

考虑惯性积时多旋翼的可控性分析与度量方法

杜光勋, 全 权

(北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院, 北京 100191)

摘要: 多旋翼飞行器每个旋翼只能提供单一方向的力, 其可控性分析与度量问题有其特殊性。在已有研究的基础上, 研究了多旋翼飞行器在惯性积不可忽略时的可控性分析方法。进一步地, 提出了一种新的多旋翼飞行器可控性度量指标。与文献中已有指标相比, 本文所提的指标不仅具有已有指标的功能, 而且还能够反应飞行器惯性积的改变对其可控度的影响。最后, 仿真结果表明了所给出的可控性分析方法以及可控性度量指标的有效性。

关键词: 多旋翼; 可控性; 可控度; 惯量积

中图分类号: V 275+.1

文献标志码: A

DOI: 10.3969/j.issn.1001-506X.2017.11.19

Controllability analysis and degree of controllability for multicopters considering the product of inertia

DU Guangxun, QUAN Quan

(School of Automation Science and Electrical Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: As each propulsor of a multicopter can only provide unidirectional thrust, the controllability analysis and quantification problem need to be carefully studied. Based on the existing results, this paper studies the controllability analysis method for multicopters when the product of inertia should not be neglected. Besides, a new controllability quantification index is proposed to show the degree of controllability. Compared with the available control authority index (ACAI), the new index proposed can show the effect of product of inertia to the controllability of multicopters whilst the new index performs the same functions as the ACAI. Finally, simulation results show the effectiveness of the proposed controllability analysis method and the new controllability quantification index.

Keywords: multicopter; controllability; degree of controllability; product of inertia

0 引言

近年来, 多旋翼飞行器由于在监控、搜救、航拍等行业的广泛应用而得到大家的普遍关注^[1-4]。除了小型多旋翼外, 大型的、能载人或货物的多旋翼飞行器也开始出现。由于多旋翼简单易用, 且可以垂直起降, 一般来说多旋翼的使用范围与人类居住范围交叉。如果多旋翼(尤其是大型多旋翼)在飞行过程中坠机, 可能会对地面人员的生命安全造成威胁。多旋翼在飞行过程中, 常常遇到风干扰、旋翼系统故障或失效等威胁。另外, 外加负载使得飞行器重心不在中心, 也会对飞行器的飞行安全带来威胁。因此, 很有必要研究多旋翼飞行器在受到这些未知威胁时的安全控制问题^[5]。

已有文献通常研究飞行器在有执行器故障或失效时的容错控制^[6]问题, 读者可以通过综述^[7-8]了解详细情况。近

年来, 也有一些研究开始关注飞行器在有执行器故障或失效时的本质属性问题, 比如可控性(有时也称可重构性)问题^[5, 9-10]。本文在这里所说的可控性, 指的是卡尔曼所提出的状态可控性^[11], 其定义如下: 对于线性时不变系统 $\dot{x} = Ax + Bu$, 其中 $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $u \in \mathbb{R}^m$, 如果对状态空间中任一状态 $x(t_0)$, 存在一个定义在有限时间 $t_1 > t_0$ 上的容许控制 $u(t_0, t_1)$, 能使状态 $x(t_0)$ 转移到零, 则称系统是可控的。如果飞行器在受到旋翼系统故障或失效、外加负载等扰动时本身变得不可控, 那么不论采用何种控制方法都不能够恢复对飞行器的控制。从另一个角度来看, 飞行器可控的程度越高, 系统越容易控制。可控度可以用来度量一个系统可控的程度。

文献中已经有很多可控度的研究成果^[12], 其中文献^[13-14]给出的状态范数可控度得到了学者的关注。

但是状态范数可控度依赖于状态恢复时间和对时间离散化的精细程度。恢复时间越长,离散化越精细,计算状态范数可控度的时间越长,消耗资源越大。为了解决这个问题,文献[5]以多旋翼为对象,研究了其可控性的度量新方法,旨在寻找一种能够在一定程度上反映状态范数可控度的大小,并且不依赖于恢复时间的可控度指标。由于多旋翼飞行器的每个旋翼只能提供单一方向的升力,所以其受到正约束。文献[5]针对多旋翼飞行器给出了一种基于正可控性理论的可控性判定方法,并基于可控度的基本思想定义了一个剩余控制能力指标(available control authority index, ACAI)。当多旋翼飞行器的物理参数等不变时,ACAI 指标越大则系统状态控制能力越大,进而状态范数可控度越大,而且不依赖于恢复时间。但是,文献[5]给出的可控性判定定理假设飞行器的转动惯量阵为对称阵(即假设飞行器中心对称且质量分布均匀,因此转动轴之间的交叉惯性积可忽略),并且给出的 ACAI 指标并没有反应转动惯量等飞行器物理参数变化时系统状态范数可控度的变化。因此,在设计飞行器时如果以 ACAI 指标最大为优化目标去配置旋翼系统的参数会得到不合理的结论(举例说明,飞行器动力系统不变,转动惯量变大,则系统改变状态的能力变弱;然而由于动力系统没变,ACAI 指标不变,这是不合理的)。本文也是基于这个考虑,拟在已有 ACAI 指标的基础上进一步改进,得到一种能够反映飞行器物理参数变化对状态范数可控度影响且不依赖于恢复时间的指标,进而可以基于这个指标进一步研究多旋翼飞行器的构型自动化设计。

本文在文献[5]研究的基础上,针对转动惯量阵为非对角阵(惯性积非零)的多旋翼飞行器进行分析,给出其正可控性判定定理及其证明。在此基础上,进一步将文献[5]中的 ACAI 指标扩展为可以描述飞行器状态可达范围的可控度指标,并且通过对比仿真说明了本文所给出的可控度指标能够反映飞行器转动惯量等物理参数对系统状态范数可控度的影响。

需要说明的是,文献[5]中的主要结果在文献[15-16]中均有涉及。本文所给出的可控性判定方法的证明思路与可控度指标的计算方法虽然与文献[5]相似,但是本文的不同之处在于:①当多旋翼的惯性积不可忽略时,重新推导和证明了多旋翼的可控性判定定理,并在此基础上定义了一个新的可控度指标;②本文给出的可控性指标计算方法并未有特别大的不同,但是其物理意义出现了本质的变化,读者可以在后文中的主要结论中看到,文献[5]给出的 ACAI 指标度量的是多旋翼能够提供控制力和控制力矩的能力,而本文所给出的指标可以用来度量多旋翼状态加速的能力;③为了进一步说明两种结果的不同,本文在仿真中对这两种指标进行了比较分析。本文的主要贡献如下:①针对转动惯量阵为非对角阵的多旋翼飞行器,给出其可控性判定定理;②针对转动惯量阵为非对角阵的多旋翼飞行器,给出一种可控度指标用来度量飞行器可控的程度。

1 问题描述

1.1 多旋翼建模

多旋翼有很多种类型,比如四旋翼、六旋翼、八旋翼等,本文的研究适用于大多数类型的多旋翼,因此后面给出理论是并不特指某一种多旋翼。一般情况下,多旋翼在悬停时其气动阻尼、陀螺力矩等可以忽略,其控制量为 n_p 个旋翼提供的升力 $f = [f_1, \dots, f_{n_p}]^T$,通过改变不同旋翼的升力来改变总升力 u_i 和三轴控制力矩 τ_x, τ_y, τ_z ,进而实现飞行器的姿态控制和高度控制。由于多旋翼飞行器的动力系统响应一般很快,本文假设其动态特性可以忽略。根据文献[16],多旋翼飞行器的非线性刚体运动方程表示为

$$\begin{cases} \dot{p} = v \\ m_a \dot{v} = m_a g e_3 - u_i R_3 \\ \dot{\Theta} = W \cdot \omega \\ J \dot{\omega} = -\omega \times J \omega + G_a + u_\tau \end{cases} \quad (1)$$

式中,飞行器的质量为 m_a ;重力加速度为 g ; $p = [x \ y \ h]^T$, $v = [v_x \ v_y \ v_h]^T$ 分别为飞行器在惯性坐标系(与地球固联的参考坐标系)中的位置和速度, x, y 为水平方向的位置, v_x, v_y 为水平方向的速度, h 和 v_h 为飞行器的高度和高度方向的速度; $\Theta = [\phi \ \theta \ \psi]^T$ 为姿态向量, ϕ, θ, ψ 分别为飞行器的滚转角、俯仰角和偏航角; $\omega = [p \ q \ r]^T$ 为角速度向量, p, q, r 分别为三轴角速度; $J \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ 为飞行器的机体转动惯量阵,并不一定是对角阵,因此转动惯量阵^[17]应该表示为

$$J = \begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中, J_x, J_y, J_z 分别为飞行器在滚转、俯仰和偏航 3 个通道上的转动惯量; J 中的其他元素为惯量积。矩阵 $W \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ 表示机体角速度 ω 与姿态角向量变化率 $\dot{\Theta}$ 之间的关系,其表达式为

$$W = \begin{bmatrix} 1 & \tan \theta \sin \phi & \tan \theta \cos \phi \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi / \cos \theta & \cos \phi / \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中,陀螺力矩用 G_a 表示。 $R_3 \in \mathbf{R}^{3 \times 1}$ 为与飞行器姿态角相关的矩阵,其表达式为

$$R_3 = \begin{bmatrix} \sin \psi \sin \phi + \cos \psi \sin \theta \cos \phi \\ -\cos \psi \sin \phi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi \\ \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (4)$$

非线性系统的可控性分析比较复杂,其可控性度量问题一直是研究领域的难点,而线性系统的可控性分析已经有了非常简单成熟的方法。为了分析飞行器的可控性,本文将飞行器非线性系统方程(1)进行简化。假设飞行器状态在悬停状态的邻域内,则满足如下小角度假设以及总升力假设

$$\begin{aligned} \sin \phi &\approx \phi, \cos \phi \approx 1, \sin \theta \approx \theta, \\ \cos \theta &\approx 1, u_i \approx m_a g \end{aligned} \quad (5)$$

此时, $W \approx I_3$, 并且矩阵 R_{e_3} 变为

$$R_{e_3} \approx \begin{bmatrix} \phi \sin \psi + \theta \cos \psi \\ -\phi \cos \psi + \theta \sin \psi \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

进一步, 假设飞行器处于悬停状态下, 则可以忽略掉 $-\omega \times J\omega + G_a$ 的影响, 因此非线性系统方程(1)可以简化为

$$\begin{cases} \dot{p}_i = v_i \\ m_a \dot{v}_i = -m_a g A \psi \Theta_i \\ \dot{h} = v_h \\ m_a \dot{v}_h = m_a g - u_i \\ \dot{\Theta} = \omega \\ J \dot{\omega} = u_r \end{cases} \quad (7)$$

式中, $p_i = [x \ y]^T$, $v_i = [v_x \ v_y]^T$ 表示飞行器水平位置和水平方向速度; $\Theta_i = [\phi \ \theta]^T$; 矩阵 $A\psi$ 的表达式为

$$A\psi = \begin{bmatrix} \sin \psi & \cos \psi \\ -\cos \psi & \sin \psi \end{bmatrix} \quad (8)$$

从简化后的系统方程(7)可以看出, 水平位置 p_i 和水平速度 v_i 主要通过改变滚转角和俯仰角来控制, 而高度状态 h, v_h 、姿态变量 Θ, ω 由旋翼提供的总升力和三轴力矩控制。因此, 分析可控性时可以不考虑水平位置和水平速度, 进而飞行器悬停姿态模型可以简化为

$$\dot{x} = Ax + B(u_f - g) \quad (9)$$

式中, $x \in \mathbb{R}^8$ 为状态向量; $A \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$, $B \in \mathbb{R}^{8 \times 4}$ 为实数矩阵; $g \in \mathbb{R}^4$ 为飞行器的重力加速度向量; $u_f \in \mathbb{R}^4$ 为总的控制力和力矩向量。且

$$\begin{cases} x = [h \ \phi \ \theta \ \psi \ v_h \ p \ q \ r]^T \in \mathbb{R}^8 \\ u_f = [u_i \ \tau_x \ \tau_y \ \tau_z]^T \in \mathbb{R}^4 \\ g = [m_a g \ 0 \ 0 \ 0]^T \in \mathbb{R}^4 \\ A = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 4} & I_4 \\ 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 4} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8 \times 8} \\ B = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 4} \\ J_f^{-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8 \times 4} \\ J_f = \begin{bmatrix} -m_a & 0_{1 \times 3} \\ 0_{3 \times 1} & J \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \end{cases} \quad (10)$$

由于多旋翼飞行器的直接控制量是 f , 力和力矩向量 u_f 的表达式为

$$u_f = H(\eta_1, \dots, \eta_{n_p}) f \quad (11)$$

式中, H 为与 n_p 个旋翼的效率系数 $\eta_1, \dots, \eta_{n_p}$ 相关的控制效率矩阵(具体参考文献[5]), 如果 $\eta_i = 0$ 表示 1 号电机失效, 如果 $\eta_i = 0.5$ 表示 1 号电机效率降低为 50%, 如果 $\eta_i = 1$ 表示 1 号电机健康。假设每个旋翼能够提供的最大升力为 K_i , 即 $f_i \in [0, K_i], i=1, \dots, n_p$, 则控制量 f 所受的约束其表达式为

$$f \in U_f = \{f \mid f_i \in [0, K_i], i=1, \dots, n_p\} \quad (12)$$

因此, u_f 所受的约束 Ω 为

$$\Omega = \{u_f \mid u_f = Hf, f \in U_f\} \subset \mathbb{R}^4 \quad (13)$$

从而, 控制量 $u = u_f - g$ 所受的约束 U 为

$$U = \{u \mid u = u_f - g, u_f \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^4 \quad (14)$$

1.2 准备知识

根据文献[5]的研究结果, 当 J 为对角阵, 即 $J = \text{diag}(J_x, J_y, J_z) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 时, 有以下结论。

定理 1 多旋翼系统(9)可控的充要条件是:

(1) $\text{rank } C(A, B) = 8$, 其中

$$C(A, B) = [B \ AB \ \dots \ A^7 B] \quad (15)$$

(2) 不存在 A^T 的实特征向量 v 使得 $v^T B u \leq 0$ 对所有的 $u \in U$ 成立。

为了验证定理 1 中的条件(2), 文献[5]定义了下列指标:

$$\rho(\alpha, \partial\Omega) \triangleq \begin{cases} \min\{\|\alpha - \beta\| : \alpha \in \Omega, \beta \in \partial\Omega\} \\ -\min\{\|\alpha - \beta\| : \alpha \in \Omega^c, \beta \in \partial\Omega\} \end{cases} \quad (16)$$

式中, $\partial\Omega$ 是集合 Ω 的边界, 而 Ω^c 是集合 Ω 的补集。如果 $\rho(\alpha, \partial\Omega) \leq 0$, 那么 $\alpha \in \Omega^c \cup \partial\Omega$, 表明 α 不是 Ω 的一个内点。反之, 则 α 是 Ω 的一个内点。根据式(16), 对于系统(9)来说, 重力向量 g 通常是确定的。如果当前系统的控制能力能够使得 g 是 Ω 的内点(直观的说, 就是系统控制量能够在补偿重力后还有一定的余量), 则定义一个指标

$$\rho(g, \partial\Omega) = \min\{\|g - u_f\|, u_f \in \partial\Omega\} \quad (17)$$

并且 $\rho(g, \partial\Omega)$ 可以看作是控制量可达集 Ω 内部以 g 为球心的最大内接球的半径。假设 Ω 为图 1 所示的二维不规则图形, g 为 Ω 内一点。如图 1 所示, $\rho(g, \partial\Omega)$ 为二维不规则图形内以 g 为中心的最小内接圆的半径。在实际中, $\rho(g, \partial\Omega)$ 是系统能够在所有方向产生的拉力/力矩的最大值, 即飞行器通过改变旋翼的升力来产生飞行器总升力 u_i 和三轴控制力矩 τ_x, τ_y, τ_z 时, 系统在升力方向或三轴控制力矩方向上都可以产生的至少为 $\rho(g, \partial\Omega)$ 的最大作用力(或力矩)。因此, 它是保证多旋翼系统在有旋翼系统故障/失效时的可控性的一个重要指标。因此, 指标 $\rho(g, \partial\Omega)$ 可以看作系统(9)的剩余控制能力指标(即 ACAI)。

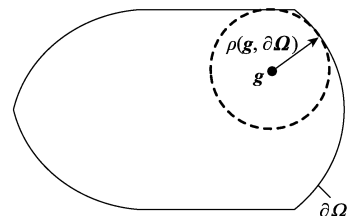


图 1 点 g 距离集合 Ω 边界的距离

Fig. 1 Distance from g to the boundary of Ω

引理 1 对系统(9)来说, 下列 3 个命题等价:

(1) 不存在 A^T 的实特征向量 v 使得 $v^T B u \leq 0$ 对所有的 $u \in U$ 成立或者使得 $v^T B(u_f - g) \leq 0$ 对所有的 $u_f \in \Omega$ 成立;

(2) g 是 Ω 的内点；

(3) $\rho(g, \partial\Omega) > 0$ 。

定理 2 系统(9)可控的充要条件是 $\rho(g, \partial\Omega) > 0$ 。

本文将在以上结果的基础上,进一步研究多旋翼飞行器的可控性问题。

1.3 本文的目标

由于文献[5]在证明引理 1 时依赖假设条件: $J = \text{diag}(J_x, J_y, J_z) \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ 。当该假设条件不成立时,前面给出的基础知识不一定适用,需要重新证明和推导,才能保证其正确性和适用性。因此,本文的主要目标是研究 J 不一定是对角阵时系统(9)的可控性判定理论及其可控性的量化度量方法。

2 主要结果及其证明

为了研究 J 不一定是对角阵时系统(9)的可控性问题,本文将系统(9)改写为

$$\dot{x} = Ax + B_0(J_f^{-1}u_f - J_f^{-1}g) \quad (18)$$

其中

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0_{1 \times 4} \\ I_4 \end{bmatrix} \quad (19)$$

令 $u_f' = J_f^{-1}u_f, g_f = J_f^{-1}g, u_f = J_f^{-1}u_f - J_f^{-1}g$, 则 u_f' 受到如下约束:

$$\Omega_f = \{u_f' \mid u_f' = J_f^{-1}Hf, f \in U_f\} \subset \mathbf{R}^4 \quad (20)$$

u_f 受到如下约束:

$$U_f = \{u_f \mid u_f = J_f^{-1}u_f - J_f^{-1}g, u_f \in \Omega\} \subset \mathbf{R}^4 \quad (21)$$

2.1 可控性判定

根据文献[5]的内容,为了让本文自包含,首先引入下列引理。

引理 2 如果集合 Ω 是集合 \mathbf{R}^4 中的一个非空凸集合, u_0 不是集合 Ω_f 的一个内点,那么存在非零向量 k 使得 $k^T(u - u_0) \leq 0$ 对任意的 $u \in \text{cl}(\Omega)$ 都成立,其中 $\text{cl}(\Omega)$ 是集合 Ω 的闭包^[18]。

由于文献[5]只有在证明引理 1 的条件(1) \Rightarrow 条件(2)时用到了 $J = \text{diag}(J_x, J_y, J_z) \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$, 所以定理 1 不依赖于 J 为对角阵的假设。可以直接给出下列结论。

引理 3 对系统(18)来说,下列 3 个条件等价:

(1) 不存在 A^T 的实特征向量 v 使得 $v^T B_0 u_f \leq 0$ 对所有的 $u_f \in U_f$ 成立或者使得 $v^T B_0 (u_f' - g_f) \leq 0$ 对所有的 $u_f' \in \Omega_f$ 成立;

(2) g_f 是 Ω_f 的内点;

(3) $\rho(g_f, \partial\Omega_f) > 0$ 。

此引理的证明可以通过以下步骤形成(这里的证明参考了文献[5]的证明思路):

步骤 1 首先,证明条件(1) \Rightarrow 条件(2)。这里,采用反证法,即假设 g_f 不是集合 Ω_f 的一个内点。由于矩阵 A 的简单形式,很容易可以知道矩阵 A^T 的特征值全为 0。通过求解线性方程 $A^T v = 0$, 矩阵 A^T 的所有特征向量可以由下式表示:

$$v = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]^T \quad (22)$$

式中, $v \neq 0, k = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]^T \in \mathbf{R}^4$, 并且 $k \neq 0$ 。所以可得

$$v^T B_0 u_f = k^T u_f = k^T J_f^{-1} u \quad (23)$$

根据引理 2, 如果 g_f 不是集合 Ω_f 的一个内点, 则 $u_f = 0$ 不是集合 U_f 的一个内点。所以, 存在一个非零向量 $k_u = [k_{u1} \ k_{u2} \ k_{u3} \ k_{u4}]^T$ 使得下列不等式:

$$k_u^T u_f = k_u^T J_f^{-1} u \leq 0 \quad (24)$$

对所有的 $u_f \in U_f$ 成立, 即对所有的 $u \in U$ 成立。令

$$k = k_u \quad (25)$$

则根据式(10)、式(22)~式(24), 则

$$v^T B u = k^T J_f^{-1} u = k_u^T J_f^{-1} u \leq 0 \quad (26)$$

对所有的 $u \in U$ 成立, 这与定理 1 矛盾。所以, 条件(1) \Rightarrow 条件(2)得证。

步骤 2 其次, 证明条件(2) \Rightarrow 条件(1)。式(22)给出了矩阵 A^T 的所有特征向量。因此, 根据式(18)和式(22), 则有

$$v^T B_0 u_f = k^T u_f \quad (27)$$

式中, $k \neq 0$ 。因此, 下列两个命题是等价的:

(1) 不存在方程(22)所示的非零的 $v \in \mathbf{R}^8$, 使得 $v^T B_0 u_f \leq 0$ 对所有的 $u_f \in U_f$ 成立;

(2) 不存在非零向量 $k \in \mathbf{R}^4$ 使得 $k^T u_f \leq 0$ 对所有的 $u_f \in U_f$ 成立。

如果条件(2)成立, 那么 $u_f = 0$ 是集合 U_f 的内点, 因此集合 U_f 中存在一个围绕点 $u_f = 0$ 的邻域 $\mathcal{B}(0, u_r)$, 其中 $u_r > 0$ 是一个很小的常数。这里将采用反证法来证明。假设条件(1)不成立, 那么存在一个非零向量 $k \neq 0$ 使得 $k^T u_f \leq 0$ 对所有的 $u_f \in U_f$ 成立。不失一般性, 假设 $k = [k_1 \ * \ * \ *]^T$, 其中 $k_1 \neq 0, *$ 表示任意实数。令 $u_1 = [\epsilon \ 0 \ 0 \ 0]^T, u_2 = [-\epsilon \ 0 \ 0 \ 0]^T$, 其中 $\epsilon > 0$ 。如果 $\epsilon > 0$ 足够小, 那么 $u_1, u_2 \in \mathcal{B}(0, u_r)$ 。由于 $k^T u_f \leq 0$ 对所有的 $u_f \in \mathcal{B}(0, u_r)$ 成立, 所以有 $k^T u_1 \leq 0, k^T u_2 \leq 0$ 。根据方程(10)和(18), 则有

$$-k_1 \epsilon \leq 0, k_1 \epsilon \leq 0 \quad (28)$$

根据式(28), 可以推导出 $k_1 = 0$, 这与 $k_1 \neq 0$ 矛盾, 因此条件(1)成立。

步骤 3 最后, 证明条件(2) \Leftrightarrow 条件(3): 根据 $\rho(g_f, \partial\Omega_f)$ 的定义, 如果 $\rho(g_f, \partial\Omega_f) \leq 0$, 那么 g_f 不是集合 Ω_f 的内点; 如果 $\rho(g_f, \partial\Omega_f) > 0$, 则 g_f 是集合 Ω_f 的内点。

由于转动惯量阵 J_f 是非奇异的, 所以引理 3 中的 3 个条件与引理 1 中的 3 个条件实际上是一致的。但是, 引理 3 的描述能够为后文提出新的可控度指标做铺垫, 且引理 3 能够将 J_f 的变化对系统可控度的影响考虑进去, 更贴合实际应用需要。

在定理 1 和引理 3 的基础上, 可以直接得到下列结论。

定理 3 系统(18)可控的充要条件是 $\rho(g_f, \partial\Omega_f) > 0$ 。

证明 根据文献[5], 由于 A, B_0 矩阵的简单形式, 系统(18)满足定理 1 中的条件(1)。而由引理 3, 定理 1 中的条件(2)等价于引理 3 中的条件(3)。因此, 系统(18)可控的充要条

件是 $\rho(\mathbf{g}_j, \partial\Omega_j) > 0$ 。 证毕

2.2 可度定义及其计算

根据定理 3, 系统(18)是否可控与指标 $\rho(\mathbf{g}_j, \partial\Omega_j)$ 是否大于 0 等价。因此, 可以直观地将 $\rho(\mathbf{g}_j, \partial\Omega_j)$ 看作系统(18)的可控度指标

定义 1 系统(18)的可控度定义为 $\rho(\mathbf{g}_j, \partial\Omega_j)$ 。

显然, $\rho(\mathbf{g}_j, \partial\Omega_j)$ 越大, \mathbf{g}_j 距离 Ω_j 的边界越远, 可以认为系统的可控程度越高。反之, 则认为系统可控的程度越低。如果 $\rho(\mathbf{g}_j, \partial\Omega_j) = 0$, 则系统不可控。根据定义(16)以及系统模型(18), 可以发现 $\rho(\mathbf{g}_j, \partial\Omega_j)$ 实际上是系统状态导数 $\dot{v}_0, \dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$ 可以到达的集合的边界到原点的最小距离, 可以用来表征系统状态能够“加速”的能力, 其数值表示飞行器通过改变旋翼升力来控制系统状态时, 在高度方向或三轴姿态方向上都可以产生至少为 $\rho(\mathbf{g}_j, \partial\Omega_j)$ 的最大加速度(或角加速度), 与状态范数可控度更贴近。

由于 $\rho(\mathbf{g}_j, \partial\Omega_j)$ 与 $\rho(\mathbf{g}, \partial\Omega)$ 相比只是在 \mathbf{g} 和 Ω 的基础上基于矩阵 \mathbf{J}_f 进行了线性变换, 且 \mathbf{J}_f 非奇异, 所以 $\rho(\mathbf{g}_j, \partial\Omega_j)$ 的计算方法与 $\rho(\mathbf{g}, \partial\Omega)$ 相似。鉴于此, 本文不再给出 $\rho(\mathbf{g}_j, \partial\Omega_j)$ 计算方法的详细推导过程, 而是根据文献[5]直接给出 $\rho(\mathbf{g}_j, \partial\Omega_j)$ 的计算方法如下:

定理 4 令 $\mathbf{B}_j = \mathbf{J}_f^{-1} \mathbf{H}$, 如果 $\text{rank}(\mathbf{B}_j) = 4$, 那么指标 $\rho(\mathbf{g}_j, \partial\Omega_j)$ 可以由下式给出

$$\rho(\mathbf{g}_j, \partial\Omega_j) = \min(d_1, d_2, \dots, d_{s_m}) \quad (29)$$

如果 $\text{rank}(\mathbf{B}_{1,j}) < 3$, 则 $d_j = +\infty, j = 1, \dots, s_m$; 而如果 $\text{rank}(\mathbf{B}_{1,j}) = 3$, 则

$$d_j = \frac{1}{2} \text{sign}(\xi_j^T \mathbf{B}_{2,j}) \mathbf{A}_j (\xi_j^T \mathbf{B}_{2,j})^T - |\xi_j^T (\mathbf{u}_{j_c} - \mathbf{g}_j)| \quad (30)$$

$j = 1, \dots, s_m$

式中, \mathbf{u}_{j_c} 为约束集 Ω_j 的中心点; 向量 $\xi_j \in \mathbf{R}^4$ 满足

$$\xi_j^T \mathbf{B}_{1,j} = 0, \|\xi_j\| = 1 \quad (31)$$

式中, 矩阵 $\mathbf{B}_{1,j} \in \mathbf{R}^{1 \times 3}$ 由矩阵 \mathbf{B}_j 的任意三列组成, 而矩阵 $\mathbf{B}_{2,j} \in \mathbf{R}^{3 \times (n_p - 3)}$ 为矩阵 \mathbf{B}_j 中去除 $\mathbf{B}_{1,j}$ 剩下的 $n_p - 3$ 列组成。矩阵 $\mathbf{B}_{1,j}$ 和 $\mathbf{B}_{2,j}$ 的组合一共有 s_m 种, 且

$$s_m = \frac{n_p!}{(n_p - 3)! 3!} \quad (32)$$

由于指标 $\rho(\mathbf{g}_j, \partial\Omega_j)$ 与定理 2 中指标 $\rho(\mathbf{g}, \partial\Omega)$ 的相似性, 读者可以参考文献[19]给出的 $\rho(\mathbf{g}, \partial\Omega)$ 的计算工具箱, 工具箱稍作修改即可用来计算 $\rho(\mathbf{g}_j, \partial\Omega_j)$ 。

2.3 应用分析

可控度在实际工程中可以用在飞行器设计、控制以及性能评估问题中, 文献中已有不少研究^[12, 20]。如果只是用可控度来判断系统的可控性, 则已有的研究基本都能满足要求。但是基于可控度来进行飞行器的构型设计^[21-22]时, 就需要考虑飞行器惯量积等物理参数变化对可控度的影响。举例说明, 如图 2 所示的复合六旋翼飞行器, 由中间 2 个共轴双旋翼以及周围 4 个单旋翼共同控制。但是, 在实际构型设计中会需要分析共轴旋翼与 4 个单旋翼不同配置对系统控制能力的影响, 如果周围的旋翼系统重量

变大, 机体转动惯量等物理参数会相应改变。在这种情况下, 就需要一种能够反映这些物理参数对系统控制能力影响的指标来优化构型设计。状态范数可控度可以用来进行构型设计优化, 但是它依赖恢复时间, 且随着离散点划分精细程度, 其计算量会急剧增大。本文给出的新的可控度指标 $\rho(\mathbf{g}_j, \partial\Omega_j)$ 正是应此需要而提出, 既可以反应转动惯量等物理参数对系统可控度的影响, 又不依赖于恢复时间。



图 2 复合六旋翼飞行器

Fig. 2 A compound hexacopter

3 仿真结果

为了验证本文所提的可控度指标 $\rho(\mathbf{g}_j, \partial\Omega_j)$ 的有效性以及与文献[5]中所提的 ACAI 指标相比 $\rho(\mathbf{g}_j, \partial\Omega_j)$ 的优势, 论文在本部分将分别利用这两个指标(后文中用 ACAI-1 代指 $\rho(\mathbf{g}, \partial\Omega)$, 用 ACAI-2 代指 $\rho(\mathbf{g}_j, \partial\Omega_j)$)来分析一类常见的六旋翼飞行器(PNPNPN 构型, 如图 3 所示, 轴与轴之间的夹角为 $\pi/3$)的可控性。飞行器物理参数如表 1 所示。

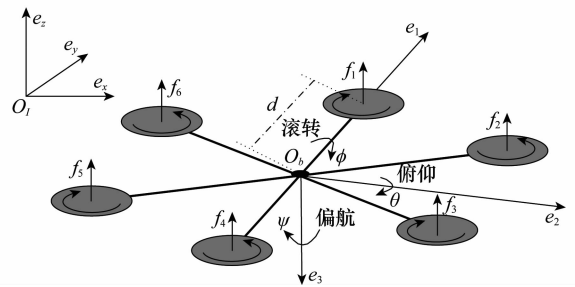


图 3 PNPNPN 构型六旋翼飞行器

Fig. 3 PNPNPN hexacopter

表 1 PNPNPN 六旋翼物理参数

Table 1 Physical parameters for the PNPNPN hexacopter

参数	数值	单位
m_a	1.535	kg
g	9.80	m/s ²
$r_i, i=1, \dots, 6$	0.275	m
$K_i, i=1, \dots, 6$	6.125	N
J_x	0.041 1	kg · m ²
J_y	0.047 8	kg · m ²
J_z	0.059 9	kg · m ²
k_μ	0.1	—

下面分别对两种情况进行仿真：

(1) 飞行器旋翼无故障以及 1 号旋翼效率降低为无故障时的 80%、60%、40%、20%、0% (即完全失效) 时, 分别利用 ACAI-1 和 ACAI-2 来验证飞行器的可控性。如果 ACAI-2 有效, 则其可控性验证结果应该与 ACAI-1 一致, 唯一的区别在于指标值大小不同。

(2) 将特定质量的负载 (假设其体积可以忽略, 看作质量元) 放到飞行器的不同位置处, 计算并分析 ACAI-1 和 ACAI-2 的变化情况。基于前面的理论结果, ACAI-1 应该是不随质量元的位置而改变, 而 ACAI-2 则能相应反应出质量元对飞行器控制性能的影响。

3.1 仿真 1: 旋翼失效

鉴于六旋翼飞行器动力系统的对称性, 在本次仿真中分别分析旋翼无故障以及 1 号旋翼效率降低为无故障时的 80%、60%、40%、20%、0% (即完全失效) 时飞行器的可控性, 仿真结果如表 2 所示。从表中可以看出, ACAI-1 和 ACAI-2 的验证结果一致, 并且均随着 1 号旋翼效率降低而变小, 唯一的区别就是飞行器可控时两者数值大小不同。这说明了本文所提的 ACAI-2 指标在验证可控性这个功能上与 ACAI-1 是一致的, 而且与文献[5]的结论一致。

表 2 PNPNP 六旋翼在一个旋翼失效时的可控性

Table 2 Controllability of the PNPNP hexacopter with one rotor failure

旋翼失效	ACAI-1	ACAI-2	可控性
正常	1.486 1	8.289 6	可控
$\eta_1=0.8$	1.188 8	6.802 7	可控
$\eta_1=0.6$	0.891 6	5.315 8	可控
$\eta_1=0.4$	0.594 4	3.828 9	可控
$\eta_1=0.2$	0.297 2	2.342 0	可控
$\eta_1=0$	0	0	不可控

3.2 仿真 2: 施加负载

在本次仿真中, 将质量为 $\Delta m=0.2$ kg (即 200 g) 的负载 (假设其体积可以忽略, 看作质量元) 沿着图 2 飞行器的 2 号旋翼与 5 号旋翼的电机轴线移动。图 2 中, $O_l-e_x e_y e_z$ 为地面坐标系, $O_b-e_1 e_2 e_3$ 为机体坐标系。假设质量元从原点 O_b 开始向 2 号旋翼转动轴移动, 每次移动距离为 2 号旋翼机臂长度的 1/5, 即 0.055 m。假设质量元在电机轴上到原点 O_b 的距离为 l , 通过计算可知 J_f 随 l 变化而变化的情况为

$$\left\{ \begin{aligned}
 J &= \begin{bmatrix} 0.041 1 + \frac{3}{4} l^2 \Delta m & -\frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \Delta m & -\frac{1}{2} l^2 \Delta m \\
 -\frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \Delta m & 0.047 8 + \frac{1}{4} l^2 \Delta m & -\frac{\sqrt{3}}{2} l^2 \Delta m \\
 -\frac{1}{2} l^2 \Delta m & -\frac{\sqrt{3}}{2} l^2 \Delta m & 0.059 9 + l^2 \Delta m \end{bmatrix} \\
 J_f &= \begin{bmatrix} -m_a - \Delta m & \mathbf{0}_{1 \times 3} \\
 \mathbf{0}_{3 \times 1} & J \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{4 \times 4}
 \end{aligned} \right. \quad (33)$$

根据 J_f 随着质量元位置的变化, 分别计算两个指标 ACAI-1 和 ACAI-2, 结果如表 3 所示。为了表明两种指标与状态范数可控度的关系, 表中也给出了状态范数可控度的计算结果 (用 DoC 表示, 采用文献[23]给出的状态范数可控度计算方法, 恢复时间设置为 0.4 s, 离散时间设置为 0.1 s)。从表 3 可以看出, ACAI-1 不随 l 的变化而改变, 而 ACAI-2 却能反应出飞行器可控度随着 l 的增大而减小, 更贴合实际情况, 与状态范数可控度的变化趋势一致。因此, 本文提出的指标 (ACAI-2) 可以更好地反映飞行器转动惯量变化时的可控度变化情况。

通过仿真 1 和仿真 2 的结果, 可以发现本文所提出的可控性度量指标 $\rho(\mathbf{g}_f, \partial \Omega_f)$ 不仅能够反应飞行器旋翼系统故障/失效时的可控性及其可控度情况, 而且能够反应飞行器质量分布不均导致的转动惯量变化时的可控性以及可控度变化情况。与文献[5]中所提的 ACAI 指标相比, 本文所提的指标更有效且更贴近实际应用需求。

表 3 两种 ACAI 指标以及 DoC 随 J_f 的变化情况

Table 3 Value of the two ACAIs and the DoC corresponding to different J_f

l/m	ACAI-1	ACAI-2	DoC
0	1.486 1	3.984 8	0.374 0
0.055	1.486 1	3.945 5	0.373 6
0.11	1.486 1	3.932 2	0.372 3
0.165	1.486 1	3.908 7	0.370 1
0.22	1.486 1	3.873 1	0.366 7
0.275	1.486 1	3.823 1	0.362 0

4 结 论

针对多旋翼飞行器的可控性问题, 本文在已有研究的基础上研究和分析了多旋翼飞行器在由于外加负载而导致其质量分布不对称时的可控性变化。给出了多旋翼飞行器可控性判定方法, 并在此基础上进一步提出了一种新的多旋翼飞行器可控性度量指标。与文献中已有指标相比, 本

文所提的指标不仅能够实现已有指标的功能,而且还能够反应飞行器转动惯量等物理参数对其可控度的影响。最后,仿真结果表明了本文所给出的可控性分析方法以及可控性度量指标的有效性。

参考文献:

- [1] TAYEBI A, MCGILVRAY S. Attitude stabilization of a vtol quadrotor aircraft[J]. IEEE Trans. on Control Systems Technology, 2006, 14(3): 562 - 571.
- [2] SCHNEIDER T. Fault-tolerant multirotor systems[D]. Zurich: Eidgenössische Technische Hochschule Zurich, 2011
- [3] MAHONY R, KUMAR V, CORKE P. Multirotor aerial vehicles: modeling, estimation, and control of quadrotor[J]. IEEE Robotics & Automation Magazine, 2012, 19(3): 20 - 32.
- [4] 吴琛, 苏剑波. 四旋翼飞行器的轨迹跟踪抗干扰控制[J]. 控制理论与应用, 2016, 33(11): 1422 - 1430.
- WU C, SU J B. Trajectory tracking of quadrotor based on disturbance rejection control[J]. Control Theory & Applications, 2016, 33(11): 1422 - 1430.
- [5] DU G X, QUAN Q, YANG B, et al. Controllability analysis for multirotor helicopter rotor degradation and failure[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2015, 38(5): 978 - 985.
- [6] 郝伟, 鲜斌. 四旋翼无人机姿态系统的非线性容错控制设计[J]. 控制理论与应用, 2015, 32(11): 1457 - 1463.
- HAO W, XIAN B. Nonlinear fault tolerant control design for quadrotor unmanned aerial vehicle attitude system[J]. Control Theory & Applications, 2015, 32(11): 1457 - 1463.
- [7] ZHANG Y, JIANG J. Bibliographical review on reconfigurable fault-tolerant control systems[J]. Annual Reviews in Control, 2008, 32(2): 229 - 252.
- [8] YU X, JIANG J. A survey of fault-tolerant controllers based on safety-related issues[J]. Annual Reviews in Control, 2015, 39(1): 46 - 57.
- [9] WU N E, ZHOU K, SALOMON G. Control reconfigurability of linear time-invariant systems[J]. Automatica, 2000, 36(11): 1767 - 1771.
- [10] YANG Z. Reconfigurability analysis for a class of linear hybrid systems[C]// Proc. of the Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes, 2006, 39(13): 974 - 979.
- [11] KALMAN R E. On the general theory of control systems[C]// Proc. of the World Congress of the International Federation of Automatic Control, 1960: 481 - 493.
- [12] 杜光勋, 全权. 输入受限系统的可控度及其在飞行控制中的应用[J]. 系统科学与数学, 2014, 34(12): 1578 - 1594.
- DU G X, QUAN Q. Degree of controllability and its application in aircraft flight control[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2014, 34(12): 1578 - 1594.
- [13] VISWANATHAN C N, LONGMAN R W, LIKINS P W. A definition of the degree of controllability—a criterion for actuator placement[C]// Proc. of the 2nd VPI&SU/AIAA Symposium on Dynamics and Control of Large Flexible Spacecraft, 1979: 369 - 381.
- [14] KLEIN G, LINDBERG J R E, LONGMAN R W. Computation of a degree of controllability via system discretization[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1982, 5(6): 583 - 588.
- [15] 杜光勋. 多旋翼系统可控性度量问题研究[D]. 北京: 北京航空航天大学, 2016.
- DU G X. Research on the controllability quantification of multirotor systems[D]. Beijing: Beihang University, 2016.
- [16] QUAN Q. Introduction to multicopter design and control[M]. Singapore: Springer, 2017.
- [17] PAW Y C. Synthesis and validation of flight control for UAV[D]. Minnesota: University of Minnesota, 2009.
- [18] GOODWIN G, SERON M, DEDON J A. Constrained control and estimation: an optimisation approach[M]. New York: Springer Science & Business Media, 2006.
- [19] DU G X, QUAN Q. A matlab toolbox for calculating an available control authority index of multicopters[EB/OL]. [2016 - 12 - 20]. <http://rfiy.buaa.edu.cn/resources>, 2016.
- [20] 刘斌, 赵峙尧, 杨斌先, 等. 一种四旋翼飞行控制能力实时评估方法[C]//第 33 届中国控制会议, 2014: 3112 - 3117.
- LIU B, ZHAO Z, YANG B, et al. A real-time assessment approach to quadrotor flight control capability[C]// Proc. of the 33rd IEEE Chinese Control Conference, 2014: 3112 - 3117.
- [21] ROH H S, PARK Y. Actuator and exciter placement for flexible structures[J]. Journal of Guidance Control and Dynamics, 1997, 20(5): 850 - 856.
- [22] HENICHE A, KAMWA I. Using measures of controllability and observability for input and output selection[C]// Proc. of the IEEE International Conference on Control Applications, 2002: 1248 - 1251.
- [23] 杨斌先, 杜光勋, 全权, 等. 输入受限下的可控度分析及其在六旋翼飞行器设计中的应用[C]//第 32 届中国控制会议, 2013: 113 - 118.
- YANG B X, DU G X, QUAN Q, et al. The degree of controllability with limited input and an application for hexacopter design[C]// Proc. of the 32nd IEEE Chinese Control Conference, 2013: 113 - 118.

作者简介:

杜光勋(1987 -), 男, 博士后, 主要研究方向为可靠飞行控制。
E-mail: dgx@buaa.edu.cn

全权(1981 -), 男, 副教授, 博士, 主要研究方向为可靠飞行控制。
E-mail: qq_buaa@buaa.edu.cn