2} > 0$, 此时 $h(x,p)$ 不存在局部最大值, 则 $\alpha^* = \alpha_{\max}$ 或 $\alpha^* = 0$;

若 $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, 则 $\frac{\partial^2 h}{\partial \alpha^2} < 0$, $\frac{\partial h}{\partial \alpha}$ 为单调递减函数, 此时

若 $\frac{\partial h}{\partial \alpha}|_{\alpha=0} < 0$, $\alpha^* = 0$;

若 $\frac{\partial h}{\partial \alpha}|_{\alpha=\alpha_{\max}} > 0$, $\alpha^* = 0$;

若 $\frac{\partial h}{\partial \alpha}|_{\alpha=0} \cdot \frac{\partial h}{\partial \alpha}|_{\alpha=\alpha_{\max}} < 0$, 则需要求解 $\frac{\partial h}{\partial \alpha} = 0$. □

References

1 Xu Bang-Nian. *Flight Security Evaluation Generality*. Beijing: Blue Sky Press, 2005. 1−4
(徐邦年. 飞行安全评估概论. 北京: 蓝天出版社, 2005. 1−4)

2 Bekiaris-Liberis N, Bayen A M. Nonlinear stabilization of a viscous Hamilton-Jacobi PDE. In: Proceedings of the 2014 IEEE 53rd Annual Conference on Decision and Control (CDC). Los Angeles, CA: IEEE, 2014. 2858−2863

3 Weekly K, Tinka A, Anderson L, Bayen A M. Autonomous river navigation using the Hamilton-Jacobi framework for underactuated vehicles. *IEEE Transactions on Robotics*, 2014, **30**(5): 1250−1255

4 Gillula J H, Hoffmann G M, Huang H M, Vitus M P, Tomlin C J. Applications of hybrid reachability analysis to robotic aerial vehicles. *The International Journal of Robotics Research*, 2011, **30**(3): 335−354

5 Bayen A M, Mitchell I M, Osihi M K, Tomlin C J. Aircraft autolander safety analysis through optimal control-based reach set computation. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2007, **30**(1): 68−77

6 Van Oort E R, Chu Q P, Mulder J A. Maneuver envelope determination through reachability analysis. *Advances*

in Aerospace Guidance, Navigation and Control. Berlin Heidelberg: Springer, 2011. 91−102

7 Glizer V T, Turetsky V. Increasing pursuer capturability by using hybrid dynamics. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 2015, **25**(1): 77−92

8 Lin Y C, Saripalli S. Collision avoidance for UAVs using reachable sets. In: Proceedings of the 2015 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS). Denver, CO: IEEE, 2015. 226−235

9 Alam A, Gattami A, Johansson K H, Tomlin C J. Guaranteeing safety for heavy duty vehicle platooning: safe set computations and experimental evaluations. *Control Engineering Practice*, 2014, **24**: 33−41

10 Ding J, Sprinkle J, Tomlin C J, Sastry S S, Paunicka J L. Reachability calculations for vehicle safety during manned/unmanned vehicle interaction. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2012, **35**(1): 138−152

11 Datar M, Ketkar V, Mejari M, Gupta A, Singh N, Kazi F. Motion planning for the three wheel mobile robot using the reachable set computation under constraints. In: Proceedings of the 3rd International Conference on Advances in Control and Optimization of Dynamical Systems. Kanpur, India: IFAC, 2014. 787−793

12 Zhang Jun-Ying, Xu Jin, Bao Zheng. Attainability of genetic crossover operator. *Acta Automatica Sinica*, 2002, **28**(1): 120−125
(张军英, 许进, 保铮. 遗传交叉运算的可达性研究. 自动化学报, 2002, **28**(1): 120−125)

13 Wu M, Yan G F, Lin Z Y. Reachability of affine systems on polytopes. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(12): 1528−1533

14 Tomlin C J, Lygeros J, Sastry S S. A game theoretic approach to controller design for hybrid systems. *Proceedings of the IEEE*, 2000, **88**(7): 949−970

15 Mitchell I M. A toolbox of level set methods, Tech. Rep. TR-2004-09, Department of Computer Science, University of British Columbia, Vancouver, BC, Canada, 2004.

16 Jia He-Ming, Zhang Li-Jun, Cheng Xiang-Qin, Bian Xin-Qian, Yan Zhe-Ping, Zhou Jia-Jia. Three-dimensional path following control for an underactuated UUV based on nonlinear iterative sliding mode. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(2): 308−314
(贾鹤鸣, 张利军, 程相勤, 边信黔, 严浙平, 周佳加. 基于非线性迭代滑模的欠驱动 UUV 三维航迹跟踪控制. 自动化学报, 2012, **38**(2): 308−314)

17 Osher S, Fedkiw R. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. New York: Springer, 2003. 25−37

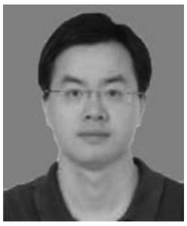
18 Li Zhi-Ping. *Numerical Solution of Partial Differential Equation*. Beijing: Peking University Press, 2010. 94−97
(李治平. 偏微分方程数值解讲义. 北京: 北京大学出版社, 2010. 94−97)

19 Liu Ying, Li Min-Qiang, Zhang Rui-Feng. The optimal trajectory control model of the aircraft maneuver and its operation characteristics. *Control Theory & Applications*, 2014, **31**(5): 566−576
(刘瑛, 李敏强, 张瑞峰. 复杂机动动作最优航迹控制模型及操纵特性分析. 控制理论与应用, 2014, **31**(5): 566−576)

20 Liu Ying, Li Min-Qiang, Chen Fu-Zan. Risk quantitative evaluation model of the aircraft maneuver. *Systems Engineering and Electronics*, 2014, **36**(3): 469−475
(刘瑛, 李敏强, 陈富赞. 飞行器机动动作风险定量评估模型. 系统工程与电子技术, 2014, **36**(3): 469−475)

刘 瑛 北京航空航天大学自动化学院博士后. 2004 年获得空军工程大学学士学位. 2007 年获得空军工程大学硕士学位. 2014 年获得天津大学博士学位. 主要研究方向为飞行安全, 可达集分析, 航迹控制. 本文通信作者
E-mail: liuying204@buaa.edu.cn
(**LIU Ying** Postdoctor at Beihang University. She received her bachelor and master degrees from Air Force Engineering University in 2004 and 2007, respectively. She received her Ph. D. degree in Tianjin University in 2014. Her research interest covers flight safety, reachability analysis, and trajectory control. Corresponding author of this paper.)

杜光勋 北京航空航天大学自动化学院博士后. 2009 年获得北京航空航天大学学士学位. 2015 年获得北京航空航天大学博士学位. 主要研究方向为可靠飞行控制, 飞行安全, 可达集分析.
E-mail: dgx@buaa.edu.cn
(**DU Guang-Xun** Postdoctor at Beihang University. He received his bachelor and Ph. D. degrees from Beihang University in 2009 and 2015, respectively. His research interest covers reliable flight control, flight safety, and reachability analysis.)



全 权 北京航空航天大学自动化学院副教授. 2004 年获得北京航空航天大学学士学位. 2010 年获得北京航空航天大学博士学位. 主要研究方向为视觉导航, 可靠飞行控制.
E-mail: qq_buaa@buaa.edu.cn
(**QUAN Quan** Associate professor at Beihang University. He received his bachelor and Ph. D. degrees from Beihang University in 2004 and 2010, respectively. His research interest covers vision-based navigation and reliable flight control.)

田云川 95949 部队飞行员. 2002 年获得空军航空大学学士学位. 主要研究方向为飞行安全.
E-mail: tianyunchuan@sohu.com
(**TIAN Yun-Chuan** Pilot at the 95949 Army of People′s Liberation Army Air Force. He received his bachelor degree from Aviation University of Air Force in 2002. His main research interest is flight safety.)